Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. И. Мироненко, Об отражающей функции уравнения Хилла, *Дифференц. уравнения*, 1988, том 24, номер 12, 2098–2104

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 37.17.74.99
3 марта 2022 г., 13:11:45

систему (1) с матрицей $A(t)$ класса $\mathscr{D}$. В силу того что последовательность $\{\delta_k\}$ удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k t_k^{-1}=\lim\limits_{k\to\infty}(2t_k\min\limits_{i<k}|\mu_i|)^{-1}=0$, а остальные последовательности (кроме $\{\omega_k\}$) постоянны, полученная система при всяком $\mu\in R\setminus\{0\}$ будет системой класса $\mathscr{D}_0$.

Пусть $\mu\notin\bar{M}\cup\{0\}$. Тогда при некотором $\varepsilon>0$ и при всех $i\in N$ должно выполняться неравенство $|\mu/\mu_i-1|\geqslant\varepsilon$, из которого в силу включения $(2l+1)\mu_i\in M$ вытекает оценка $|\mu/\mu_i-(2l+1)|=|\mu-(2l+1)\mu_i|/|\mu_i|\geqslant\geqslant|2l+1|\varepsilon$, доказывающая отделенность отношения μ/μ_i от чисел вида $(2l+1)$, $l\in Z$, а значит, и отделенность величины $|\cos\pi\mu/2\mu_k|$ от нуля. В силу леммы 6 в этом случае выполнено условие (9) и система правильна.

Пусть теперь $\mu\in\bar{M}\setminus M$, $\mu\neq0$. Тогда при больших k выполняется неравенство $|\cos\pi\mu/2\mu_k|\geqslant r_k$, и по построению последовательности $\{t_k\}$ имеем равенство $\sigma_{\text{Л}}(\mu)=0$.

Если же $\mu\in M$, то по выбору нумерации множества M существует бесконечная подпоследовательность $k(j)$, $j\in N$, на которой выполняются равенства $\mu_{k(j)}=\mu$, $\omega_{k(j)}\delta_{k(j)}=\pi/2\mu$, и в силу леммы 7 система является неправильной.

Для доказательства второго утверждения теоремы положим $r_k\equiv\equiv\min\limits_{i<k}|\cos\pi/2\mu_i|$. Так как $\mu_i\neq(2l+1)^{-1}$ при всех $i\in N$, $l\in Z$, то $r_k\neq0$ при любом k. Строя по последовательности $\{r_k\}$ систему (μ) в точности так же, как и в предыдущем случае, получаем, что она неправильна при всех $\mu\in M$, а при $\mu=1$ имеем неравенство $|\cos\pi/2\mu_i|\geqslant r_k$, гарантирующее в силу леммы 6 правильность системы (1).

Система (0) во всех случаях, очевидно, правильна. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Ляпунов А. М. Собр. соч: В 6 т. М.; Л., 1956. Т. 2.
2. Миллионщиков В. М. // Мат. сб. 1968. Т. 77, № 2. С. 163—173.
3. Оселедец В. И. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1968. Т. 19. С. 179—210.
4. Миллионщиков В. М. // Мат. сб. 1969. Т. 78, № 2. С. 179—201.
5. Сурин Т. Л. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных систем при специальных возмущениях: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1984.
6. Изобов Н. А., Макаров Е. К. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 11. С. 1870—1880.
7. Миллионщиков В. М. // Мат. заметки. 1968. Т. 4, вып. 2. С. 173—180.
8. Миллионщиков В. М. // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 1. С. 99—104.
9. Изобов Н. А. // Итоги науки и техники. Мат. анализ. М., 1974. Т. 12. С. 71—146.
10. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.
11. Изобов Н. А. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 784—795.
12. Изобов Н. А. // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 4. С. 469—477.
13. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., 1967.
14. Келли Дж. Общая топология. М., 1981.

Институт математики АН БССР

Поступила в редакцию 15 июня 1987 г.

УДК 517.923

В. И. МИРОНЕНКО

ОБ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ УРАВНЕНИЯ ХИЛЛА

В работе [1] для системы $\dot{x}=X(t, x)$, $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^n$, решения $\varphi(t;\tau, x)$ которой однозначно определяются своими начальными данными, введено понятие отражающей функции. Отражающей функцией системы (1) можно назвать функцию F: $(t, x)\to F(t, x)\in\mathbb{R}^n$, которая по состоянию

$x(t):=\varphi(t;\ \tau,\ x)$ позволяет найти состояние $x(-t)=\varphi(-t;\ \tau,\ x)$ по формуле $x(-t)\equiv F(t,\ x(t))$. Формально эту функцию можно определить формулой $F(t,\ x):=\varphi(-t;\ t,\ x)$. Зная функцию $F(t,\ x)$, можно построить целый класс систем, для которых эта функция будет отражающей. Если правая часть системы (1) 2ω-периодична по t, то $F(-\omega,\ x)=\varphi(\omega;\ -\omega,\ x)$ является отображением Пуанкаре (отображением за период) для рассматриваемой системы. Это обстоятельство иногда позволяет найти отображение Пуанкаре для неинтегрируемых в квадратурах систем. Можно показать, что для всякой удовлетворяющей условиям теоремы существования и единственности системы вида

$$\dot{x}=-\frac{1}{2}F_x^{-1}F_t=:Y(t,\ x),$$

где F — вектор-функция, для которой $F(-t,\ F(t,\ x))\equiv x$, отображение Пуанкаре $T(x):=\varphi(\omega;\ -\omega,\ x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x)\,Y(\omega,\ x)\equiv Y(\omega,\ T(x)).$$

В частности, отображение Пуанкаре всякой стационарной системы $\dot{x}=Y(x)$ за произвольный период 2ω удовлетворяет условию $\dfrac{\partial T}{\partial x}(x)\,Y(x)\equiv Y(T(x))$.

Можно надеяться, что изучение свойств отражающей функции позволит выявить новые свойства многомерных дифференциальных систем, провести классификацию периодических систем, научиться строить нелинейные системы по заданному отображению Пуанкаре.

В настоящей работе предпринята попытка исследования с помощью отражающей функции хорошо изученного (см. [2, 3]) уравнения Хилла.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=p(t)x, \tag{1}$$

эквивалентную уравнению Хилла $\ddot{x}=p(t)x$ с 2ω-периодической и непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией $p(t)$. Отражающая функция этой, как и всякой другой линейной системы, согласно [1, с. 30], является линейной функцией. Пусть эта функция задается формулами

$$F(t,\ x,\ y)=\begin{pmatrix} F_1(t,\ x,\ y) \\ F_2(t,\ x,\ y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m(t)x+s(t)y \\ r(t)x+n(t)y\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тогда отображение T за период для системы (1) может быть найдено по формуле (см. [1, с. 12])

$$T(x,\ y)=\begin{pmatrix} m(-\omega)x+s(-\omega)y \\ r(-\omega)x+n(-\omega)y\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Из основного соотношения для отражающей функции [1, с. 11] следует, что функция (2) является отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$\begin{gathered}\dot{m}+sp(t)+r=0,\quad \dot{s}+m+n=0,\\ \dot{r}+mp(-t)+np(t)=0,\quad \dot{n}+sp(-t)+r=0;\end{gathered} \tag{4}$$

$$m(0)=n(0)=1,\quad r(0)=s(0)=0. \tag{5}$$

Эти соотношения позволяют доказать нечетность функций $r(t)$, $s(t)$ и тождество $n(t)\equiv m(-t)$.

Как известно [1, с. 11], для отражающей функции выполняются тождества $F_1(-t,\ F_1(t,\ x,\ y),\ F_2(t,\ x,\ y))\equiv x$, $F_2(-t,\ F_1(t,\ x,\ y),\ F_2(t,\ x,\ y))\equiv y$, из которых следует, что

$$F(t,\ x,\ y)=\begin{pmatrix}F_1(t,\ x,\ y)\\ F_2(t,\ x,\ y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m(t)\,x+s(t)\,y\\ \dfrac{m(t)\,m(-t)-1}{s(t)}\,x+m(-t)\,y\end{pmatrix}, \qquad (6)$$

где $s(t)$ — дифференцируемая нечетная функция, $m(0)=1$, а функция $(m(t)m(-t)-1)/s(t)$ во всех точках оси t доопределяется до некоторой дифференцируемой функции $r(t)$.

Представим теперь функции $p(t)$ и $m(t)$ в виде $p(t)=p_ч(t)+p_н(t)$, $m(t)=m_ч(t)+m_н(t)$, где $p_ч$, $m_ч$ — четные, а $p_н$, $m_н$ — нечетные функции. Такое представление, как известно, единственно. Тогда из соотношений (4), приравнивая в них отдельно четные и нечетные части, получим тождества

$$\dot m_ч+sp_ч+\frac{m_ч^2-m_н^2-1}{s}=0, \quad \dot m_н+sp_н=0, \quad \dot s+2m_ч=0. \qquad (7)$$

Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Утверждение. *Отражающая функция системы (1) имеет вид (6), где дифференцируемые функции $m(t)$, $s(t)$, из которых $s(t)$ нечетная, удовлетворяют соотношениям (7), а также условиям $m_ч(0)=m(0)=1$, $m_н(0)=s(0)=0$, $\dot s(0)=-2$.*

Доказательство этого утверждения можно провести и непосредственно проверив выполнение основного соотношения для отражающей функции [1, с. 11].

Теорема 1. *Пусть $s(t)$ есть нечетная функция, для которой $\dot s(0)=-2$ и*

$$s^2p_ч(t)\equiv\frac{s\ddot s}{2}-\frac{\dot s^2}{4}+1+\left[\int\limits_0^t p_н(\tau)s(\tau)\,d\tau\right]^2. \qquad (8)$$

Тогда отражающая функция системы (1) имеет вид (6), где

$$m(t)=-\frac{\dot s(t)}{2}-\int\limits_0^t p_н(\tau)s(\tau)\,d\tau.$$

Доказательство. Функции $m_ч(t)=-\dfrac{\dot s(t)}{2}$, $m_н(t)=-\int\limits_0^t p_н(\tau)s(\tau)\,d\tau$ и $s(t)$ при указанных условиях являются решениями системы (7).

Из теоремы 1 следует, что, задавая нечетную функцию $s(t)$, $\dot s(0)=-2$, произвольным образом, мы тем самым задаем соотношение (8), связывающее нечетную $p_н(t)$ и четную $p_ч(t)$ части функции $p(t)$, при котором отражающая функция, а значит, и отображение за период для системы (1) известны.

Замечание 1. Если функция $p(t)$ дважды дифференцируема, то, как следует из системы (7) или уравнения (8), функция $s(t)$ обязана удовлетворять также и линейному уравнению

$$\begin{gathered}p_нs^{(4)}-\dot p_нs^{(3)}-4p_чp_н\ddot s+(4\dot p_нp_ч-6p_н\dot p_ч)\dot s+\\+(2\dot p_н\dot p_ч-2p_н\ddot p_ч+4p_н^3)s\equiv0.\end{gathered} \qquad (9)$$

Если при этом $p_н(t)\equiv0$, то уравнение (9) можно заменить уравнением $s^{(3)}=2\dot p_чs+4p_ч\dot s$.

Замечание 2. Пусть для непрерывной 2ω-периодической функции $p(t)$ функция $s(t)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1, есть также 2ω-периодическая. Тогда все решения системы (1) будут 4ω-периодическими.

Доказательство. Так как $s(t)$ есть 2ω-периодическая, то из последнего уравнения в системе (7) следует 2ω-периодичность функции $m_ч(t)$. Тогда из первого соотношения в (7) следует 2ω-периодичность $m_н(t)$. Это значит, что отражающая функция F системы (1) 2ω-периодична. Поэтому отображение за период 4ω $F(-2\omega, x, y) \equiv F(0, x, y) \equiv (x, y)^т$ является тождественным.

Как следует из [1, с. 13], 2ω-периодичность всех решений системы влечет за собой 2ω-периодичность ее отражающей функции.

Рассмотрим теперь наряду с системой (1) систему

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=q(t)x. \tag{10}$$

Отражающая функция этой системы имеет тот же вид (5), но с другими функциями $m(t)$ и $s(t)$, которые обозначим через $n(t)$ и $s_0(t)$ соответственно. Начальные данные 2ω-периодических решений 2ω-периодической системы (1), как известно [1, с. 12], находятся из системы

$$\begin{gathered}(m(-\omega)-1)x+s(-\omega)y=0,\\ \frac{m(\omega)m(-\omega)-1}{s(-\omega)}x+(m(\omega)-1)y=0.\end{gathered} \tag{11}$$

Определитель этой системы $\Delta_1(\omega)=2(1-m_ч(\omega))$. Начальные данные 2ω-периодических решений системы (10) находятся из системы, аналогичной (11), определитель которой $\Delta_0(\omega)=2(1-n_ч(\omega))$.

Введем теперь в рассмотрение функции

$$\Delta_1(t)\equiv 2(1-m_ч(t)), \quad \Delta_0(t)\equiv 2(1-n_ч(t)). \tag{12}$$

Эти функции совпадают друг с другом тогда и только тогда, когда $n_ч(t)\equiv \equiv m_ч(t)$, и, как следует из уравнений (7) и аналогичных уравнений для системы (10), тогда и только тогда, когда $s_0(t)\equiv s(t)$.

Из приведенных рассуждений следует, что если $s_0(t)\equiv s(t)$, то системы (1) и (10) имеют одновременно либо одно, либо бесконечно много 2ω-периодических решений.

Теорема 2. *Для того чтобы у систем (1), (10) совпадали функции $s_0(t)$ и $s(t)$, необходимо, чтобы линейные уравнения* $p_н s^{(4)}-\dot{p}_н s^{(3)}-4p_ч p_н \ddot{s}+(4p_ч\dot{p}_н-6\dot{p}_ч p_н)\dot{s}+(2\dot{p}_ч\dot{p}_н-2\ddot{p}_ч p_н+4p_н^3)s=0$, $q_н s^{(4)}-\dot{q}_н s^{(3)}-4q_ч q_н\ddot{s}+(4q_ч\dot{q}_н-6\dot{q}_ч q_н)\dot{s}+(2\dot{q}_ч\dot{q}_н-2\ddot{q}_ч q_н+4q_н^3)s=0$ *имели общее нечетное решение* $s(t)$, $\dot{s}(0)=-2$.

Доказательство следует из замечания 1.

Потребовав, чтобы функции $p(t)$ и $q(t)$ были достаточное число раз дифференцируемы, всегда можно убедиться в том, выполнены условия теоремы 2 или нет. При этом, однако, нужно будет проделать достаточно громоздкие вычисления. Поэтому укажем два случая, когда этих вычислений можно избежать. Пусть, к примеру, нас интересует вопрос, когда функция $s(t)$ для системы (1) совпадает с соответствующей функцией $s_0(t)$ для стационарной системы (10) с $q(t)\equiv-\alpha^2$. В этом случае система (10) интегрируется и поэтому функция $s_0(t)=\frac{-1}{\alpha}\sin 2\alpha t$ для нее может быть найдена непосредственно по определению отражающей функции. Тогда, воспользовавшись теоремой 1, докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha=\sqrt{-p(0)}$ *и*

$$(p_ч(t)+\alpha^2)\sin^2 2\alpha t \equiv \left[\int_0^t p_н(\tau)\sin 2\alpha\tau d\tau\right]^2.$$

Тогда отражающая функция системы (1) имеет вид (6), где

$$s(t)=\frac{-1}{\alpha}\sin 2\alpha t,\ \ m(t)=\cos 2\alpha t+\frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t \sin(2\alpha\tau)\,p_{\text{н}}(\tau)\,d\tau,$$

а отображение за период (в случае 2ω-периодической $p(t)$) будет вычисляться по формуле (3).

Доказательство. Положим в теореме 1 $s(t)=\frac{-1}{\alpha}\sin 2\alpha t$.

Пример 1. Рассмотрим систему (1) с $p(t)\equiv a^2\sin^4 2t+3a\sin 4t-1$, где a — отличная от нуля постоянная. Это периодическая система с периодом $2\omega=\pi/2$. Для нее $\alpha=\sqrt{-p(0)}=1$, $p_{\text{ч}}(t)=a^2\sin^4 2t-1$, $p_{\text{н}}(t)=3a\sin 4t$ и выполняются условия (8). Поэтому, согласно теореме 3, отражающая функция рассматриваемой системы

$$F(t,x,y)=\begin{pmatrix}(\cos 2t+a\sin^3 2t)x-y\sin 2t\\ (a^2\sin^5 2t+\sin 2t)x+(\cos 2t-a\sin^3 2t)y\end{pmatrix}.$$

Отображение за период $2\omega=\pi/2$ задается формулами

$$T(x,y)=F(-\pi/4,x,y)=\begin{pmatrix}ax-y\\ (a^2+1)x-y\end{pmatrix}.$$

Поэтому рассматриваемая система других, кроме нулевого, $\pi/2$-периодических решений не имеет. Эту систему можно рассматривать как 2π-периодическую. Тогда отображение за период $F(-\pi,x,y)$ есть тождественное. Поэтому все решения рассматриваемой системы 2π-периодические. Заметим, что эту систему можно рассматривать и как π-периодическую. Однако она не имеет других, кроме нулевого, π-периодических решений.

Пример 2. Условиям теоремы 3 удовлетворяет, в частности, система (1) с

$$p(t)=-\frac{\beta^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}a_k\sin^{2k-1}\beta t\cos\beta t+$$

$$+\frac{1}{\beta^2}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2k+1}\sin^{2k+1}\beta t\right]^2,\quad \beta=2\alpha.$$

Замечание 3. Для справедливости доказанных теорем, до тех пор пока не идет в них речь о периодических решениях, нет необходимости требовать периодичность функции $p(t)$. Поэтому для вычисления отображения за период периодической системы (1) можно использовать непериодические системы (10) с тем же самым $s(t)$ или с $s_0(t)$, известным образом связанным с $s(t)$. Так, например, система из примера 1 и система с $q(t)=t^2\sin^2 2t+\sin 2t-4t\cos 2t-1$ имеют одну и ту же $s(t)$.

Теорема 4. *Пусть для некоторой постоянной λ выполнено тождество $q_{\text{н}}(t)\equiv\lambda p_{\text{н}}(t)$, а из соотношения*

$$\sqrt{p_{\text{ч}}-q_{\text{ч}}}\,\frac{ds}{dt}=-\left[\frac{d}{dt}\sqrt{p_{\text{ч}}-q_{\text{ч}}}+\sqrt{1-\lambda^2}\,p_{\text{н}}\right]s$$

определяется нечетная функция $s(t)$, $\dot s(0)=-2$, удовлетворяющая соотношению (8). Тогда эта функция будет определять отражающие функции систем (1), (10).

Для доказательства достаточно проверить, что для функции $s(t)$ удовлетворяется не только (8), но и аналогичное ему соотношение для системы (10).

Соответствующий иллюстративный пример можно привести, взяв в примере 1 для $p(t)$ $a=1$, а для $q(t)$ $a=\lambda$.

Т е о р е м а 5. *Пусть для системы (1) с четной $p(t)$ известна $s(t)$ и для некоторой нечетной трижды дифференцируемой функции $a(t)$ с необращающейся в нуль производной $\dot{a}(t)$ выполнено тождество*

$$4q\equiv 4p(a)\dot{a}^2+\frac{3\ddot{a}^2-2\dot{a}a^{(3)}}{\dot{a}^2}. \tag{13}$$

Тогда для системы (10) $s_0(t)\equiv s(a(t))/\dot{a}(t)$.

Тождество (13) можно записать в виде $4q\equiv 4p(a)\dot{a}^2+\varphi^2-2\dot{\varphi}$. При этом $\dot{a}=\exp\int\limits_0^t\varphi(\tau)\,d\tau$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из тождества (13) следует четность функции $q(t)$. Поэтому соотношение, аналогичное (8), но записанное для системы (10), имеет вид $4qs_0^2=2s_0\ddot{s}_0-\dot{s}_0^2+4$. Подставляя сюда $s_0=s(a)/\dot{a}$, получаем тождество (13). Это значит, что $s_0(t)$ является решением указанного соотношения. Ссылка на теорему 1 завершает доказательство.

С л е д с т в и е. *Пусть для систем (1), (10) с четными $p(t)$ и $q(t)$ при некоторой постоянной a выполнено тождество*

$$4q(t)\equiv 4(a+\cos t)^2p(at+\sin t)+\frac{2+\sin^2 t+2a\cos t}{(a+\cos t)^2}.$$

Тогда $s_0(t)=s(at+\sin t)/(a+\cos t)$.

Для доказательства в теореме 5 достаточно положить $a(t)=at+\sin t$.

Возьмем теперь $p(t)\equiv-\alpha^2$. Тогда для системы (1) $s(t)=\frac{-1}{\alpha}\sin 2\alpha t$, а соотношение (13) принимает вид

$$4q(t)\equiv-4\alpha^2(a+\cos t)^2+\frac{2+\sin^2 t+2a\cos t}{(a+\cos t)^2}.$$

Теорема 5 позволяет для 2ω-периодических систем (1), (10) по известным отображению за период для системы (1) и функции $a(t)$ построить отображение за период системы (10). При этом если отображение за период для системы (1) имеет вид $T_1(x,y)=[m(\omega)x-s(\omega)y;\ m(\omega)y-r(\omega)x]^{\mathrm{T}}$, то отображение за период для системы (10) имеет вид

$$T_2(x,y)=\Bigg[nx-\frac{s(a)}{\dot{a}}y;$$
$$\left(-\dot{a}r(a)+\frac{m(a)\ddot{a}}{\dot{a}}+\frac{\ddot{a}^2s(a)}{4\dot{a}^3}\right)x+ny\Bigg]^{\mathrm{T}}_{t=\omega},$$

где $n=\ddot{a}s(a)/2\dot{a}^2-s'(a)/2$.

Пользуясь этим обстоятельством, можно доказать, например, следующее утверждение.

Т е о р е м а 6. *Пусть для систем (1), (10) с четными и непрерывными 2ω-периодическими функциями $p(t)$ и $q(t)$ выполнено тождество (13), в котором $a(t)$ есть нечетная трижды дифференцируемая функция с отличной от нуля на $[-\omega;\ \omega]$ производной и $\dot{a}(\omega)=1$, а $a(\omega)/\omega$ есть целое число. Тогда если все решения системы (1) 2ω-периодичны, то все решения системы (10) также 2ω-периодичны.*

В качестве примера рассмотрим систему (10) с

$$q(t)=\delta(a+\cos t)^2+\frac{2+\sin^2 t+2a\cos t}{4(a+\cos t)^2}$$

и постоянными a и δ, из которых $|a|>1$. Здесь $a(t)=at+\sin t$, $p(t)\equiv\delta$. Для рассматриваемой системы (10) могут представиться несколько случаев. Если $\delta=\alpha^2>0$, то решения системы (1), отличные от нулевого, будут апериодичны. В этом случае $s(t)=(e^{-2\alpha t}-e^{2\alpha t})/2\alpha$, $m(t)=(e^{-2\alpha t}+e^{2\alpha t})/2$. Вычисляя отображение за период 2π для рассматриваемой системы, убеждаемся в том, что и у рассматриваемой системы нет других периодических решений, кроме нулевого.

При $\delta=0$ получим $s(t)\equiv-2t$, $m(t)\equiv 1$. Поэтому отображение за период 2π у рассматриваемой системы имеет вид $T(x, y)=(x+\pi a y;\ y)^{\mathrm{T}}$. Отсюда следует, что все решения рассматриваемой системы, начинающиеся при $t=-\omega$ в точках вида $(x_0, 0)$, будут 2π-периодическими.

При $\delta=-\alpha^2<0$ имеем $s(t)=\dfrac{-1}{\alpha}\sin 2\alpha t$, $m(t)=\cos 2\alpha t$. Поэтому отображение за период

$$T(x, y)=\begin{pmatrix} x\cos(2\pi a\alpha)-y\,\dfrac{\sin(2\pi a\alpha)}{\alpha(a-1)} \\ x\alpha(1-a)\sin(2\pi a\alpha)+y\cos(2\pi a\alpha)\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что все решения рассматриваемой системы будут 2π-периодическими тогда и только тогда, когда $2\alpha\beta$ является целым числом. Если $2\alpha\beta$ является рациональным числом, несократимой дробью со знаменателем k, то, рассматривая данную систему как $2k\pi$-периодическую, докажем, что все решения рассматриваемой системы будут $2k\pi$-периодическими. В том случае, когда $2\alpha\beta$ является иррациональным числом, все решения рассматриваемой системы, кроме нулевого, будут апериодичны, но ограничены.

Примером использования полученных результатов может служить также следующая

Теорема 7. *Пусть для периодической непрерывной функции $p(t)$ можно найти такое число α, при котором функция* $k(t)\equiv\dfrac{1}{\sin 2\alpha t}\int\limits_0^t p_{\text{н}}(\tau)\sin 2\alpha\tau\, d\tau$ *доопределяется до непрерывной периодической функции, и пусть, кроме этого, при всех t выполняется неравенство $p_{\text{ч}}(t)\leqslant\alpha^2[k^2(t)-1]$, а функция $p(t)$ имеет период $2\pi/\alpha$. Тогда все решения уравнения $\ddot{x}=p(t)x$ колеблющиеся и расстояние между двумя последовательными нулями любого решения этого уравнения не превосходит π/α. Если же $p_{\text{ч}}(t)>\alpha^2[k^2(t)-1]$, то это расстояние больше π/α.*

Эта теорема следует из теоремы 3 и широко известной теоремы сравнения Штурма.

Литература

1. Мироненко В. И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.
2. Еругин Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск, 1963.
3. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972.

Гомельский государственный университет

Поступила в редакцию 21 марта 1988 г.