**Р. С. Мельников**
*(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)*

**ОПЕРАТОРЫ ВИНЕРА-ХОПФА НАД ЛИНЕЙНО УПОРЯДОЧЕННЫМИ АБЕЛЕВЫМИ ГРУППАМИ**

Всюду ниже $X$ обозначает дискретную линейно упорядоченную абелеву группу, $X_+$ – положите-льный конус в $X$. Это значит, что в $X$ фиксирована подполугруппа $X_+$, содержащая единичный характер 1, причем $X_+ \cap X_+^{-1} = \{1\}$ и $X = X_+ \cup X_+^{-1}$.

Через $\widehat{\phi}$ (или $F\phi$) мы будем обозначать преобразование Фурье функции $\phi$ из $L^1(G)$ или $L^2(G)$, т. е. (при соответствующей интерпретации интеграла):

$$\widehat{\phi}(\xi) = \int_G \phi(x)\overline{\xi(x)}dx, \quad \xi \in X,$$

где $dx$ – нормированная мера Хаара группы $G$.

Рассмотрим пространство

$$l_2(X_+) = \{ f : X_+ \to C : \sum_{\chi \in X_+} \left| f(\chi) \right|^2 < \infty \}$$

(здесь каждая функция f имеет не более чем счетный носитель) со скалярным произведением

$$< f, g >= \sum_{\chi \in X_+} f(\chi)\overline{g(\chi)}.$$

Пространства $l_p(X_+)$ определяются аналогично.

**Определение.** Пусть $k \in l_2(X)$. Определим оператор Винера-Хопфа $W_k$ в $l_2(X_+)$ равенством

$$W_k g(\chi) = 1_{X_+}(k * g).$$

Таким образом,

$$W_k g(\chi) = \sum_{\xi \in X_+} k(\chi\xi^{-1})g(\xi) \ \ (\chi \in X_+).$$

Обратное преобразование Фурье функции $k$, т. е. функция

$$F^{-1}k(x) = \sum_{\xi \in X} k(\xi)\xi(x),$$

называется символом оператора $W_k$.

**Теорема 1.** *Пусть $k \in l_2(X_+)$, $F^{-1}k \in C(G)$. Оператор Винера-Хопфа $W_k$ в $l_2(X_+)$ будет фредгольмовым тогда и только тогда, когда $F^{-1}k \in \Phi(G)$. При этом $ind\, W_k = -ind(F^{-1}k)$.*

**Теорема 2.** *Оператор $T_\phi$ с символом $\phi \in L^2(G)$ унитарно эквивалентен оператору $W_k$, где $k = \widehat{\phi}$, и наоборот, для любого $k \in l_2(X)$ оператор $W_k$ унитарно эквивалентен оператору $T_\phi$ с символом $\phi = F^{-1}k$.*

Теорема 2 позволяет перенести на случай операторов Винера-Хопфа и другие свойства операторов Тёплица над группами.

**Следствие 1.** *Оператор $W_k$ ограничен, если $k \in l_2(X)$, $F^{-1}k \in L^1(G)$. При этом $\|W_k\| = \|F^{-1}k\|_\infty$.*

**Следствие 2.** *Для любой функции $\phi \in L^2(G)$, удовлетворяющей условию $\widehat{\phi} \in l_1(X)$, оператор $T_\phi$ ограничен.*

**Следствие 3.** *Пусть $F^{-1}k \in C(G)$. Если оператор $W_k$ полуфредгольмов, то функция $F^{-1}k$ обратима в $L^\infty(G)$.*

**Литература**

1 Пеллер, В.В. Операторы Ганкеля и их приложения: монография / В.В. Пеллер; пер. с англ. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 1028 с.

2 Adukov, V. Wiener-Hopf operators on a subsemigroup of a discrete torsion free abelian group // Int. Eq. Oper. Th. – 1993. – 16. – P. 305 – 332.

3 Миротин, А.Р. Фредгольмовы и спектральные свойства тёплицевых операторов в пространствах $H^p$ над упорядоченными группами // Матем. сборник. – 2011. – 202, № 5. – С. 101 – 116.