В. И. Мироненко, Дифференциальные системы, эквивалентные по вложимости, *Дифференц. уравнения*, 1975, том 11, номер 7, 1225–1231

ИЮЛЬ 1975 г., ТОМ XI, № 7

УДК 517.926

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПО ВЛОЖИМОСТИ

В. И. МИРОНЕНКО

В настоящей работе введено понятие эквивалентности по вложимости систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Две системы названы эквивалентными по вложимости, если существует биективное отображение множества начальных данных одной системы на множество начальных данных другой системы, при котором любая компонента вектора разности соответствующих решений рассматриваемых систем представляет собой решение некоторого линейного однородного стационарного уравнения. Показано, что эквивалентность по вложимости двух голоморфных систем при некотором достаточно общем предположении влечет их интегрируемость в конечном виде. При этом существенным образом используется линейная зависимость функций. Доказательство необходимого и достаточного условия линейной зависимости функций не использует теории линейных дифференциальных уравнений.

Пусть нам задано $n+1$ функций $\varphi_i : J \to \mathbf{R}$ $(i=0, 1, \ldots, n)$, определенных на интервале J действительной числовой оси $\mathbf{R}$. Предположим, что φ_i имеют на J все производные $\varphi_i^{(R)}$ до порядка n. Символом $|\varphi_0, \ldots, \varphi_n|$ обозначим вронскиан рассматриваемых функций.

Пусть также

$$|\varphi_0, \ldots, \hat{\varphi}_i, \ldots, \varphi_n| \equiv |\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_n|.$$

I. Лемма 1. *Пусть для любого $t \in J$ выполнены соотношения*

$$|\varphi_0, \ldots, \varphi_n| = 0 \quad \text{и} \quad |\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}| \neq 0.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(t) & \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_0^{(0)}(t_0) & \varphi_1^{(0)}(t_0) & \ldots & \varphi_n^{(0)}(t_0) \\ \varphi_0^{(1)}(t_0) & \varphi_1^{(1)}(t_0) & \ldots & \varphi_n^{(1)}(t_0) \\ \varphi_0^{(n-1)}(t_0) & \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad \forall t,\ t_0 \in J.$$

Доказательство. Подберем $a_i = a_i(t)$ таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$a_0\varphi_0^{(0)} + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1}^{(0)} - \varphi_n^{(0)} \equiv 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0\varphi_0^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1}^{(n-1)} - \varphi_n^{(n-1)} \equiv 0.$$

Это можно сделать единственным образом. При этом

$$a_i = \frac{|\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_n, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_{n-1}|}{|\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}|} \qquad (i=0, 1, \ldots, n-1)$$

являются дифференцируемыми функциями t.

Для найденных a_i имеем

$$a_0\varphi_0^{(n)} + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1}^{(n)} - \varphi_n^{(n)} \equiv -\frac{|\varphi_0, \ldots, \varphi_n|}{|\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}|} \equiv 0.$$

Поэтому верны соотношения

$$a_0\varphi_0^{(0)} + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1}^{(0)} - \varphi_n^{(0)} \equiv 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_0\varphi_0^{(n)} + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1}^{(n)} - \varphi_n^{(n)} \equiv 0.$$

Дифференцируя каждое из этих соотношений и учитывая следующее за ним, получим тождества

$$\begin{aligned} &a'_0\varphi_0^{(0)} + \ldots + a'_{n-1}\varphi_{n-1}^{(0)} \equiv 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a'_0\varphi_0^{(n-1)} + \ldots + a'_{n-1}\varphi_{n-1}^{(n-1)} \equiv 0. \end{aligned} \qquad \left(a'_i \equiv \frac{da_i}{dt} \right).$$

Откуда $a'_i \equiv 0$ и поэтому

$$a_i(t) \equiv a_i(t_0) = \left. \frac{|\varphi_0, \ldots, \varphi_{i-1}, \varphi_n, \varphi_{i+1}, \ldots, \varphi_{n-1}|}{|\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}|} \right|_{t=t_0}.$$

Подставляя полученные значения для $a_i(t)$ в тождество

$$a_0\varphi_0 + \ldots + a_{n-1}\varphi_{n-1} - \varphi_n \overset{t}{\equiv} 0$$

и проводя несложные преобразования, докажем лемму 1.

З а м е ч а н и е. Если φ_i дифференцируемы n раз на J и $t_0 \in J$ таково, что

$$\sum_{i=0}^{n} |\varphi_0, \ldots, \hat{\varphi}_i, \ldots, \varphi_n|^2_{t=t_0} \neq 0, \text{ а } |\varphi_0, \ldots, \varphi_n| \equiv 0,$$

то существует интервал $J_0 \subset J$, на котором функции φ_i линейно зависимы и эта зависимость может быть записана в виде

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(t) & \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_0^{(0)}(t_0) & \varphi_1^{(0)}(t_0) & \ldots & \varphi_n^{(0)}(t_0) \\ \varphi_0^{(1)}(t_0) & \varphi_1^{(1)}(t_0) & \ldots & \varphi_n^{(1)}(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(n-1)}(t_0) & \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \overset{t}{\equiv} 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без нарушения общности считаем, что для любого t из некоторого интервала J_0 $(t_0 \in J_0 \subset J)$ $|\varphi_0, \ldots, \hat{\varphi}_k, \ldots, \varphi_n| \neq 0$. Применяя на этом интервале лемму 1, убедимся в справедливости замечания.

С л е д с т в и е. 1. *Пусть $\bar{J}$ означает замыкание интервала J. Если n раз дифференцируемые на J функции φ_i удовлетворяют условию*

$|\varphi_0, \ldots, \varphi_n| \equiv 0$, *то J можно разбить на интервалы J_k таким образом, что на каждом J_k функции φ_i линейно зависимы и* $\overline{\bigcup J_k} = \bar{J}$.

Доказательство. Пусть $W_n \equiv |\varphi_0, \ldots, \varphi_n|$. Разобъем интервал J на J_k нулями функции $W_{n-1} \equiv |\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}|$ таким образом, чтобы на каждом J_k выполнялось одно из двух: либо $W_{n-1} \equiv 0$, либо $W_{n-1} \neq 0$ на J_k. Тогда на тех J_k, где $W_{n-1} \neq 0$, функции φ_i линейно зависимы в силу леммы 1.

Каждый интервал J_k, где $W_{n-1} \equiv 0$, разобъем нулями функции W_{n-2} аналогично тому, как мы разбивали интервал J.

Продолжая этот процесс до $W_0 \equiv \varphi_0$, мы разобъем J на J_k таким образом, что на каждом J_k функции φ_i линейно зависимы, кроме, быть может, тех J_k, где $\varphi_0 \equiv 0$. Но там, где $\varphi_0 \equiv 0$, φ_i также линейно зависимы. Следствие 1 доказано.

Следствие 2. *Для линейной зависимости на интервале J голоморфных на J функций φ_i ($i=0, 1, \ldots, n$) необходимо и достаточно выполнение тождества* $|\varphi_0, \ldots, \varphi_n| \equiv 0$.

Необходимость доказывается известным образом, а достаточность следует из следствия 1 и теоремы единственности для голоморфных функций. (См. также [1]).

II. Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in J, \quad x \in D \subset \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

$$\dot{y} = g(t, y), \quad t \in J, \quad y \in \Delta \subset \mathbf{R}^n. \tag{2}$$

(Здесь J — интервал числовой оси, D и Δ — области). Всюду далее будем предполагать, что для рассматриваемых систем в указанных областях выполнены условия существования и единственности решений.

Пусть $x(\cdot, t_0, x_0)$ и $y(\cdot, t_0, x_0)$ — решения систем (1) и (2), проходящие при $t=t_0$ через точки x_0 и y_0 соответственно.

Определение. Системы (1) и (2) назовем эквивалентными по вложимости, если существует отображение $\varphi: J \times D \to \Delta$, удовлетворяющее условиям:

А. Для любого $t_0 \in J$ отображение φ взаимнооднозначно отображает область D на Δ.

Б. Для любой точки $(t_0, x_0) \in J \times D$ можно указать линейную однородную стационарную систему

$$\begin{gathered} z^{(m)} + A_{m-1} z^{(m-1)} + \ldots + A_0 z = 0, \qquad z \in \mathbf{R}^n, \\ m = m(t_0, x_0), \qquad A_i = A_i(t_0, x_0), \end{gathered} \tag{3}$$

одним из решений которой является функция

$$z(\cdot, t_0, x_0) = y(\cdot, t_0, \varphi(t_0, x_0)) - x(\cdot, t_0, x_0).$$

Нетрудно увидеть, что указанное соотношение между системами действительно является соотношением эквивалентности.

Лемма 2. *Если существует взаимно однозначное отображение $\varphi_*: D \to \Delta$ при некотором фиксированном $t_0 = t_* \in J$, обладающее свойством Б и все решения систем (1) и (2) продолжимы на весь интервал J, то системы (1) и (2) эквивалентны по вложимости и существует отображение $\Phi: J \times D \to \Delta$, обладающее свойствами А, Б и свойством*

В. *Если $x(\cdot)$ — решение системы (1), то $\Phi(\cdot, x(\cdot))$ является решением системы (2).*

Доказательство. Отображение Φ определим равенством

$$\Phi(t, x) \equiv y(t, t_*, \varphi_*(x(t_*, t, x))). \tag{4}$$

Покажем, что Φ обладает свойствами А, Б и В.

а) Зафиксируем $t=t_0$ и рассмотрим функцию $\Phi(t_0, x)$. Каждому $x \in D$ эта функция ставит в соответствие единственное $y=\Phi(t_0, x) \in \Delta$. Пусть некотрое $\bar{y} \in \Delta$. В силу продолжимости всех решений системы (2) уравнение $\bar{y}=y(t_0, t_*, \varphi)$ имеет единственное решение $\bar{\varphi}=y(t_*, t_0, \bar{y})$ [2]. Так как в силу взаимной однозначности φ_* и продолжимости решений системы (1) уравнение $\bar{\varphi}=\varphi_*(x(t_*, t_0, x))$ тоже имеет единственное решение $\bar{x}=x(t_0, t_*, \varphi_*^{-1}(\bar{\varphi}))$, то уравнение $\bar{y}=\Phi(t_0, x)$ имеет единственное решение при любом фиксированном $t_0 \in J$. Тем самым свойство А отображения Φ доказано.

в) Докажем свойство В функции Φ. С этой целью предположим, что $x(\cdot)$ есть некоторое решение системы (1). Тогда

$$x(t_*, t, x(t)) \overset{t}{\equiv} x(t_*)$$

и потому

$$\Phi(\cdot, x(\cdot)) = y(\cdot, t_*, \varphi_*(x(t_*))).$$

Свойство В функции Φ доказано.

б) Для завершения доказательства леммы 2 отметим, что свойство Б функции Φ следует из аналогичного свойства функции φ_* и равенства

$$y(\cdot, t_0, \Phi(t_0, x_0)) - x(\cdot, t_0, x_0) = y(\cdot, t_*, \varphi_*(x_*)) - x(\cdot, t_*, x_*),$$

где $x_*=x(t_*, t_0, x_0)$.

Замечания: 1. Если выполнены все условия леммы 2, кроме условия продолжимости решений систем (1) и (2), то всегда существуют такие подобласти

$$D_1 = \{(t, x) \mid x = x(t, t_*, x_0),\ t \in J_{x_0},\ x_0 \in D\} \subset D$$

и

$$\Delta_1 = \{(t, y) \mid y = y(t, t_*, y_0),\ t \in J_{y_0},\ y_0 \in \Delta\} \subset \Delta$$

(J_{x_0} и J_{y_0} — максимальные интервалы существования решений $x(\cdot, t_*, x_0)$ и $y(\cdot, t_*, y_0)$), что сужения систем (1) и (2) на D_1 и Δ_1 соответственно являются эквивалентными по вложимости. Нельзя, однако, утверждать, что системы (1) и (2) будут эквивалентны по вложимости. В качестве примера рассмотрим два уравнения

$$\dot{x} = \begin{cases} -x^2, & \text{если } tx \leqslant 1 \\ -x^3 t, & \text{если } tx > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \dot{y} = y^2.$$

Для этих уравнений выполнены все условия леммы 2, кроме продолжимости решений (здесь $J=D=\Delta=(-\infty, +\infty)$, $t_*=0$, $\varphi_*(x) \equiv x$). Рассматриваемые уравнения не эквивалентны по вложимости, но их сужения на области $D_1=\Delta_1=\{(t, x) \mid tx \leqslant 1\}$ эквивалентны, так как в $D_1=\Delta_1$ эти уравнения попросту совпадают.

2. Всюду далее будем считать, что отображение φ в определении эквивалентности по вложимости обладает свойствами А, Б и В. Из леммы 2 следует, что это не нарушает общности дальнейших рассуждений. (При доказательстве этого замечания следует помнить, что здесь роль φ_* может выполнять любая из функций $\varphi(t_0, \cdot)$, $t_0 \in J$).

3. Из определения функции Φ (см. (4)) следует, что если функции f, g и φ_* голоморфны, то функция Φ, обладающая свойствами А, Б и В, тоже будет голоморфна в некоторой подобласти $J \times D$.

Обозначения. Для любой нужное число раз дифференцируемой функции $\psi: J \times D \times \Delta \to \mathbf{R}$ и любого натурального k положим

$$\psi^{(0)}=\psi(t, x, y); \quad \psi^{(k+1)}=\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial x_i}f_i+\frac{\partial\psi^{(k)}}{\partial y_i}g_i\right].$$

Если мы имеем $r+1$ такую функцию, то

$$|\psi_0, \ldots, \psi_r| \equiv \begin{vmatrix} \psi_0^{(0)} & \ldots & \psi_r^{(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_0^{(r)} & \ldots & \psi_r^{(r)} \end{vmatrix}$$

означает вронскиан этих функций, вычисленный вдоль решений систем (1) и (2).

Пусть так же

$$W_i^{(k)}(t, x, y) \equiv |y_i-x_i, y_i^{(1)}-x_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(k)}-x_i^{(k)}|.$$

Теорема 1. *Пусть функция $f: J\times D\to\mathbf{R}^n$ и $g: J\times\Delta\to R^n$ голоморфны и существует голоморфная функция $\varphi: J\times D\to\Delta$, обладающая свойствами А, Б и В. Тогда системы (1) и (2) эквивалентны по вложимости и для каждого $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$ существует натуральное число $r=r(i)$, для которого*

$$W_i^{(r)}(t, x, \varphi(t, x))=0 \ \forall\ (t, x)\in J\times D.$$

Доказательство. Эквивалентность систем (1) и (2) следует непосредственно из определения.

Для доказательства существования числа r зафиксируем $i\in\{1, \ldots, n\}$ и рассмотрим последовательность функций $(\Phi_k)_{k=0}^{\infty}$, определяемых равенствами

$$\Phi_k(t, x) \equiv -x_i^{(k)}+\varphi_i^{(k)}(t, x),$$

где $\varphi_i(t, x)$ — i-ая компонента вектора $\varphi(t, x)$.

Из определения эквивалентности по вложимости и свойства В функции φ следует, что для каждого решения $x(\cdot)$ системы (1) существуют постоянные числа α_k и натуральное число m, для которых

$$\sum_{k=0}^{m}\alpha_k\Phi_k(t, x(t)) \overset{t}{\equiv} 0,$$

т. е. каждое решение системы (1) является Φ-решением [3]. Поэтому на основании теоремы из [3] существует натуральное число r, для которого

$$|\Phi_0, \ldots, \Phi_r|=0 \qquad \forall(t, x)\in J\times D.$$

Нетрудно увидеть, что в силу свойства В функции φ

$$W_i^k(t, x, \varphi(t, x)) \equiv |\Phi_0, \ldots, \Phi_r| \equiv 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть для систем (1) и (2) с голоморфными правыми частями указана функция $\varphi: J\times D\to\Delta$, обладающая свойствами:*

1) *функция φ голоморфна и обладает свойством А;*

2) *для любого $i\in\{1, \ldots, n\}$ существует такое натуральное число r_i, что*

$$W_i^{(r_i)}(t, x, \varphi(t, x))=0 \qquad \forall(t, x)\in J\times D;$$

$$3)\ g(t, \varphi(t, x)) \equiv \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} f(t, x);$$

$$4)\ \det\left(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x} - E\right) \neq 0 \quad \forall (t, x) \in J \times D.$$

(E — единичная матрица $n \times n$).

Тогда системы (1) и (2) эквивалентны по вложимости и их можно проинтегрировать в конечном виде.

Доказательство. а) В силу условия 3 теоремы

$$|\varphi_i^{(0)}(t, x) - x_i^{(0)}, \ldots, \varphi_i^{(r_i)}(t, x) - x_i^{(r_i)}| \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Поэтому на основании теоремы 1 из [4] для каждого решения $x(\cdot)$ системы (1) и любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ существуют не обращающиеся одновременно в нуль постоянные a_i^k ($i = 1, \ldots, n$; $k = 0, 1, \ldots, r_i$), для которых

$$\sum_{k=0}^{r_i} a_i^{(k)}[\varphi_i^{(k)}(t, x(t)) - x_i^{(k)}(t)] \overset{t}{\equiv} 0.$$

Отсюда следует, что функция $z_i(\cdot) = \varphi_i(\cdot, x(\cdot)) - x_i(\cdot)$ является решением линейного однородного стационарного уравнения порядка не выше r_i. Так как, кроме этого, $\varphi_i(\cdot, x(\cdot))$ является решением системы (2) (это обеспечивается третьим условием теоремы), то функция φ удовлетворяет условию Б определения эквивалентности по вложимости. Таким образом, функция обладает свойствами А и Б, а системы (1) и (2) эквивалентны по вложимости.

б) Докажем интегрируемость систем (1) и (2). Как было отмечено выше, каждое $z_i(\cdot)$ удовлетворяет линейному однородному стационарному уравнению порядка r_i. Поэтому $z_i(\cdot)$ удовлетворяет также уравнению

$$|z_i^{(0)}, \ldots, z_i^{(r_i)}| = 0. \tag{5}$$

(Здесь справа стоит определитель Вронского функции $z_i(\cdot)$ и r_i ее первых производных).

Из уравнения (5), учитывая начальные условия

$$z_i^{(k)}(t_0) = \varphi_i^{(k)}(t_0, x(t_0)) - x_i^{(k)}(t_0) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2r_i - 1),$$

можно определить $z_i(\cdot)$ (см. лемму 1).

Тогда из тождеств $z_i(t) \equiv \varphi_i(t, x(t)) - x_i(t)$ в силу четвертого условия теоремы определяется $x(t)$.

Решение системы (2) находится согласно формуле $y(t) = \varphi(t, x(t))$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Теорема 2 из работы [4], а также замечание к лемме 1 позволяют сделать заключение, что $z_i(t)$ удовлетворяет следующему линейному уравнению:

$$\begin{vmatrix} z_i^{(0)}(t) & z_i^{(1)}(t) & \ldots & z_i^{(r_i)}(t) \\ z_i^{(0)}(t_0) & z_i^{(1)}(t_0) & \ldots & z_i^{(r_i)}(t_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_i^{(r_i-1)}(t_0) & z_i^{(r_i)}(t_0) & \ldots & z_i^{(2r_i-1)}(t_0) \end{vmatrix} \overset{t}{\equiv} 0,$$

если только

$$\sum_{k=0}^{r_i} |z_i^{(0)}(t_0), \ldots, \hat{z}_i^{(k)}(t_0), \ldots, z_i^{(r_1)}(t_0)|^2 \neq 0.$$

2. Если в теореме 2 отказаться от условия (4), то, как следует из пункта а) доказательства, системы (1) и (2) будут эквивалентны, но интегрируемость систем (1) и (2) доказать невозможно. В качестве примера достаточно взять два скалярных эквивалентных по вложимости уравнения

$$\dot{x} = x^2 + t^2 \quad \text{и} \quad \dot{y} = (y - e^t)^2 + t^2 + e^t.$$

Литература

1. Horn R. A. Amer. Math. Mon., 77, № 1, 65—66, 1970.
2. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск, 1970.
3. Мироненко В. И. Дифференц. уравнения, **10**, № 2, 1974.
4. Мироненко В. И. Дифференц. уравнения, **8**, № 12, 1972.
5. Мироненко В. И. Дифференц. уравнения, **4**, № 6, 1968.

Поступила в редакцию 5 мая 1974 г.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина