В. И. Мироненко, Дифференциальные системы с φ-решениями, *Дифференц. уравнения*, 1974, том 10, номер 2, 358–360

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ФЕВРАЛЬ 1974 г., ТОМ X, № 2

УДК 517.913

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ С φ-РЕШЕНИЯМИ

В. И. МИРОНЕНКО

Пусть имеется бесконечная последовательность функций

$$\varphi_i = \varphi_i\,(t,\ x),\ x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)\quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Будем считать, что все φ_i голоморфны в некоторой области $J\times D$ и ни одна из них не выражается линейным образом через конечное число остальных.

Пусть нам задана также система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f\,(t,\ x) \tag{1}$$

с голоморфной в области $J\times D$ вектор-функцией $f\,(t,\ x)$.

Решение $x=x\,(t)$ системы (1) назовем φ-решением, если существуют постоянные $a_0,\ \ldots,\ a_m\ (a_m\neq 0)$ такие, что

$$\sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i\,(t,\ x\,(t)) = 0\quad \forall t\in J_x,$$

где J_x—интервал существования решения $x\,(t)$. Число $p=\sup\,\{m\}$ называется порядком φ-решения.

Теорема 1. *Для того чтобы все решения системы (1) были φ-решениями порядка не выше m, необходимо и достаточно выполнения тождества*

$$|\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_m| \equiv \begin{vmatrix} \varphi_0^{(0)} & \ldots & \varphi_m^{(0)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_0^{(m)} & \ldots & \varphi_m^{(m)} \end{vmatrix} \equiv 0,$$

где

$$\varphi_i^{(0)} = \varphi_i,\ \varphi_i^{(k+1)} = \frac{\partial\varphi_i^{(k)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i^{(k)}}{\partial x_j} f_j.$$

Эта теорема по существу является теоремой 1 из [1], сформулированной в терминах φ-решений.

Теорема 2. *Если все решения системы (1) являются φ-решениями, то существует натуральное число m такое, что порядок всех решений системы (1) не превосходит этого m.*

Доказательство. Пусть

$$W_m\,(t,\ x) \equiv |\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_m|$$

и $x_\lambda\,(t) = x\,(t,\ t_0,\ \lambda)$ есть решение системы (1), проходящее через точку $(t_0,\ \lambda)\in J\times D$, $t_0=\text{fix}$. Будем считать, что $x_\lambda\,(t)$ представляет собой голоморфную функцию t и λ в некоторой области, содержащей $J_0\times E_n$, где J_0 есть некоторый отрезок времени, а $E_n\subset\subset D$ — некоторый n-мерный замкнутый параллелепипед. Существование $J_0\times E_n$ обеспечивается условиями теоремы.

Из теоремы 1 и обратимости функций $x_\lambda\,(t)$ относительно λ следует, что для доказательства теоремы 2 достаточно доказать утверждение.

Пусть для любого $\lambda\in E_n$ существует натуральное число $m\,(\lambda)$ такое, что

$$W_{m(\lambda)}\,(t,\ x_\lambda\,(t)) = 0\quad \forall\, t\in J_0. \tag{2}$$

Тогда существует не зависящее от λ натуральное число $\bar{m}$ такое, что

$$W_{\overline{m}}(t,\ x_{\lambda}(t))=0 \quad \forall (t,\ \lambda)\in J_0\times E_n. \tag{3}$$

Доказательство этого факта проведем методом индукции по n.

1) Пусть $n=1$. Тогда для каждого λ из отрезка $E_1\subset R^1$ существует $m(\lambda)$, при котором выполнено тождество (2). Так как всех $\lambda\in E_1$ — несчетное множество, то существует такое $\overline{m}$, что

$$W_{\overline{m}}(t,\ x_{\lambda}(t))=0 \quad \forall t\in J_0 \quad \text{и} \ \forall\lambda\in M\subset E_1,$$

где M—несчетное множество.

При каждом фиксированном $t\in J_0$ $W_{\overline{m}}(t,\ x_{\lambda}(t))$ представляет собой голоморфную функцию λ, а множество M содержит предельную точку. Поэтому на основании известной теоремы

$$W_{\overline{m}}(t,\ x_{\lambda}(t))=0 \quad \forall (t,\ \lambda)\in J_0\times E_1.$$

Тем самым при $n=1$ теорема доказана.

2) Пусть теперь высказанное выше утверждение верно для n. Покажем, что тогда оно верно и для $n+1$. Запишем вектор $\lambda=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n+1})$ в виде $\lambda=(\lambda_1,\ \overline{\lambda})$, где $\overline{\lambda}$ есть n-мерный вектор. Зафиксируем λ_1 и рассмотрим функцию

$$W_m(t,\ x(t,\ t_0,\ \lambda_1,\ \overline{\lambda}))\ .$$

В силу предложения существует такое $m_1=m_1(\lambda_1)$, что

$$W_{m_1}(t,\ x(t,\ t_0,\ \lambda_1,\ \overline{\lambda}))=0 \quad \forall (t,\ \overline{\lambda})\in J_0\times E_n.$$

Пользуясь этим фактом, точно так же, как и в первом пункте доказательства, докажем утверждение и тем самым теорему 2.

Следствия: *1. Пусть i-ая компонента каждого частного решения системы (1) представляет собой многочлен по t. Тогда существует m такое, что степень всех этих многочленов не превосходит m.*

Оно следует из теоремы 2 при $\varphi_0\equiv x_i$, $\varphi_k\equiv t^{k-1}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$.

2. Пусть i-ая компонента каждого частного решения системы (1) вложима [2], т. е. является решением некоторого линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Тогда i-ая компонента системы (1) также вложима.

Это следует из теоремы 2 при

$$\varphi_0\equiv x_i,\ \varphi_{k+1}\equiv \frac{\partial\varphi_k}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}f_j.$$

3. Пусть все траектории системы

$$\dot{x}=P(x,\ y),\quad \dot{y}=Q(x,\ y) \tag{4}$$

с голоморфной правой частью представляют собой алгебраические кривые (части этих кривых). Тогда существует натуральное m такое, что порядок каждой траектории системы (4) не превосходит этого m.

Здесь

$$\varphi_0\equiv 1,\ \varphi_1\equiv x,\ \varphi_2\equiv y,\ \varphi_3\equiv x^2,\ \varphi_4\equiv xy,\ \varphi_5\equiv y^2,\ \ldots$$

Теорема 3. *Пусть нам задана система*

$$\dot{x}=f(x),\ x=(x_1,\ \ldots,\ x_n), \tag{5}$$

с голоморфной в области D вектор-функцией $f(x)$ и последовательность голоморфных в той же области функций $\varphi_i(x)$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Пусть также нам заданы множества $A_j\subset R^1$ $(j=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, каждое из которых содержит предельную точку.

Тогда если каждое решение $x(t,\ t_0,\ a)$ системы (5), проходящее через точку $a\in A_1\times A_2\times\ \ldots\ \times A_n$ при $t=t_0$, является φ-решением порядка не выше m, то все решения системы (5) являются φ-решениями порядка не выше m.

Доказательство основано на теореме 1 и лемме 1 из [2].

Таким образом, если все решения системы (5) являются φ-решениями порядка не выше m и существует хотя бы одно решение порядка m, то почти все решения этой системы являются φ-решениями порядка m.

Пусть $P_i(x)$ $(i=1,\ \ldots,\ n-1)$ —многочлены от $x_1,\ \ldots,\ x_n$, ни один из которых не выражается через остальные. Кривую

$$K=\{x\mid P_i(x)=0\quad (i=1,\ \ldots,\ n-1)\}\subset R^n$$

назовем алгебраической кривой.

Теорема 4. *Для того чтобы все траектории системы (5) с голоморфной правой частью представляли собой алгебраические кривые (части этих кривых), необходимо и достаточно выполнения тождеств*

$$\left| 1,\ x_i,\ x_j,\ x_i^2,\ x_i x_j,\ x_j^2,\ \ldots,\ x_j^m \right| \overset{x}{\equiv} 0$$

для любых $i,\ j=1,\ \ldots,\ n$ *и некоторого* m.

Необходимость. Используя понятие результанта, уравнение кривой K можно записать в виде

$$P_1(x_i,\ x_j)=0,\quad P_i(x)=0\quad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n-1).$$

Поэтому каждое решение рассматриваемой системы удовлетворяет некоторому соотношению вида $P(x_i,\ x_j)=0$. Тогда на основании теоремы 2 существует m, для которого выполняется тождество

$$\left|1,\ x_i,\ x_j,\ \ldots,\ x_j^m\right| \overset{x}{\equiv} 0.$$

Достаточность следует из теоремы 1.

Литература

1. Мироненко В. И. Дифференц. уравнения, 8, № 12, 1972.
2. Мироненко В. И. Вестник БГУ, серия 1, № 3, 1971.

Поступила в редакцию
15 ноября 1972 г.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина