В. И. Мироненко, Классы систем с совпадающими отражающими функциями, *Дифференц. уравнения*, 1984, том 20, номер 12, 2173–2176

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и функции* $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y) \in C(\overline{D})$, *тогда задача (1*), (2) имеет полную систему корневых векторов в* W_T.

Литература

1. Пономарев С. М.— Докл. АН СССР, 1977, т. 235, № 5, с. 1020—1021.
2. Пономарев С. М.— Докл. АН СССР, 1978, т. 238, № 6, с. 1299—1302.
3. Моисеев Е. И.— Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 5, с. 1012—1014.
4. Кальменов Т. Ш.— Дифференц. уравнения, 1979, т. 15, № 2, с. 354—356.
5. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.— Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.—448 с.
6. Келдыш М. В.— Докл. АН СССР, 1951, т. 77, № 1, с. 11—14.
7. Параска В. И.— Мат. сб., 1965, т. 68 (110), № 4, с. 623—631.

Туркменский государственный университет им. А. М. Горького

Поступила в редакцию 19 января 1982 г.

УДК 517.925.52

В. И. МИРОНЕНКО

КЛАССЫ СИСТЕМ С СОВПАДАЮЩИМИ ОТРАЖАЮЩИМИ ФУНКЦИЯМИ

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t, x), \ x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n, \ t \in \mathbf{R}^n. \tag{1}$$

Будем считать, что каждое ее решение однозначно определяется своими начальными данными t_0, x. Это решение будем считать продолжительным и обозначать через $\varphi(t; t_0, x)$, $t \in I_x$, где I_x означает интервал существования рассматриваемого решения. Пусть

$$\overline{I}_x = \{t : -t \in I_x\}, \ D = \{(t, x) : x \in \mathbf{R}^n, \ t \in I_x \cap \overline{I}_x\}.$$

Функцию

$$F(t, x) = \varphi(-t; t, x), \ (t, x) \in D, \tag{2}$$

будем называть отражающей функцией системы (1). Легко проверяются (см. [1, 2]) следующие свойства отражающей функции:

1) для любого решения $x(t)$ системы (1) верно тождество $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$;

2) дифференцируемая функция $F : D \to \mathbf{R}^n$ будет отражающей функцией системы (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнению

$$F_t + F_x X(t, x) + X(-t, F) = 0 \tag{3}$$

и начальному условию $F(0, x) \equiv x$;

3) для любой отражающей функции $F(t, x)$ выполнены тождества

$$F(-t, F(t, x)) \equiv F(0, x) \equiv x. \tag{4}$$

Знание отражающей функции 2ω-периодической системы вида (1) позволяет определить отображение за период $\varphi(\omega; -\omega, x) \equiv F(-\omega, x)$ этой системы и, значит, найти начальные данные периодических решений и исследовать эти решения на устойчивость. В связи с этим возникает вопрос. Может ли неинтегрируемая в квадратурах система иметь в качестве своей отражающей функции элементарную функцию? Ответ на этот вопрос положителен. Как нетрудно проверить с помощью второго свойства отражающей функции, отражающая функция любой системы (1) с нечетной по t правой частью задается формулой $F(t, x) \equiv x$ (область D при этом зависит от системы). Отражающая функция неинтегрируемого в квадратурах уравнения $\dot{x} = (x^2 + \cos t) \sin t$ задается, в частности, формулой $F(t, x) \equiv x$.

Лемма. *Для всякой непрерывно дифференцируемой функции $F : D \to \mathbf{R}^n$, определенной в области $D \subset \mathbf{R}^{1+n}$, содержащей гиперплоскость $t = 0$ и удовлетворяющей тождеством (4), при достаточно малых $|t|$ существует дифференциальная система*

$$\dot{x} = -[F_x + E]^{-1} F_t, \tag{5}$$

отражающая функция которой совпадает с $F(t, x)$. (Здесь и далее E означает единичную матрицу $n \times n$.)

Доказательство. Дифференцируя тождество $F(-t, F(t, x)) \equiv x$ по t и по x, получим тождества

$$-F_t(-t, F) + F_x(-t, F) F_t \equiv 0, \ F_x(-t, F) \cdot F_x = E.$$

Из этих тождеств и непрерывности F_x следует невырожденность матрицы F_x+E и, значит, существование системы (5). Кроме того, из них следуют тождества

$$F_x(-t,\ F) \equiv F_x^{-1}, \tag{6}$$

$$F_t(-t,\ F) \equiv F_x^{-1}F_t. \tag{7}$$

Покажем теперь что для системы (5) выполняется соотношение (3). Действительно, используя тождества (6) и (7), получим соотношения

$$F_t + F_xX(t,\ x) + X(-t,\ F) = F_t - F_x[F_x + E]^{-1}F_t -$$

$$-[F_x(-t,\ F) + E]^{-1}F_t(-t,\ F) = F_t - F_x(F_x+E)^{-1}F_t -$$

$$-(F_x^{-1}+E)^{-1}F_x^{-1}F_t = F_t - F_x[F_x+E]^{-1}F_t - [F_x+E]^{-1}F_t = 0.$$

Тогда по второму свойству отражающей функции $F(t,\ x)$ есть отражающая функция системы (5). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\Phi: D\to\mathbf{R}^n$ есть отражающая функция системы (1), а для непрерывно дифференцируемой функции $F: G\to\mathbf{R}^n$ (G означает область в $\mathbf{R}^{1+n}$, содержащую гиперплоскость $t=0$) выполнены тождества (4). Тогда, для того чтобы в области $D\cap G$ функция Φ совпадала с F, необходимо и достаточно существования функции $R: D\cap G\to\mathbf{R}^n$, для которой*

$$-(F_x+E)^{-1}F_t + F_x^{-1}R(t,\ x) - R(-t,\ F(t,\ x)) \equiv X(t,\ x). \tag{8}$$

Необходимость. Пусть F и Φ совпадают в области $D\cap G$. Положим $R(t,\ x) = 1/2\,F_x(F_x+E)^{-1}[X(t,\ x) - X(-t,\ F(t,\ x))]$.

Тогда, используя тождества (3), (6) и (7), получим тождества $-(F_x+E)^{-1}F_t + F_x^{-1}R(t,\ x) - R(-t,\ F) \equiv -(F_x+E)^{-1}F_t + 1/2(F_x+E)^{-1}[X(t,\ x) - X(-t,\ F)] - 1/2F_x^{-1}(F_x^{-1}+E)^{-1}[X(-t,\ F) - X(t,\ x)] \equiv (F_x+E)^{-1}[F_xX(t,\ x) + X(-t,\ F)] + (F_x+E)^{-1}[X(t,\ x) - X(-t,\ F)] \equiv X(t,\ x)$, доказывающие необходимость.

Достаточность. Пусть $X(t,\ x)$ определяется формулой (8) а $R: D\cap G\to\mathbf{R}^n$ есть произвольная функция, при которой решения системы (1) однозначно определяются своими начальными условиями. Тогда, в чем можно убедиться подстановкой, выполняются тождества (3). Поэтому $F(t,\ x)$ есть отражающая функция системы вида (1) с правой частью, определяемой формулой (8). Теорема доказана.

Следствие. *Если $\alpha(t)$ — нечетная, а $R(t,\ x)$ — любая непрерывно дифференцируемая функция, то всякая система вида*

$$\dot{x} = R(t,\ x) - R(-t,\ x+\alpha(t)) - \alpha'(t)/2$$

имеет отражающую функцию $F(t,\ x)=x+\alpha(t)$. Если эта система 2ω-периодична, то ее отображение за период $T(x)\equiv x+\alpha(-\omega)$.

Множество систем вида (1), решения которых однозначно определяются своими начальными условиями, назовем классом эквивалентности, если существует функция $F(t,\ x)$, $F: D\to\mathbf{R}^n$, которая в области G совпадает с отражающей функцией $\Phi: G\to\mathbf{R}^n$ любой системы из рассматриваемого множества (G — область определения отражающей функции Φ). Функцию $F: D\to\mathbf{R}^n$ при этом назовем отражающей функцией класса, а две системы, принадлежащие одному классу,— эквивалентными.

Из теоремы (1) следует, что если некоторая система принадлежит классу эквивалентности с отражающей функцией F, то эта система имеет вид

$$\dot{x} = -[F_x+E]^{-1}F_t + F_x^{-1}R(t,\ x) - R(-t,\ F), \tag{9}$$

где $R(t,\ x)$ — произвольная функция, при которой решения системы (9) однозначно определяются начальными условиями. Все системы вида (9) принадлежат одному классу эквивалентности. Класс систем вида (9) с заданной отражающей функцией F можно записать также в виде

$$\dot{x} = (F_x+E)^{-1}[S(t,\ x,\ F) - F_t], \tag{10}$$

где $S(t,\ x,\ y)$ — произвольная функция, для которой $S(-t,\ y,\ x) \equiv S(t,\ x,\ y)$. Для доказательства заметим только, что функции R и S связаны между собой соотношением $2R(t,\ x) \equiv F_x(F_x+E)^{-1}S(t,\ x,\ F)$, а функция S через правую часть $X(t,\ x)$ системы (9) выражается формулой $S(t,\ x,\ y) = X(t,\ x) - X(-t,\ y)$.

Из второго свойства отражающей функции следует, что система (1) и система

$$\dot{y} = Y(t,\ y),\ (t,\ y)\in\mathbf{R}^{1+n}, \tag{11}$$

принадлежат одному классу эквивалентности тогда и только тогда, когда система уравнений

$$F_t + F_xX(t,\ x) + X(-t,\ F) = 0,$$

$$F_t + F_xY(t,\ x) + Y(-t,\ F) = 0,$$

$$F(0,\ x) = x$$

совместна. Условия совместности этой системы можно получить, применяя теорему Фробениуса [3, с. 175].

Если 2ω-периодическая по t система вида (1) принадлежит классу эквивалентности с отражающей функцией $F(t, x)$, то ее отображение за период $T(x) \equiv F(-\omega, x)$.

Пусть системы (1) и (2) принадлежат одному классу эквивалентности и пусть одна из этих систем, скажем система (1), является 2ω-периодической. Тогда если решения $\varphi(t; -\omega, x)$ и $\psi(t; -\omega, x)$ систем (1) и (12) соответственно продолжимы на отрезок $[-\omega, \omega]$, то отображение за период системы (1) $\varphi(\omega; -\omega, x) \equiv F(-\omega, x) \equiv \equiv \psi(\omega, -\omega, x)$, откуда следует

Теорема 2. *Пусть система (1) с 2ω-периодической по t правой частью и система (12) эквивалентны, а их решения существуют при всех $t \in [-\omega, \omega]$. Тогда между периодическими решениями системы (1) и решениями двухточечной задачи $y(-\omega) = y(\omega)$ для системы (12) можно установить взаимно однозначное соответствие.*

Как показано выше, системы, которые можно записать в виде (9) или (10), и только такие системы принадлежат классу эквивалентности, соответствующему отражающей функции $F(t, x)$. Среди этих систем имеется система (5), соответствующая функции $R(t, x) \equiv 0$. Систему (5) будем называть простейшим представителем соответствующего класса эквивалентности.

Отметим некоторые свойства этой системы.

1. Общий интеграл системы (5) имеет вид $F(t, x) + x = C$. Для доказательства достаточно найти производную в силу системы (5) от левой части записанного соотношения.

2. Для каждого решения $x(t)$ системы (5) верно тождество $x(t) + x(-t) \equiv 2x(0)$. Это свойство является следствием первого свойства и первого свойства отражающей функции.

3. Если $X(t, x)$ означает правую часть системы (5), то $X(-t, F(t, x)) \equiv X(t, x)$. Действительно,

$$X(-t, F) \equiv -[F_x(-t, F) + E]^{-1} F_t(-t, F) \equiv -(F_x^{-1} + E)^{-1} F_x^{-1} F_t \equiv X(t, x).$$

Третье свойство позволяет выделить системы вида (5) из всего множества систем. Пусть нам задана произвольная система вида (1). Составим для нее соотношение $X(-t, y) = X(t, x)$. Пусть $y = F(t, x)$ — некоторая дифференцируемая функция, удовлетворяющая этому соотношению, обладающая свойством $F(0, x) \equiv x$ и удовлетворяющая уравнению (3). Тогда система (1) есть система вида (5).

Пример. Для уравнения $\dot{x} = (x^2 \cos t)/[(1 + x \sin t)^2 + 1]$ соотношение $X(-t, y) = X(t, x)$ имеет решение $y = x/(1 + x \sin t)$. Проверка показывает, что эта функция удовлетворяет второму свойству отражающей функции и потому является отражающей функцией рассматриваемого уравнения.

Теорема 3. *Пусть для непрерывно дифференцируемой 2ω-периодической по t функции $X(t, x)$, $X: \mathbf{R}^{1+n} \to \mathbf{R}^n$ выполнено тождество*

$$X(t, x) + X(\omega - t, x) \equiv 0. \tag{12}$$

Тогда все решения системы (1), продолжимые на отрезок $[-\omega, \omega]$, суть 2ω-периодические.

Доказательство. Пусть $F(t, x)$ — отражающая функция системы (1), а $\Phi(t, x) = F(\omega - t, x)$. Тогда, используя соотношения (3), (12) и периодичность функции $X(t, x)$, получим тождества

$$\Phi_t + \Phi_x X(t, x) + X(-t, \Phi) \equiv -F_t(\omega - t, x) - F_x(\omega - t, x) X(\omega - t, x) +$$

$$+ X(-t, \Phi) \equiv X(t - \omega, F(\omega - t, x)) + X(-t, \Phi) \equiv X(\omega + t, \Phi) + X(-t, \Phi) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что функция $\Phi(t, x)$, как и функция $F(t, x)$, является решением уравнения (3). Так как, кроме того,

$$\Phi(\omega/2, x) \equiv F(\omega - \omega/2, x) \equiv F(\omega/2, x),$$

то в силу единственности решения задачи Коши для уравнения (1) $\Phi(t, x) \equiv F(t, x)$, т. е. $F(\omega - t, x) \equiv F(t, x)$. Полагая в этом тождестве $t = 0$, получим $F(\omega, x) \equiv x$, откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие. *Пусть $a_k: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ есть непрерывно дифференцируемые функции, а ряд, стоящий в правой части системы*

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}(x) \cos(2k+1) t + a_{2k}(x) \sin 2k t,$$

сходится к непрерывно дифференцируемой функции $X(t, x)$. Тогда любое продолжимое на $[-\pi, \pi]$ решение этой системы будет 2π-периодическим.

Доказательство состоит в проверке условий теоремы.

Теорема 4. *Пусть система (1) эквивалентна некоторой стационарной системе. Тогда она эквивалентна системе $\dot{x} = X(0, x)$ и эта система единственная стационарная в классе эквивалентности, содержащем систему (1).*

Доказательство. Всякая система из класса эквивалентности, содержащего систему (1), как следует из теоремы 1, может быть записана в виде

$$\dot{x} = X(t, x) + F_x^{-1} R(t, x) - R(-t, F(t, x)) \stackrel{\Delta}{=} Y(t, x).$$

Для стационарной системы, так как $F(0, x) \equiv x$, $Y(t, x) \equiv Y(0, x) \equiv X(0, x)$. Теорема доказана.

Литература

1. Мироненко В. И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений.— Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1981.—104 с.
2. Мироненко В. И.— Дифференц. уравнения, 1982, т. 18, № 6, с. 1099.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных, ч. 1—2.— М.: Наука, 1972.— 624 с.

Гомельский государственный университет

Поступила в редакцию 14 декабря 1982 г.

УДК 517.923

М. Г. МУРАДЯН

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Определение периодических решений матричного уравнения Риккати

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho A(t) + D(t)\rho + \rho B(t)\rho + C(t) = 0, \ t \geqslant 0 \tag{1}$$

с периодическими матриц-коэффициентами A, B, C, D имеет важное значение во многих прикладных задачах [1—5]. Для одного скалярного уравнения Риккати В. И. Мироненко доказал, что начальные данные периодических решений определяются из некоторого квадратного уравнения [5]. В работах [6] и [2] для разных специальных матричных уравнений Риккати показано существование одного периодического решения, начальные данные которого определяются из некоторого матричного квадратного уравнения. В настоящей работе доказывается, что начальное значение любого периодического решения общего матричного уравнения Риккати (1) удовлетворяет некоторому матричному квадратному уравнению, коэффициенты которого можно эффективно вычислить с любой степенью точности.

1°. Пусть матрицы-функции A, B, C, D периодичны с периодом $T=1$ и обладают некоторым запасом гладкости, который обеспечивает однозначную разрешимость встречающихся ниже линейных задач Коши. Пусть $\rho=\rho(t)$ 1-периодическое решение уравнения (1). Определим матрицы-функции $X(t)$ и $Y(t)$ из следующих соотношений, где I — единичная матрица:

$$\frac{dX}{dt} = (A + B\rho)X, \ X(0) = I, \tag{2}$$

$$Y(t) = \rho(t) X(t), \ t \geqslant 0. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться, что $X(t)$, $Y(t)$ удовлетворяют следующей задаче Коши:

$$\frac{dX}{dt} = AX + BY, \ -\frac{dY}{dt} = CX + DY, \tag{4}$$

$$X(0) = I, \ Y(0) = \rho(0) \overset{\text{def}}{=} \rho_0. \tag{5}$$

Пусть $(X^+(t), Y^+(t))$ и $(X^-(t), Y^-(t))$ — решения системы (4) со следующими начальными условиями соответственно:

$$X^+(0) = I, \ Y^+(0) = 0, \tag{6}$$

$$X^-(0) = 0, \ Y^-(0) = I. \tag{7}$$

Справедливы соотношения

$$X(t) = X^+(t) + X^-(t)\rho_0, \ Y(t) = Y^+(t) + Y^-(t)\rho_0,$$

из которых с учетом (3) и равенства $\rho(1)=\rho_0$ следует

Теорема 1. *Если $\rho=\rho(t)$ 1-периодическое решение уравнения Риккати (1), то его начальное значение ρ_0 удовлетворяет следующему матричному квадратному уравнению*

$$\rho_0 X^-(1)\rho_0 + \rho_0 X^+(1) - Y^-(1)\rho_0 - Y^+(1) = 0. \tag{8}$$