МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.52+517.538.53

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА – ПАДЕ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

М.В. Сидорцов, А.А. Драпеза, А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины

ASYMPTOTICS OF HERMITE – PADÉ DEGENERATE HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

M.V. Sidortsov, A.A. Drapeza, A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University

Установлена асимптотика диагональных многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода для системы $\{{}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)\}_{j=1}^k$, состоящей из вырожденных гипергеометрических функций, в случае, когда числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ являются корнями уравнения $\lambda^k = 1$, а γ – комплексное число, принадлежащее множеству $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$. Доказанные теоремы дополняют известные результаты Паде, Д. Браесса, А.И. Аптекарева, Г. Шталя, Ф. Вилонского, В. Ван Аше, А.Э. Койэлаарса, А.П. Старовойтова, полученные в случае, когда $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – различные действительные числа.

Ключевые слова: *интегралы Эрмита*, *многочлены Эрмита – Паде*, *аппроксимации Эрмита – Паде*, *асимптотические равенства*, *вырожденные гипергеометрические функции.*

The asymptotic behavior of diagonal Hermite – Padé polynomials and diagonal Hermite – Padé approximations of type II for the system $\{{}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)\}_{j=1}^k$, consisting of degenerate hypergeometric functions in which while the rest $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ are the roots of the equation $\lambda^k = 1$, γ – is a complex number belonging to the set $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,...\}$ was stated. The theorems complement known results of H. Padé, D. Braess, A.I. Aptekarev, H. Stahl, F. Wielonsky, W. Van Assche, A. B. J. Kuijlaars, A.P. Starovoitov, obtained for the case, where the $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – different real numbers.

Keywords: *Hermite integrals*, *Hermite – Padé polynomials*, *Hermite – Padé approximations*, *asymptotic equality*, *degenerate hypergeometric functions.*

Введение

Пусть k – произвольное фиксированное натуральное число, а

$$f_j(z) = \sum_{p=0}^{\infty} f_p^j z^p, \ j = 1,2,...,k \qquad (0.1)$$

является набором голоморфных в нуле функций или формальных степенных рядов. Зафиксируем k-мерный вектор $\vec{m} = (m_1, m_2, ..., m_k)$ с целочисленными неотрицательными координатами. Считая, что n также является целым неотрицательным числом, полагаем

$$m = \sum_{i=1}^{k} m_i, \ n_j = n + m - m_j, \ j = 1,2,...,k.$$

Известно [1], что существует набор из $k+1$ многочленов Q_m, $P_{n_1}^1, P_{n_2}^2, ..., P_{n_k}^k$, $deg\, Q_m \le m$, $deg\, P_{n_j}^j \le n_j$, для которых

$$R_{n,m}^j(z) = Q_m(z) f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = A_j z^{n+m+1} + \dots . \qquad (0.2)$$

Если $k = 1$, то множество (0.1) состоит из одной функции $f = f_1$, многочлены Q_m, $P_n := P_n^1$ определяются с точностью до однородной константы, а их отношение задает единственную рациональную функцию

$$\pi_{n,m}(z) = \pi_{n,m}(z, f) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

которую называют *аппроксимацией Паде* для f. При $k \ge 2$ дроби

$$\pi_{n_j,m}^j(z) = \pi_{n_j,m}^j(z; f_j) = \frac{P_{n_j}^j(z)}{Q_m(z)}, \ j = 1,2,...,k$$

условиями (0.2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n_j,m}^j\}_{j=1}^k$ его элементы называют *аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода* (*совместными аппроксимациями Паде*) для набора функций $\{f_j\}_{j=1}^k$, а Q_m, $P_{n_j}^j$ называют *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода* (*German polynomials* – в терминологии К. Малера [2]) для набора (0.1).

Если $n = m_1 = m_2 = ... = m_k$, то Q_{kn}, P_{kn}^j называют *диагональными многочленами Эрмита – Паде 2-го рода*, а $\pi_{kn,kn}^j$ – *диагональными аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода* для системы $\{f_j\}_{j=1}^k$.

Единственность имеет место, например, для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [1]). В частности, если $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не равные нулю комплексные числа, то система экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ является совершенной. Без формального определения этот факт был установлен Эрмитом. Исследуя арифметические свойства числа *e*, Эрмит [3] ввел интегралы, которые после небольших преобразований (подробнее см. [1]) приводят к решению системы (0.2) для набора $\{f_j(z)=e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$:

$$Q_m(z)=\frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^\infty x^n\prod_{i=1}^k (x-\lambda_i)^{m_i}e^{-zx}dx,$$

$$\begin{gathered} P_{n_j}^j(z)=P_{n_j}^j(z;e^{\lambda_j\xi})= \\ =\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_{\lambda_j}^\infty x^n\prod_{i=1}^k (x-\lambda_i)^{m_i}e^{-zx}dx, \\ R_{n,m}^j(z)=R_{n,m}^j(z;e^{\lambda_j\xi})= \\ =\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{(n+m)!}\int_0^{\lambda_j} x^n\prod_{i=1}^k (x-\lambda_i)^{m_i}e^{-zx}dx. \end{gathered} \tag{0.3}$$

Многочлены, определяемые равенствами (0.3), соответствующие им аппроксимации и их обобщения привлекали внимание как классиков (Д. Гильберт, Ф. Клейн, Ф. Линдеман, К. Малер, К. Зигель), так и многих известных современных математиков (см., например, монографии [1], [4] и тематические обзоры [5] –[10]).

Одним из стимулов для изучения асимптотического поведения интегралов Эрмита стала задача Е.М. Никишина [11] об исследовании сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде для системы экспонент. Её полное решение было найдено А.И. Аптекаревым [11], который показал, что при $n+m\to+\infty$ дроби $\pi_{n_j,m}^j(z;e^{\lambda_j\xi})$ сходятся к $e^{\lambda_j z}$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}$. Ранее при $k=1$ равномерная сходимость $\pi_{n,m}(z;e^{\xi})$ к e^z была доказана Перроном [12].

Рассмотрим набор вырожденных гипергеометрических функций

$$F_\gamma^j(z)={}_1F_1(1,\gamma;\lambda_j z)=\sum_{p=0}^\infty\frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p}z^p,\ j=1,2,\dots,k, \tag{0.4}$$

где γ – произвольное комплексное число, принадлежащее множеству $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$, $(\gamma)_0=1$, $(\gamma)_p=\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+p-1)$ – символ Похгаммера, а $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа не равные нулю. При $\gamma=1$ набор (0.4) представляет собой систему экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$.

В одномерном случае, когда $F_\gamma(z)={}_1F_1(1,\gamma;z)$, явные выражения для остаточной функции $R_{n,m}$ и знаменателя Q_m были найдены Ван Россумом [13]: при $n\ge m-1$

$$\begin{gathered} Q_m(z;F_\gamma)={}_1F_1(-m,-n-m-\gamma;-z), \\ R_{n,m}(z;F_\gamma):=Q_m(z)F_\gamma(z)-P_n(z)= \\ =\frac{(-1)^m m!z^{n+m+1}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}\,{}_1F_1(m+1,n+m+\gamma+1;z). \end{gathered} \tag{0.5}$$

Напомним, что по определению

$${}_1F_1(\alpha,\beta;z)=\sum_{p=0}^\infty\frac{(\alpha)_p}{(\beta)_p}\frac{z^p}{p!}.$$

Де Брюен [14], опираясь на представления (0.5), обосновал равномерную сходимость $\pi_{n,m}(z;F_\gamma)$ к F_γ на компактах в $\mathbb{C}$ при $n+m\to\infty$. Асимптотика этой сходимости установлена в [15][1]: при $n\ge m-1$ и $n+m\to\infty$

$$\begin{gathered} F_\gamma(z)-\pi_{n,m}(z;F_\gamma)= \\ =(-1)^m\frac{m!(\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m}(\gamma)_{n+m+1}}z^{n+m+1}(1+o(1)). \end{gathered} \tag{0.6}$$

Здесь и далее оценка $o(1)$ равномерна по z на компактах в $\mathbb{C}$.

При $\gamma=1$ равенство (0.6) хорошо известно в теории аппроксимаций Паде и ранее доказано Д. Браессом [16].

Многомерный случай исследован в [17]. В этой работе установлено, что при любом $k\ge1$ и произвольном $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$ дроби $\pi_{n_j,m}^j(z;F_\gamma^j)$ равномерно сходятся на компактах в $\mathbb{C}$ к $F_\gamma^j(z)$, при условии, что $n\ge m_j-1$, $j=1,2,\dots,k$ и $n+m\to+\infty$. В [17], в частности, показано, что для системы функций $\{F_\gamma^j\}_{j=1}^k$ имеет место следующее интегральное представление знаменателя и остаточных функций: при $n\ge m_j-1$, $j=1,2,\dots,k$

$$\begin{gathered} \widetilde{Q}_m(z)=\frac{z^{n+m+\gamma}}{\Gamma(n+m+\gamma)}\times \\ \times\int_0^\infty[x^{n+\gamma-1}\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx, \end{gathered} \tag{0.7}$$

$$\begin{gathered} R_{n,m}^j(z;F_\gamma^j)=\frac{e^{\lambda_j z}z^{n+m+1}}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{n+m}}\times \\ \times\int_0^{\lambda_j}[x^{n+\gamma-1}\prod_{i=1}^k(x-\lambda_i)^{m_i}]e^{-zx}dx, \end{gathered} \tag{0.8}$$

В равенстве (0.7) считается, что $\operatorname{Re}z>0$. В случае $\operatorname{Re}z\le0$ значения $\widetilde{Q}_m(z)$ определяются с помощью аналитического продолжения. $\Gamma(\cdot)$ –

[1] В этой работе предполагается, что $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$. Однако предложенный в [15] метод доказательства позволяет получить аналогичный результат и в общем случае, когда $\gamma\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$.

гамма-функция Эйлера. В (0.8) интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j.

По всей видимости, условия $n \ge m_j - 1$ являются необходимыми для справедливости представлений (0.7) и (0.8). Так, в частности, при $k=1$ Де Брюен [14] показал, что если $n < m-1$, то при $\gamma = 2$, $\gamma = 1 \pm i\sqrt{2}$ и γ, являющимся действительным корнем уравнения

$$\gamma^3 - 4\gamma^2 - \gamma + 6 = 0,$$

существуют индексы (n, m), которые не являются нормальными (определение нормальных индексов см. в [1]). Хорошо известно, что единственность множества $\{\pi^j_{n_j,m}\}_{j=1}^k$ вытекает из нормальности индексов.

Доказательство равномерной сходимости в [17] опирается на следующее асимптотическое равенство, являющееся аналогом соответствующего утверждения Перрона: при $n \ge m_j - 1$, $j = 1, 2, \ldots, k$ и $n + m \to +\infty$

$$\widetilde{Q}_m(z) = \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i}{n+m+\gamma-1} z\right\}(1+o(1)). \quad (0.9)$$

Если $\gamma \ne 1$, то получить аналог представления (0.7) для многочленов $P^j_{n_j}$ не удаётся. Тем не менее, опираясь на результаты работы [17], нетрудно показать, что при тех же условиях равномерно по z на любом компакте из $\mathbb{C}$

$$\lim_{n+m\to+\infty} P^j_{n_j}(z) \exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i}{n+m+\gamma-1} z\right\} = F^j_\gamma(z). \quad (0.10)$$

К настоящему времени равенства (0.9), (0.10) в совокупности являются одним из самых общих результатов об асимптотике многочленов Эрмита – Паде. Вопрос о том, каково асимптотическое поведение остаточных функций $R^j_{n,m}$ и аппроксимаций $\pi^j_{n_j,m}$, в общей постановке пока остается открытым. Имеется продвижение только в диагональном случае [18]–[22], когда $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ являются либо действительными, либо чисто мнимыми числами (см. [23], где при $k=2$ рассматривается также и недиагональный случай).

Отметим также, что при $\gamma = 1$ задача об асимптотике остаточной функции и диагональных многочленов Эрмита – Паде 1-го рода подробно исследовалась в [24]–[26].

В данной статье устанавливаются асимптотики равномерной сходимости диагональных аппроксимаций $\pi^j_{kn,kn}(\cdot; F^j_\gamma)$ к функции F^j_γ при $n \to \infty$ в том случае, когда числа $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ равномерно распределены на единичной окружности, т. е. являются корнями уравнения $\lambda^k = 1$.

1 Формулировка основных результатов

Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – корни уравнения $\lambda^k = 1$, т. е.

$$\lambda_j = e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}},\ j = 1, 2, \ldots, k. \quad (1.1)$$

Полагаем

$$\varphi(x) := x(1-x^k) = -x(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_k),$$

а через x_j обозначим нули φ':

$$x_j = \sqrt[k]{\frac{1}{k+1}} e^{i\frac{2\pi(j-1)}{k}},\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

где i – мнимая единица.

Рассмотрим однозначную вещественнозначную функцию

$$S(x) = \ln \varphi(x),\ x \in (0,1),$$

считая, что выбрана та ветвь логарифма, для которой $\ln e^{-1} = -1$. По определению полагаем, что $S(0) = S(1) = -\infty$.

Справедливы равенства

$$S(x_1) = \ln \frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}},$$

$$S'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},\ S''(x) = \frac{\varphi''(x)\varphi(x) - [\varphi'(x)]^2}{\varphi^2(x)},$$

из которых следует, что

$$S'(x_1) = 0,\ S''(x_1) = \frac{\varphi''(x_1)}{\varphi(x_1)} = -\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}},$$

$$B_n := \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}} e^{nS(x_1)} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{n\sqrt[k]{(k+1)^{k+2}}}} \left(\frac{k}{\sqrt[k]{(k+1)^{k+1}}}\right)^n.$$

Везде далее считается, что $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, $n = m_1 = m_2 = \ldots = m_k$, а λ_j определяются равенствами (1.1).

***Теорема* 1.1.** *При $n \to +\infty$ равномерно на любом компакте из $\mathbb{C}$:*

а) при $k=1$

$$P_n(z; F_\gamma) \rightrightarrows F_\gamma(z) e^{-\frac{z}{2}}; \quad (1.2)$$

б) при $k \ge 2$

$$P^j_{kn}(z; F^j_\gamma) \rightrightarrows F^j_\gamma(z).$$

Утверждение (1.2) в случае, когда $\gamma = 1$, доказал Паде, а при других γ – Де Брюен [14].

***Теорема* 1.2.** *При любом фиксированном z и $n \to +\infty$*

$$R^j_{n,kn}(z; F^j_\gamma) = (-1)^n x_1^{\gamma-1} \lambda_j^{n+1} B_n \times$$
$$\times \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j(1-x_1)z}(1 + O(1/n)),\ j = 1, 2, \ldots, k. \quad (1.3)$$

Здесь и далее для комплексных w и τ считаем, что

$$w^\tau = e^{\tau \ln w},$$

где $\ln w = \ln|w| + i \arg_0 w$, $\arg_0 w \in (-\pi, \pi]$.

***Теорема* 1.3.** *При любом фиксированном* z *и* $n \to +\infty$

$$F_\gamma^j(z) - \pi_{kn,kn}^j(z; F_\gamma^j) =$$
$$= (-1)^n x_1^{\gamma-1} \lambda_j^{n+1} B_n \times$$
$$\times \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j (1-x_1) z} e^{\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z} (1 + O(1/n)), \quad (1.4)$$
$$j = 1, 2, ..., k.$$

***Следствие* 1.1.** *Если* $k = 1$, *то при* $n \to +\infty$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,n}(z; F_\gamma) =$$
$$= (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}} \frac{z^{2n+1}}{(\gamma)_{2n}} e^z (1 + O(1/n)). \quad (1.5)$$

Напомним, что бесконечно малые (б.м.) последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ называют *эквивалентными* ($\alpha_n \sim \beta_n$), когда $\alpha_n / \beta_n \to 1$ при $n \to +\infty$.

Если $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$, то, принимая во внимание равенство $(\gamma)_p = \Gamma(p + \gamma) / \Gamma(\gamma)$, с помощью формулы Стирлинга нетрудно показать, что при $n \to +\infty$

$$\frac{n!(\gamma)_n}{(\gamma)_{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}}. \quad (1.6)$$

Это значит, что при $n = m$ и $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$ асимптотические равенства (0.6) и (1.5) полностью согласуются.

Известно [27, § 43, пример 4], что формула Стирлинга

$$\Gamma(z+1) = z^z e^{-z} \sqrt{2\pi z} \left(1 + \frac{1}{z}\right), z \to \infty$$

справедлива также и для комплексных z, если только $z \to \infty$, $z \in U_\varepsilon$, где U_ε – сектор $\{z : \arg |z| \le \pi - \varepsilon\}$. Здесь ε – фиксировано, $0 < \varepsilon < 1$. Поэтому эквивалентность (1.6) имеет место и при $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, ...\}$. Таким образом установлено, что в диагональном случае равенство (0.6) верно и для комплексных γ.

***Следствие* 1.2.** *Пусть* $k = 2$. *Тогда* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ *и при* $n \to +\infty$

$$F_\gamma^1(z) - \pi_{2n,2n}^1(z; F_\gamma^1) =$$
$$= (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \frac{z^{3n+1}}{(\gamma)_{3n}} e^{(1-\frac{1}{\sqrt{3}})z} (1 + o(1)).$$
$$F_\gamma^2(z) - \pi_{2n,2n}^2(z; F_\gamma^2) =$$
$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \frac{z^{3n+1}}{(\gamma)_{3n}} e^{-(1-\frac{1}{\sqrt{3}})z} (1 + o(1)).$$

При $\gamma = 1$ из последних соотношений легко получить соответствующие асимптотические равенства для разностей $e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^\xi)$, $e^{-z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{-\xi})$ (в работе [18] асимптотика этих разностей описана в терминах решений некоторых краевых матричных задач Римана – Гильберта). Заметим также, что все утверждения следствия 1.2 согласуются с результатами работ [19]–[21].

2 Предварительные результаты

Интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_I f(x) e^{\lambda S(x)} dx \quad (2.1)$$

называют интегралами Лапласа. Здесь I либо отрезок $[a, b]$, либо интервал (a, b), λ – большой параметр. Будем считать, что функция $S(x)$ принимает только действительные значения. Функция $f(x)$ может быть комплекснозначной. Считаем также, что $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны при $x \in I$. Нас интересует асимптотическое поведение интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Следующее утверждение [27, § 4, п. 1, лемма 1] дает грубую экспоненциальную оценку для интеграла Лапласа.

***Утверждение* 2.1.** *Пусть* $I = (a, b)$ – *конечный или бесконечный интервал*, $S(x) \le c$ *при* $x \in I$ *и интеграл* (2.1) *сходится абсолютно при некотором* $\lambda_0 > 0$. *Тогда если* $\operatorname{Re}\lambda \ge \lambda_0$, *то*

$$|F(\lambda)| \le c_1 e^{cRe\lambda},$$

где c_1 – *положительная постоянная.*

В дальнейшем ограничимся случаем, когда $S(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $I = [a, b]$ в единственной точке, лежащей внутри этого отрезка. Справедливо [27, § 43, п. 4, теорема 2] следующее

***Утверждение* 2.2.** *Пусть* $S(x) < S(x_0)$, $x \ne x_0$, $a < x_0 < b$, $S''(x_0) \ne 0$ *и функции* $f(x)$, $S(x)$ *бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0. *Тогда при* $\lambda \to +\infty$ *и* $f(x_0) \ne 0$ *справедливо асимптотическое равенство*

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{\lambda S(x_0)} \left\{ f(x_0) + O(\lambda^{-1}) \right\}. \quad (2.2)$$

3 Доказательства основных теорем

Начнём с доказательства равенств (1.3). Докажем (1.3) при $j = 1$. Пусть z – любое отличное от нуля (при $z = 0$ равенство (1.3) очевидно) фиксированное комплексное число. В условиях теоремы 1.2

$$R_{n,kn}^1(z; F_\gamma^j) = \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^z \int_0^1 \left[x(x^k - 1) \right]^n x^{\gamma-1} e^{-zx} dx.$$

Обозначим интеграл в правой части последнего равенства через $I_n^1(z)$. Тогда его можно записать в виде

$$I_n^1(z) = (-1)^n \int_0^1 x^{\gamma-1} e^{-zx} e^{nS(x)} dx.$$

В интеграле $I_n^1(z)$ разобьём область интегрирования на три промежутка: $(0,\tau)$, $[\tau,1-\tau]$ и $(1-\tau,1)$, где $0<\tau<1$ и выбрано так, чтобы $x_1\in(\tau,1-\tau)$. Соответствующие этому разбиению интегралы обозначим через $J_n^p(z)$, $p=1,2,3$.

На отрезке $[\tau,1-\tau]$ функция $S(x)=\ln[x(1-x^k)]$ принимает наибольшее значение в единственной точке $x=x_1$ и $S''(x_1)\neq 0$. Поэтому асимптотику интеграла

$$J_n^2(z)=\int_\tau^{1-\tau}x^{\gamma-1}e^{-zx}e^{nS(x)}dx$$

можно найти по формуле (2.2), считая в формулировке утверждения 2.2 $f(x)=x^{\gamma-1}e^{-zx}$, а $\lambda=n$. В результате таких вычислений получим, что

$$J_n^2(z)=\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}x_1^{\gamma-1}e^{-zx_1}(1+O(1/n)).$$

Поскольку на интервале (0,1) функция $S(x)$ принимает наибольшее значение в единственной точке $x=x_1$, то, воспользовавшись утверждением 2.1, нетрудно показать, что

$$|J_n^p(z)|\leq c_1e^{n(S(x_1)-\delta)},\ p=1,3,$$

где c_1 и δ – положительные постоянные. Это значит, что при $n\to\infty$ интегралы по первому и третьему промежуткам экспоненциально малы по сравнению с $e^{nS(x_1)}$. Следовательно, основной вклад в асимптотику $I_n^1(z)$ вносит интеграл $J_n^2(z)$. Поэтому при $n\to\infty$

$$I_n^1(z)=(-1)^n\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}x_1^{\gamma-1}e^{-zx_1}(1+O(1/n)).$$

Равенство (1.3) при $j=1$ и фиксированном z доказано.

Пусть теперь $j\geq 2$. Тогда

$$R_{n,kn}^j(z;F_\gamma^j)=$$
$$=\frac{z^{kn+n+1}}{\lambda_j^{\gamma-1}(\gamma)_{kn+n}}e^{\lambda_jz}\int_0^{\lambda_j}\left[\xi(\xi^k-1)\right]^n\xi^{\gamma-1}e^{-z\xi}d\xi.$$

Будем считать, что кривая интегрирования, соединяющая точку 0 с λ_j, задана параметрически уравнением

$$\xi=\xi(t)=t\lambda_j,\ t\in[0,1].$$

В интеграле

$$I_n^j(z):=\int_0^{\lambda_j}\left[\xi(\xi^k-1)\right]^n\xi^{\gamma-1}e^{-z\xi}d\xi$$

сделаем замену $\xi=\xi(t)$. Тогда

$$I_n^j(z):=(-1)^n\lambda_j^{n+1}\lambda_j^{\gamma-1}\int_0^1\left[t(1-t^k)\right]^nt^{\gamma-1}e^{-zt\lambda_j}dt.$$

Асимптотика интеграла, стоящего в правой части предыдущего равенства, находится также, как и для интеграла $I_n^1(z)$, с той лишь разницей, что $f(t)=t^{\gamma-1}e^{-zt\lambda_j}$. В результате аналогичных рассуждений получим, что

$$R_{n,kn}^j(z;F_\gamma^j)=(-1)^nx_1^{\gamma-1}\lambda_j^{n+1}\frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}}e^{\lambda_j(1-x_1)z}\times$$
$$\times\sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_1)}}e^{nS(x_1)}(1+O(1/n)).$$

Теорема 1.2 доказана.

Теорема 1.3 является следствием теоремы 1.2 и равенства (0.9).

Легко показать, что при $k\geq 2$ справедливо равенство $\sum_{i=1}^k\lambda_i=0$. Поэтому теорема 1.1 является следствием асимптотического равенства (0.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин*, *Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М.: Наука, 1988.

2. *Stahl*, *H.* Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomals associated with the exponential function / H. Stahl // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.

3. *Hermite*, *C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.

4. *Клейн*, *Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2-х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987.

5. *Суетин*, *С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1. – С. 45–142.

6. *Суетин*, *С.П.* Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2015. – Т. 70, № 5 (425). – С. 121–174.

7. *Van Assche*, *W.* Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation / W.Van Assche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.

8. *Aptekarev*, *A.I.* Asymptotics of Hermite – Padé polynomials, in “Progress in Approximation Theory” (A.A. Gonchar and E.B. Saff, Eds.) / A.I. Aptekarev, H. Stahl. – New York – Berlin: Springer-Verlag, 1992.

9. *Аптекарев*, *А.И.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 37–122.

10. *Аптекарев*, *А.И.* Аппроксимации Эрмита – Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, А.Э. Койэлаарс // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402). – С. 123–190.

11. *Аптекарев*, *А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.

12. *Perron*, *O*. Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig-Berlin: Teubner, 1929.

13. *Van Rossum*, *H*. Systems of orthogonal and quasi-orthogonal polynomials connected with the Padé table I, II and III / H. Van Rossum // K. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – P. 517–534, 675–682.

14. *De Bruin*, *M.G*. Convergence of the Padé table for ${}_1F_1(1;c;x)$ / M.G. De Bruin // K. Nederl. Akad. Wetensch. – 1976. – Vol. 79. – P. 408–418.

15. *Старовойтов*, *А.П*. Аппроксимации Паде функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.

16. *Braess*, *D*. On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x, II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

17. *Аптекарев*, *А.И*. Об аппроксимациях Паде к набору $\left\{{}_1F_1(1,c;\lambda_i z)\right\}_{i=1}^{k}$ / А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.

18. *Kuijlaars*, *A.B.J*. Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function / A.B.J. Kuijlaars, H. Stahl, W. Van Assche, F. Wielonsky // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207. – P. 227–244.

19. *Старовойтов*, *А.П*. Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде системы экспонент / А.П. Старовойтов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 2. – С. 5–10.

20. *Старовойтов*, *А.П*. О свойствах аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 1. – С. 5–10.

21. *Старовойтов*, *А.П*. Аппроксимации Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (14). – С. 81–87.

22. *Старовойтов*, *А.П*. Об асимптотике аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера / А.П. Старовойтов // Известия вузов. Математика. – 2014. – № 9. – С. 59–68.

23. *Старовойтов*, *А.П*. Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / А.П. Старовойтов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, № 1 (2). – С. 88–91.

24. *Астафьева*, *А.В*. Асимптотические свойства многочленов Эрмита / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 3. – С. 5–11.

25. *Астафьева*, *А.В*. Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций / А.В. Астафьева, А.П. Старовойтов // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.

26. *Старовойтов*, А.П. Верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций / А.П. Старовойтов, Е.П. Кечко // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 3. – С. 409–420.

27. *Сидоров*, *Ю.В*. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М.: Наука, 1989.

Поступила в редакцию 09.03.17.