

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

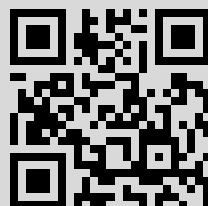
В. И. Мироненко, Замечания о стационарных интегралах и о стационарных преобразованиях неавтономных дифференциальных систем, *Дифференц. уравнения*, 1977, том 13, номер 5, 864–868

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 37.17.74.99

3 марта 2022 г., 11:21:59



УДК 517.913

В. И. МИРОНЕНКО

ЗАМЕЧАНИЯ О СТАЦИОНАРНЫХ ИНТЕГРАЛАХ И О СТАЦИОНАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Знание хотя бы одного стационарного интеграла системы дифференциальных уравнений значительно облегчает ее исследование. Поэтому важно знать условия, при которых существуют упомянутые интегралы, и уметь их находить.

Задача отыскания стационарных интегралов у систем вида

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^m P_k^{(i)}(x_1, \dots, x_n) \varphi_k(t) \quad i=1, \dots, n,$$

поставлена и решена в книге Н. П. Еругина (см. § 1, 2, гл. XI). Отысканию специальных стационарных интегралов линейных систем посвящены работы Н. А. Збойчика [2, 3].

В первой части данной работы дано эффективно проверяемое необходимое и достаточное условие существования стационарного интеграла у существенно неавтономной дифференциальной системы

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in J \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

с голоморфной правой частью. Во второй части выписаны уравнения для независимого от t преобразования, переводящего решения одной системы в решения другой напередзаданной системы при условии, что это преобразование существует.

1. Теорема 1. *Для того чтобы система (1) с $n-1$ раз дифференцируемой по t правой частью имела в $J \times D$ дифференцируемый стационарный интеграл $\omega(x)$, обладающий свойством*

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_n} \right)^2 \neq 0 \quad \forall x \in D,$$

необходимо выполнение тождества

$$\begin{vmatrix} f_1 & \cdot & \cdot & \cdot & f_n \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial t} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial t^{n-1}} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial t^{n-1}} \end{vmatrix} (t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in J \times D. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть система (1) имеет стационарный интеграл $\omega(x)$. Тогда

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \omega}{\partial x_n} f_n = 0 \quad \forall (t, x) \in J \times D.$$

А это означает, что функции $f_i(\cdot, x) : J \rightarrow \mathbf{R}$ линейно зависимы на J при каждом $x \in D$. Поэтому их вронскиан, представляющий собой левую часть тождества (2), обязан обращаться в нуль. Теорема доказана.

Поставим теперь следующий вопрос. Всегда ли при выполнении условия (2) система (1) обладает стационарным интегралом? Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным для $n > 2$ и положительным для $n = 2$.

При ответе на этот вопрос мы будем считать функции $f_i(\cdot, x)$ голоморфными на J при каждом фиксированном $x \in D$. Это условие значительно облегчит ход наших рассуждений.

Итак, пусть функции $f_i(t, x)$ голоморфны по t и удовлетворяют условию (2). Тогда, согласно лемме Ногн'а (см. [4, 5]), функции $f_i(\cdot, x)$ линейно зависимы на J при каждом $x \in D$, т. е. существуют функции $\varphi_i : D \rightarrow \mathbf{R}$, для которых

$$\varphi_1(x) f_1(t, x) + \dots + \varphi_n(x) f_n(t, x) = 0 \quad \forall (t, x) \in J \times D. \quad (3)$$

Функции $\varphi_i(x)$ легко находятся [5] и представляют собой многочлены от функций

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial t^k}(t_0, x) \quad (i = \overline{1, n}; k = \overline{0, n-2}),$$

где t_0 фиксировано на J произвольным образом. С соотношением (3) свяжем уравнение Пфаффа

$$\varphi_1(x) dx_1 + \dots + \varphi_n(x) dx_n = 0. \quad (4)$$

Если уравнение (4) интегрируется с помощью одного соотношения $\omega(x) = c$ [6, стр. 362], то $\omega(x)$ и есть искомый стационарный интеграл системы (1). Действительно, в этом случае существует функция $M(x)$,

для которой $\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \equiv M \varphi_i \quad (i = \overline{1, n})$. Поэтому, используя соотношение (4), получим тождество

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial \omega}{\partial x_n} f_n \equiv M [\varphi_1 f_1 + \dots + \varphi_n f_n] \equiv 0,$$

показывающее, что $\omega(x)$ есть интеграл системы (1).

Если же уравнение (4) не интегрируется с помощью одного соотношения, то система (1) стационарных интегралов, очевидно, не имеет.

При $n = 2$ уравнение (4) имеет вид

$$\varphi_1(x_1, x_2) dx_1 + \varphi_2(x_1, x_2) dx_2.$$

Общий интеграл этого уравнения $\omega(x_1, x_2) = C$ и будет стационарным интегралом системы (1).

Таким образом верна следующая

Теорема 2. Для того чтобы система (1) с голоморфной по t правой частью $f(t, x)$ имела стационарный интеграл, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_i(\cdot, x)$ были линейно зависимы на J при каждом $x \in D$, а уравнение Пфаффа (4) удовлетворяло условию полной интегрируемости.

Для того чтобы двумерная система (1) с голоморфной по t правой частью имела стационарный интеграл, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(t, x_1, x_2)$ и $f_2(t, x_1, x_2)$ были линейно зависимы как функции переменного t при каждом фиксированных x_1, x_2 .

З а м е ч а н и е. Из работы [5] следует, что уравнение Пфаффа (4) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} dx_1 & . & . & . & dx_n \\ f_1(t_0, x) & . & . & . & f_n(t_0, x) \\ \frac{\partial f_1}{\partial t}(t_0, x) & . & . & . & \frac{\partial f_n}{\partial t}(t_0, x) \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial^{n-2} f_1}{\partial t^{n-2}}(t_0, x) & . & . & . & \frac{\partial^{n-2} f_n}{\partial t^{n-2}}(t_0, x) \end{vmatrix} = 0, \quad (*)$$

если только (*) не вырождается в тождество (здесь t_0 — произвольная фиксированная точка из J). В рассматриваемом случае система (1) может иметь только один независимый стационарный интеграл.

Если же соотношение (*) вырождается в тождество, т. е. если коэффициенты при dx_i в выражении (*) тождественно по (t_0, x) обращаются в нуль, то система (1) может иметь несколько независимых стационарных интегралов.

В ы в о д. Для нахождения стационарных интегралов голоморфной системы (1) проверяем условие (2). Если оно не выполняется, то система (1) стационарных интегралов не имеет. Если же условие (2) выполнено, то записываем соотношение (*). Пусть это соотношение не вырождается в тождество вида $0 \equiv 0$. Тогда оно представляет собой уравнение Пфаффа. Если полученное уравнение Пфаффа интегрируется с помощью одного соотношения $\omega(x) = c$, то $\omega(x)$ является единственным независимым интегралом системы (1). Если же уравнение Пфаффа не удовлетворяет условию полной интегрируемости, то система (1) стационарных интегралов не имеет.

В случае, когда соотношение (*) вырождается в тождество, записываем следующую систему конечных уравнений для определения функций $\varphi_i(x)$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x)f_1(t_0, x) + \dots + \varphi_n(x)f_n(t_0, x) &= 0, \\ \varphi_1(x)\frac{\partial f_1}{\partial t}(t_0, x) + \dots + \varphi_n(x)\frac{\partial f_n}{\partial t}(t_0, x) &= 0, \\ . & \\ \varphi_1(x)\frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial t^{n-1}}(t_0, x) + \dots + \varphi_n(x)\frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial t^{n-1}}(t_0, x) &= 0. \end{aligned} \quad (**)$$

Для любого решения $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ этой системы запишем соответствующее уравнение Пфаффа (4).

Интегралы полученных уравнений Пфаффа являются искомыми стационарными интегралами системы (1). При этом можно показать, что система (1) содержит ровно столько стационарных независимых интегралов, сколько произвольных функций содержит общее решение системы (**).

Пример. Для системы

$$\dot{x} = xz - p(t), \quad \dot{y} = -yz, \quad \dot{z} = p(t)y$$

условие (2) выполнено, так как

$$\begin{vmatrix} xz - p(t) & -yz & p(t)y \\ -p'(t) & 0 & p'(t)y \\ -p''(t) & 0 & p''(t)y \end{vmatrix} = 0.$$

Соответствующее уравнение Пфаффа имеет вид

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ xz - p(t_0) & -yz & p(t_0)y \\ -p(t_0) & 0 & p'(t_0)y \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв этот определитель по первой строке и разделив на коэффициент при dz , получим уравнение

$$ydx + xdy + dz = 0.$$

Оно интегрируется с помощью одного соотношения $xy + z = c$. Поэтому функция $\omega = xy + z$ является стационарным интегралом рассматриваемой системы. Всякий другой стационарный интеграл представляет собой некоторую функцию от ω , т. е. имеет вид $F(xy + z)$.

II. Рассмотрим теперь две системы дифференциальных уравнений одного и того же порядка

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in J \times D \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \quad (5)$$

и

$$\dot{y} = g(t, y), \quad (t, y) \in J \times \Delta \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n. \quad (6)$$

Будем считать, что x, y, f и g представляют собой векторы-столбцы, причем f и g будем считать бесконечно дифференцируемыми вектор-функциями. Поставим вопрос. Когда существует независящее от t преобразование $\varphi: D \rightarrow \Delta$, переводящее решения системы (5) в решения системы (6)?

Для ответа на этот вопрос предположим, что указанное преобразование $\varphi: D \rightarrow \Delta$ существует. Тогда для всех $(t, x) \in J \times D$ выполняется тождество

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} f(t, x) \equiv g(t, \varphi(x)), \quad (t, x) \in J \times D.$$

Дифференцируя это тождество частным образом по t , получим бесконечную последовательность векторных тождеств

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \frac{\partial f(t, x)}{\partial t^i} \equiv \frac{\partial^i g(t, \varphi(x))}{\partial t^i} \quad (i=0, 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Взяв из последовательности (7) первые n векторных тождеств, составим одно матричное тождество

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \left[f, \frac{\partial f}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial t^{n-1}} \right] \equiv \left[g, \frac{\partial g}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} g}{\partial t^{n-1}} \right]. \quad (8)$$

Пусть

$$\det \left[f, \frac{\partial f}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial t^{n-1}} \right] \neq 0 \quad \forall (t, x) \in J \times D.$$

Тогда из соотношения (8) найдем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv \left[g, \frac{\partial g}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} g}{\partial t^{n-1}} \right] \left[t, \frac{\partial f}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial t^{n-1}} \right]^{-1}.$$

Подставляя полученное выражение для $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ в каждое из тождеств последовательности (7), получим новую последовательность тождеств

$$\left[g, \frac{\partial g}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} g}{\partial t^{n-1}} \right] \left[f, \frac{\partial f}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial t^{n-1}} \right]^{-1} \frac{\partial^i f}{\partial t^i} \equiv \frac{\partial^i g}{\partial t^i}, \quad i \in N. \quad (9)$$

Каждое из этих тождеств не содержит производных от φ .

Вывод. Если существует независящее от t преобразование $y = \varphi(x)$, преобразующее решения системы (5) в решения системы (6), то оно обязано удовлетворять системе соотношений (9), не содержащей производных от φ . Соотношения (9) являются, таким образом, конечными (не дифференциальными) уравнениями для $\varphi(x)$ или представляют собой тривиальные тождества.

Пример. Даны два уравнения

$$\dot{x} = tx + x^3 \text{ и } \dot{y} = 2ty + 2y^2.$$

Требуется выяснить, существует ли для этих уравнений вышерассмотренное преобразование $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. В данном случае соотношения (9) принимают вид

$$[2ty + 2y^2][tx + x^3]^{-1} \frac{\partial^i [tx + x^3]}{\partial t^i} \equiv \frac{\partial^i [2ty + 2y^2]}{\partial t^i}.$$

При $i=1$ имеем следующее соотношение: $\frac{2ty + 2y^2}{tx + x^3} x \equiv 2y$, откуда $y = \varphi(x) \equiv x^2$. Легко убедиться, что преобразование $\varphi: x \rightarrow x^2$ действительно преобразует решения первого уравнения в решения второго уравнения.

Литература

1. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, «Наука и техника», 1970.
2. Збойчик Н. А. Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, № 1, 1970.
3. Збойчик Н. А. Дифференц. уравнения, 6, № 2, 1970.
4. Ногл Р. А., Amer. Math. Mon., 77, № 1, 65—66, 1970.
5. Мироненко В. И. Дифференц. уравнения, 11, № 7, 1975.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1958.

Поступила в редакцию
26 сентября 1976 г.

Гомельский государственный
университет