А. Е. Лещёв, Л. И. Минченко
(БГУИР, Минск)

ОСЛАБЛЕННЫЕ УСЛОВИЯ ГОЛЛАНА ПО НАПРАВЛЕНИЮ

Известно, что вопросы устойчивости задач нелинейного программирования относительно возмущений параметров тесно связаны с дифференцируемостью по направлениям функции оптимального значения. Один из наиболее результативных подходов к исследованию дифференцируемости функции оптимального значения базируется на условии Б. Голлана. Наше сообщение ставит целью показать, что известные результаты о дифференцируемости функции оптимального значения сохраняются при замене условия Б. Голлана более слабым условием.

Пусть $f(x,y)$, $h_i(x,y)$ $i=1,...,p$ – C^2-функции из $R^n \times R^m$ в R. Рассмотрим задачу минимизации функции $f(x,y)$ множестве $F(x)=\left\{y \in R^m \mid h_i(x,y) \le 0,\ i \in I,\ h_i(x,y)=0, i \in I_0\right\}$, где $x \in R^n$ – вектор параметров, $I=\{1,...,s\}$, $I_0=\{s+1,...,p\}$.

Введем соответственно функцию оптимального значения и множество оптимальных решений

$\phi(x)=\inf\{f(x,y) \mid y \in F(x)\}$, $\omega(x)=\{y \in F(x) \mid f(x,y)=\phi(x)\}$

и будем считать, что при $x^0, \bar{x} \in R^n$ множество $\omega(x^0+t\bar{x})$ не пусто и равномерно ограниченно для всех достаточно малых $t \ge 0$.

Положим $z=(x,y)$, $\bar{z}=(\bar{x},\bar{y})$, $I(z)=\{i \in I \mid h_i(z)=0\}$,

$$\Gamma(z;\bar{x})=\left\{\ \bar{y} \in R^m \mid \langle \nabla h_i(z), \bar{z} \rangle \le 0,\quad i \in I(z),\quad \langle \nabla h_i(z), \bar{z} \rangle = 0 \quad i \in I_0 \right\},$$

$$\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_p),\quad h=(h_1,...,h_p),\quad L(z,\lambda)=f(z)+\langle \lambda, h(z) \rangle,$$

$$\Lambda(z)=\left\{\lambda \in R^p \mid \nabla_y L(z,\lambda)=0,\quad \lambda_i \ge 0 \quad \text{и} \quad \lambda_i h_i(z)=0,\quad i \in I\right\},$$

$$I^0(z,\bar{x})=\left\{i \in I(z) \mid \langle \nabla h_i(z), (\bar{x},\bar{y}) \rangle = 0,\quad \forall \bar{y} \in \Gamma(z;\bar{x})\right\}.$$

Определение 1. В точке $z^0=(x^0,y^0)$ выполнено ослабленное условие Голлана по направлению $\bar{x}$ ($RG_{\bar{x}}$), если $\Gamma(z^0;\bar{x}) \ne \varnothing$ и система векторов $\begin{pmatrix} \nabla_y h_i(z) \\ \langle \nabla_x h_i(z), \bar{x} \rangle \end{pmatrix}$ $i \in I_0 \cup I^0(z^0,\bar{x})$ имеет постоянный ранг в некоторой окрестности точки z^0.

Пусть

$$\Lambda^2(z^0;\bar{x})=\left\{\lambda \in \Lambda(z^0) \mid \langle \nabla_x L(z^0,\lambda), \bar{x} \rangle = \max_{\lambda \in \Lambda(z^0)} \langle \nabla_x L(z^0,\lambda), \bar{x} \rangle \right\}.$$

Теорема 1. Пусть $\Lambda(z^0) \ne \varnothing$ во всех точках $z^0=(x^0,y^0)$ таких, что $y^0 \in \omega(x^0)$, выполнено условие $RG_{\bar{x}}$ и $\sup\limits_{\lambda \in \Lambda^2(z^0;\bar{x})} \langle \bar{y}, \nabla^2_{yy} L(z^0,\lambda)\bar{y} \rangle > 0$ для всех ненулевых векторов $\bar{y} \in \left\{\bar{y} \in \Gamma(z;0) \mid \langle \nabla_y f(z), \bar{y} \rangle \le 0\right\}$. Тогда функция ϕ дифференцируема в точке x^0 по направлению $\bar{x}$, причем

$$\phi'(x^0;\bar{x})=\min_{y^0 \in \omega(x^0)} \min_{\bar{y} \in \Gamma(z^0;\bar{x})} \langle \nabla f(z^0), \bar{z} \rangle = \min_{y^0 \in \omega(x^0)} \max_{\lambda \in \Lambda(z^0)} \langle \nabla_x L(z^0,\lambda), \bar{x} \rangle .$$