В. И. Мироненко, Алгоритм отыскания начальных данных периодических решений уравнения Риккати, *Дифференц. уравнения*, 1981, том 17, номер 9, 1603–1610

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

СЕНТЯБРЬ 1981 г., ТОМ XVII, № 9

*УДК 517.923*

В. И. МИРОНЕНКО

# АЛГОРИТМ ОТЫСКАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Доказана одна общая теорема о начальных данных периодических решений дифференциальных систем. Эта теорема использована для исследования периодических решений уравнения Риккати. Для начальных данных периодических решений уравнения Риккати составлено алгебраическое уравнение второй степени, коэффициенты которого можно вычислять приближенно с любой степенью точности. Из этого алгебраического уравнения следует, в частности, что уравнение Риккати может иметь одно, два, бесконечно много периодических решений или вообще их не иметь.

## § 1. ОДНА ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=X(t, x), \quad x=(x_1, \ldots, x_n)^T. \tag{X}$$

Будем считать, что она задана при всех $t\in\mathbf{R}$ и $x\in\mathbf{R}^n$ и во всем пространстве $\mathbf{R}^{1+n}$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности задачи Коши. Кроме того, будем предполагать, что выполнено условие периодичности

$$X(t+2\pi, x)\equiv X(t, x).$$

Пусть $x(t)$ есть некоторое решение системы $(X)$. Тогда вектор-функция $x(-t)$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}=-X(-t, y). \tag{$\bar{X}$}$$

Система $(\bar{X})$ так же, как и система $(X)$, задана и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности во всем $\mathbf{R}^{1+n}$.

Теорема 1. *Пусть известно решение $F(t, x)$, $F : D\to\mathbf{R}^n$, системы $n$ уравнений в частных производных*

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t, x)=-X(-t, F),$$

*определенное в области $D\subset\mathbf{R}^{1+n}$, содержащей гиперплоскость $t=0$, и удовлетворяющее начальному условию $F(0, x)\equiv x$. Тогда продолжимое на отрезок $[-\pi, \pi]$ решение $x(t)$ системы $(X)$, график которого расположен в области $D$, будет $2\pi$-периодическим в том и только в том случае, когда $\lambda\overset{\Delta}{=}x(\pi)$ является решением следующей недифференциальной системы: $F(\pi, \lambda)=\lambda$.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть функция $F$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, а график продолжимого на отрезок $[-\pi, \pi]$ решения $x(t)$ системы $(X)$ расположен в области $D$. Тогда*

$$F(t, x(t)) \stackrel{t}{\equiv} x(-t), \quad t \in [-\pi, \pi];$$
$$F(-t, F(t, x)) \stackrel{t,x}{\equiv} x, \quad (t, x) \in D.$$

Доказательство леммы. Положим $y(t) \stackrel{\Delta}{=} F(t, x(t))$. Тогда

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t)) X(t, x(t)) \equiv -X(-t, y(t)),$$

т. е. функция $y(t)$ является решением системы $(\bar{X})$ с начальными условиями

$$y(0) = F(0, x(0)) = x(0).$$

Функция $x(-t)$ также является решением системы $(\bar{X})$, причем

$$x(-t)|_{t=0} = x(0) = y(0).$$

Поэтому в силу единственности решения задачи Коши для системы $(\bar{X})$ должно выполняться тождество $y(t) \equiv x(-t)$, т. е. тождество $F(t, x(t)) \equiv x(t)$. Заменим в этом тождестве $t$ на $-t$, получим тождество $F(-t, x(-t)) \equiv x(t)$. Заменив здесь $x(-t)$ на равную величину $F(t, x(t))$, получим тождество

$$F(-t, F(t, x(t))) \stackrel{t}{\equiv} x(t),$$

справедливое для всех решений $x(t)$ системы $(X)$, для которых $(t, x(t)) \in D$. Из этого тождества, учитывая произвольность выбора $x(t)$, получим тождество

$$F(-t, F(t, x)) \stackrel{t,x}{\equiv} x.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть $x(t)$ есть $2\pi$-периодическое решение системы $(X)$. Тогда оно определено при всех $t \in \mathbf{R}$. Поэтому, согласно лемме, при всех $t \in \mathbf{R}$ выполняется тождество $F(t, x(t)) \equiv x(-t)$, из которого при $t = \pi$ получим равенства

$$F(\pi, x(\pi)) = x(-\pi) = x(\pi - 2\pi) = x(\pi).$$

А значит, $F(\pi, x(\pi)) \equiv x(\pi)$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь $F(\pi, \lambda) = \lambda$ и $x(t)$ есть продолжимое на $[-\pi, \pi]$ решение системы $(X)$ с начальными условиями $x(\pi) = \lambda$. Тогда, согласно лемме,

$$x(-\pi) = F(\pi, x(\pi)) = F(\pi, \lambda) = \lambda = x(\pi),$$

т. е. $x(-\pi) = x(\pi)$ и, значит, точка $x(-\pi)$ есть неподвижная точка отображения за период. Поэтому на основании общего принципа ([1, с. 12] или [2, с. 26]) решение $x(t)$ есть $2\pi$-периодическое. Теорема доказана.

Примечание 1. Функция $F$, удовлетворяющая всем условиям теоремы 1 и дополнительному тождеству $F(-t, F(t, x)) \equiv x$, всегда существует. Чтобы убедиться в этом, достаточно положить

$$F(t, x) \stackrel{\Delta}{=} \varphi(-t; 0, \varphi(0; t, x)),$$

где $\varphi(t; 0, x)$ есть решение системы $(X)$, для которого $\varphi(0; 0, x) = x$.

Примечание 2. Как в предыдущих, так и в последующих рассуждениях, значение $t=0$ играет исключительную роль. Замена независимого переменного $t=\tau-\alpha$ делает столь же исключительным значение $t=\alpha$.

## § 2. О ЧИСЛЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Рассмотрим теперь уравнение Риккати

$$\dot{x}=a(t)+b(t)x+c(t)x^2 \tag{1}$$

с $2\pi$-периодическими и дифференцируемыми на $\mathbf{R}$ коэффициентами $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$. Соответствующее уравнение для $x(-t)$ имеет вид

$$\dot{y}=-a(-t)-b(-t)y-c(-t)y^2. \tag{2}$$

Попытаемся определить для уравнений (1), (2) функцию $F(t, x)$, удовлетворяющую условиям теоремы § 1. С этой целью, используя вид общего решения уравнения Риккати, установим структуру функции $F$.

Предположим, что уравнение (1) имеет хотя бы одно продолжимое на $[-\pi, \pi]$ решение. Пусть $\varphi(t)$ — одно из таких решений. Тогда подстановка $x=z+\varphi(t)$ сведет уравнение (1) к уравнению Бернулли вида

$$\dot{z}=p(t)z+c(t)z^2,$$

где функция $p(t) \triangleq b(t)+2\varphi(t)c(t)$ задана по крайней мере на отрезке $[-\pi, \pi]$. Интегрируя это уравнение Бернулли, получим общее решение уравнения (1) в виде

$$x(t)=\varphi(t)+\frac{A(t)}{\lambda-B(t)}, \tag{3}$$

где $\lambda\in]-\infty, \infty]$ есть некоторая не зависящая от $t$ постоянная, а функции $A(t) \triangleq \exp\int_0^t p(\tau)d\tau$ и $B(t) \triangleq \int_0^t c(s)A(s)ds$ заданы при всех $t\in[-\pi, \pi]$.

Отметим, что $A(t)\neq 0$ при всех $t\in[-\pi, \pi]$, а соответствие $\lambda \mapsto x(t)$ взаимооднозначно, если под $x(t)$ понимать решение уравнения (1), определенное при $t=0$. Из формулы (3), заменяя $t$ на $-t$, получим формулу

$$x(-t)=\varphi(-t)+\frac{A(-t)}{\lambda-B(-t)}. \tag{4}$$

Исключая $\lambda$ из (3) и (4), получим соотношение

$$x(-t)=\frac{m(t)x(t)+r(t)}{s(t)x(t)+m(-t)}, \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} s(t) \triangleq B(t)-B(-t), \\ m(t) \triangleq A(-t)+\varphi(t)s(t), \\ r(t) = A(t)\varphi(-t)-A(-t)\varphi(t)-s(t)\varphi(t)\varphi(-t). \end{gathered} \tag{6}$$

Из формул (6) видно, что каждая из функций $m$, $s$, $r$ определена и дифференцируема при всех $t\in[-\pi, \pi]$, причем функции $r(t)$ и $s(t)$ нечетны, т. е. $r(-t)=-r(t)$ и $s(-t)=-s(t)$, а $m(0)=1$. Таким образом, для уравнения Риккати функция $F(t, x)$ имеет вид

$$F(t, x) = \frac{m(t)x+r(t)}{s(t)x+m(-t)}, \tag{7}$$

где функции $r(t)$ и $s(t)$ нечетны, а $m(0)=1$.

Теорема 2. *Для уравнения Риккати произвольного вида (1) с непрерывными на* $\mathbf{R}$ *и $2\pi$-периодическими коэффициентами $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ имеет место только один из следующих случаев.*

1. *Уравнение (1) не имеет периодических решений.*
2. *Уравнение (1) имеет ровно одно $2\pi$-периодическое решение.*
3. *Уравнение (1) имеет ровно два $2\pi$-периодических решения.*
4. *Все решения уравнения (1), определенные при $t\in[-\pi, \pi]$, являются $2\pi$-периодическими.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что если ни одно из решений не продолжимо на $[-\pi, \pi]$, то уравнение (1) не имеет периодических решений, а, значит, имеет место первый случай. Пусть поэтому уравнение (1) имеет хотя бы одно решение, определенное при всех $t\in[-\pi, \pi]$. Тогда справедливы все рассуждения § 2, предшествующие формулировке теоремы, из которых следует, что функция $F(t, x)$, определенная формулой (7), удовлетворяет всем условиям теоремы 1. На основании названной теоремы продолжимое на $[-\pi, \pi]$ решение $x(t)$ будет периодическим тогда и только тогда, когда $x(\pi)=\lambda$ является решением следующего уравнения:

$$\frac{m(\pi)\lambda+r(\pi)}{s(\pi)\lambda+m(-\pi)}=\lambda,$$

которое можно переписать в виде

$$s(\pi)\lambda^2-[m(\pi)-m(-\pi)]\lambda-r(\pi)=0. \tag{8}$$

Уравнение (8) может не иметь действительных решений, иметь одно или два действительных решения или вырождаться в тождество. В соответствии с этим мы будем иметь один из четырех случаев, указанных в формулировке теоремы. Теорема доказана.

Примечание. Следующие ниже примеры показывают, что каждый из указанных случаев может осуществиться.

Примеры.

1. $\dot{x}=(x^2+1)(2+\sin t)$.
2. $\dot{x}=x^2(2+\sin t)$.
3. $\dot{x}=(x^2-1)(2+\sin t)$.
4. $\dot{x}=x^2\sin t$.

О том, что уравнение Риккати при $a(t)\neq 0$ не может иметь более двух периодических решений, было известно ранее. Интересное доказательство этого факта читатель найдет в книге В. А. Плисса [2, с. 128].

## § 3. О НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Используем только что полученные результаты для определения множества начальных данных периодических решений уравнения Риккати. При этом будем рассматривать уравнение вида

$$\dot{z}=a(t)+c(t)z^2. \tag{9}$$

Уравнение общего вида (1) приводится к виду (9) линейной взаимно однозначной заменой $z=\alpha(t)x+\beta(t)$, которая не изменяет периодичности решений, если в качестве $\beta(t)$ взять любую $2\pi$-периодическую функцию, для которой

$$\int_0^{2\pi} [b(\tau)+2c(\tau)\beta(\tau)]d\tau=0,$$

а в качестве функции $\alpha(t)$ взять функцию

$$\alpha(t) \triangleq \exp \int_0^t [b(\tau)+2c(\tau)\beta(\tau)]d\tau.$$

В дальнейшем уравнение (9) будем записывать в виде

$$\dot{x}=a(t)+c(t)x^2. \tag{10}$$

Соответствующее уравнение для функции $y=x(-t)$ будет иметь вид

$$\dot{y}+\bar{a}+\bar{c}y^2=0 \tag{11}$$

(здесь и далее для любой функции $\varphi$ по определению полагаем $\bar{\varphi}(t) \triangleq \triangleq \varphi(-t)$).

Согласно § 2, имеем равенство

$$y(t)=\frac{m(t)x(t)+r(t)}{s(t)x(t)+m(-t)}. \tag{12}$$

Поэтому при всех $t$ и $x$, для которых определено выражение $s(t)x+ +m(-t)$, верно тождество

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{mx+r}{sx+\bar{m}}\right]+\bar{a}+\bar{c}\left[\frac{mx+r}{sx+\bar{m}}\right]^3 \overset{t,\,x}{\equiv} 0,$$

где $\frac{dx}{dt}$ следует заменить на $a+cx^2$. Приведем левую часть этого тождества к общему знаменателю. Приравняем коэффициенты при степенях $x$ числителя к нулю. Тогда для определения функций $m$, $r$, $s$ получим систему

$$\begin{gathered} r'\bar{m}-r\bar{m}'+a(m\bar{m}-rs)+\bar{a}\bar{m}^2+\bar{c}r^2=0, \\ r's-rs'+m'\bar{m}-m\bar{m}'+2\bar{a}s\bar{m}+2\bar{c}rm=0, \\ m's-ms'+c(m\bar{m}-rs)+\bar{a}s^2+\bar{c}m^2=0. \end{gathered} \tag{13}$$

Функции $m$, $r$, $s$ в формуле (12) определены неоднозначным образом даже с учетом нечетности функций $r$, $s$ и условия $m(0)=1$. Для того чтобы определить их однозначным образом, введем функцию $p(t) \triangleq [m(t)+m(-t)]^{-1}$. Эта функция четная и дифференцируемая на некотором интервале $I$, содержащем точку $t=0$. Дальнейшие рассуждения будем проводить для $t\in I$. Для указанных $t$ формулу (12) можно переписать в виде

$$y=\frac{mpx+rp}{spx+\bar{m}p}=\frac{[1+N(t)]x+R(t)}{S(t)x+[1-N(t)]},$$

где функции

$$N(t) \triangleq [m(t)-m(-t)]\frac{p(t)}{2}, \quad R(t) \triangleq r(t)p(t), \quad S(t) \triangleq s(t)p(t)$$

определены и дифференцируемы на $I$ и нечетны. Поэтому можно было в самом начале считать, что формула (12) записана в виде

$$y=\frac{[1+n(t)]x+r(t)}{s(t)x+[1-n(t)]}, \tag{14}$$

где все функции $n(t)$, $r(t)$, $s(t)$ определены на $I$ и нечетны. Для так определенных функций $n$, $r$, $s$ система (13) перепишется в виде

$$\begin{aligned} &r'+rn'-rn'+a(1-n^2-rs)+\bar{a}(1-n)^2+\bar{c}r^2=0,\\ &2n'+r's-rs'+2\bar{a}s(1-n)+2\bar{c}r(1+n)=0,\\ &-s'+n's-ns'+c(1-n^2-rs)+\bar{a}s^2+\bar{c}(1+n)^2=0. \end{aligned} \tag{15}$$

Нас интересуют только нечетные решения системы (15), для которых $n(0)=r(0)=s(0)=0$. Представим функции $a(t)$ и $c(t)$ в виде $a(t)=a_ч(t)+a_н(t)$, $c(t)=c_ч(t)+c_н(t)$, где

$$a_ч(t)\triangleq\frac{a(t)+a(-t)}{2} \quad \text{и} \quad c_ч(t)\triangleq\frac{c(t)+c(-t)}{2} \tag{16}$$

есть четные, а

$$a_н(t)\triangleq\frac{a(t)-a(-t)}{2} \quad \text{и} \quad c_н(t)\triangleq\frac{c(t)-c(-t)}{2} \tag{17}$$

— нечетные функции. Воспользуемся затем нечетностью функций $n$, $r$, $s$ и четностью функций $n'$, $r'$, $s'$ и выделим из уравнений (15) четные части. Тогда получим систему

$$\begin{aligned} &r'+(2-rs)a_ч+2na_н+r^2c_ч=0,\\ &n'-sna_ч-sa_н+rnc_ч-rc_н=0,\\ &-s'+s^2a_ч+(2-rs)c_ч-2nc_н=0. \end{aligned} \tag{18}$$

Всякое нечетное решение системы (15) является также и решением системы (18), а всякое нечетное решение системы (18) является также и решением системы (15). Выделяя из (15) нечетную часть, можно получить некоторую новую систему, которая, как можно показать, будет следовать из системы (18). А это значит, что системы (15) и (18) оказываются эквивалентными. Перепишем теперь систему (18) в виде

$$\begin{aligned} &r'=-2na_н-2a_ч-r[rc_ч-sa_ч],\\ &s'=-2nc_н+2c_ч-s[rc_ч-sa_ч],\\ &n'=sa_н+rc_н-n[rc_ч-sa_ч]. \end{aligned} \tag{19}$$

Положим теперь $r_1\triangleq rz$, $s_1\triangleq sz$, $n_1\triangleq nz$, определив функцию $z(t)$ равенством

$$z(t)\triangleq 1+\int_0^t[r_1(\tau)c_ч(\tau)-s_1(\tau)a_ч(\tau)]d\tau.$$

Из системы (19) следует, что вновь определенные функции удовлетворяют следующей линейной системе:

$$\begin{aligned} &r_1'=-2n_1a_н-2za_ч,\\ &s_1'=-2n_1c_н+2zc_ч, \end{aligned} \tag{20}$$

$$n'_1 = r_1 c_{\text{н}} + s_1 a_{\text{н}},$$

$$z' = r_1 c_{\text{ч}} - s_1 a_{\text{ч}}$$

и начальным условиям

$$r_1(0) = s_1(0) = n_1(0) = 0, \quad z(0) = 1.$$

Так как наряду с рассматриваемым решением четверка функций $-r_1(-t)$, $-s_1(-t)$, $-n_1(-t)$, $z(-t)$ также является решением системы (20) с теми же начальными условиями при $t=0$, то из единственности решения задачи Коши для системы (20) следует нечетность функций $r_1(t)$, $s_1(t)$, $n_1(t)$ и четность функции $z(t)$. Таким образом, мы приходим к формулировке следующей теоремы

Теорема 3. *Пусть $r(t)$, $s(t)$, $n(t)$, $z(t)$ есть решение линейной системы*

$$\begin{aligned} r' &= -2na_{\text{н}} - 2za_{\text{ч}}, \\ s' &= -2nc_{\text{н}} + 2zc_{\text{ч}}, \\ n' &= rc_{\text{н}} + sa_{\text{н}}, \\ z' &= rc_{\text{ч}} - sa_{\text{ч}}, \end{aligned} \tag{21}$$

*удовлетворяющее начальным условиям $r(0) = s(0) = n(0) = 0$, $z(0) = 1$. Тогда $2\pi$-периодическим решением уравнения*

$$\dot{x} = a(t) + c(t)x^2$$

*будет то и только то решение $x(t)$ этого уравнения, которое продолжимо по крайней мере на отрезок $[-\pi, \pi]$ и для которого выполнено равенство*

$$s(\pi)x^2(\pi) - 2n(\pi)x(\pi) - r(\pi) = 0. \tag{22}$$

*При этом функции $a_{\text{ч}}$, $a_{\text{н}}$, $c_{\text{ч}}$ и $c_{\text{н}}$ определяются формулами (16) и (17).*

Доказательство. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция

$$F(t, x) \triangleq \frac{[z(t) + n(t)]x + r(t)}{s(t)x + z(t) - n(t)}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы § 1. Согласно этой теореме, решение $x(t)$ будет периодическим тогда и только тогда, когда $x(\pi)$ удовлетворяет условию $F(\pi, x(\pi)) = x(\pi)$. Отсюда и получаем утверждение теоремы.

Примечание 1. Вычислив приближенно $r(\pi)$, $s(\pi)$, $n(\pi)$, $z(\pi)$ и воспользовавшись теоремой 3, можно приближенно найти начальные данные $x_1(\pi)$ и $x_2(\pi)$ периодических решений уравнения (10). Если при этом $|x_2(\pi) - x_1(\pi)|$ в три или более раз превосходит точность вычислений, то мы можем быть уверены в том, что уравнение (10) имеет ровно два периодических решения.

Примечание 2. Проверкой нетрудно убедиться в том, что соотношение $n^2 + rs - z^2 = \text{const}$ определяет первый стационарный интеграл системы (21), который можно найти методами, предложенными в [3, с. 470—476; 4]. Искомые функции $r$, $s$, $n$, $z$ удовлетворяют, таким образом, соотношению $n^2 + rs - z^2 \equiv -1$ (это следует из начальных условий для рассматриваемых функций). Поэтому если $s(\pi) \neq 0$, то начальные данные периодических решений определяются по формуле

$$x_{1,2}(\pi) = \frac{n(\pi) \pm \sqrt{n^2(\pi) + r(\pi)s(\pi)}}{s(\pi)} = \frac{n(\pi) \pm \sqrt{z^2(\pi) - 1}}{s(\pi)}.$$

Исследуя систему (21), можно выделить различные интересные частные случаи. Сформулируем один из них в виде следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть $a(t)$ есть непрерывная $2\pi$-периодическая функция. Тогда уравнение*

$$\dot{x}=a(t)-a(-t)x^2$$

*имеет по крайней мере одно $2\pi$-периодическое решение, если только оно обладает продолжимым на* $\mathbf{R}$ *решением.*

Доказательство. В рассматриваемом случае справедливы тождества

$$c(t)\equiv-a(-t),\quad c_{\text{ч}}(t)\equiv-a_{\text{ч}}(t),\quad c_{\text{н}}(t)\equiv a_{\text{н}}(t).$$

Поэтому система (21) для данного уравнения имеет вид

$$r'=-2na_{\text{н}}-2za_{\text{ч}},\quad n'=(r+s)a_{\text{н}},$$

$$s'=-2na_{\text{н}}-2za_{\text{ч}},\quad z'=-(r+s)a_{\text{ч}}.$$

Соотношение $r-s=\text{const}$ задает первый интеграл этой системы. Из этого интеграла, учитывая начальные условия $r(0)=s(0)=0$, получим тождество $r(t)\equiv s(t)$. Воспользуемся теперь теоремой 3, из которой следует, что продолжимое на отрезок $[-\pi, \pi]$ решение $x(t)$ будет $2\pi$-периодическим тогда и только тогда, когда $x(\pi)$ удовлетворяет уравнению

$$r(\pi)x^2(\pi)-2n(\pi)x(\pi)-r(\pi)=0.$$

Это уравнение всегда имеет хотя бы один корень, которому в силу условий теоремы соответствует продолжимое на $[-\pi, \pi]$ решение. Теорема доказана.

## Литература

1. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1966.
2. Плисс В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний.— М.—Л.: Наука, 1964.
3. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск: Наука и техника, 1970.
4. Мироненко В. И.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 5.

*Гомельский государственный университет*

*Поступила в редакцию 26 февраля 1979 г.*