АНАЛИТИЧЕСКИЕ
И ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ
В МАТЕМАТИКЕ
Дифференциальные уравнения, математический анализ и численные методы

А. В. Астафьева
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА-ПАДЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

Рассмотрим набор формальных степенных рядов

$$f_j(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k^j z^k, \quad j=1,2,\ldots,r,$$

с комплексными коэффициентами. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа $n, m_1, m_2, \ldots, m_r$ и обозначим $m=\sum_{i=1}^{r} m_i$, $n_i=m+n-m_i$. Будем считать, что система функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^{r}$ является совершенной. Тогда существуют такие многочлены $Q_m, P_{n_i}^i$, что $\deg Q_m \le m$, $\deg P_{n_i}^i \le n_i$ и для $i=1,2,\ldots,r$

$$R_{m,n}^i(z)=Q_m(z)\, f_i(z)-P_{n_i}^i(z)=c_i z^{n+m+1}+\ldots .$$

Дроби вида $\pi_{n,m}{}^j(z)=\dfrac{P_{n_j}^j}{Q_m}$, $j=1,2,\ldots,r$ называются аппроксимациями Эрмита-Паде.

Будем рассматривать систему функций следующего вида $\{e^{lz}, e^{2iz}\}$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\{e^{lz}, e^{2iz}\}$ *− набор из двух экспонент,* $\{\pi_{n,m}{}^j(z, e^{ji\xi})\}_{j=1}^{2}$ *− соответствующие данному набору аппроксимации Эрмита-Паде. Тогда, если* $n=m_1=m_2$, *то для любого комплексного* z, *при* $n\to+\infty$, *выполняются следующие равенства*

$$e^{iz}-\pi_{n,2n}{}^1(z,e^{i\xi})=\frac{(-1)^n i^{n+1} z^{3n+1}}{(3n)!}\sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})\pi}{3n}}\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^n e^{iz\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}(1+o(1)),$$

$$e^{2iz}-\pi_{n,2n}{}^2(z,e^{2i\xi})=\frac{i^{n+1} z^{3n+1}}{(3n)!}\sqrt{\frac{\pi}{3n}}\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^n e^{2iz}\left(\sqrt{1+\sqrt{3}}(-1)^n e^{\frac{\sqrt{3}}{3}iz}+\frac{\sqrt{6}}{3}e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}iz}\right)(1+o(1)).$$

Литература

1. Аптекарев, А.И. О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент/А.И. Аптекарев // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. – 1981 – №1. – С. 68-74.
2. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного: Учеб. Для вузов. – 3-е изд./ Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин // М.: Наука, гл. ред. физ. – мат. лит., – 480 с.