Д. А. Синица
(ГГУ. Ф. Скорины, Гомель)

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАВИСИМЫМИ ОТ ВРЕМЕНИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Постановка задачи восстановления нестационарных потенциалов состоит в следующем. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v(x,t)w,\ w = w(x,t),\ (x,t) \in [0,b] \times [0,t_f] =: \Omega, \tag{1}$$

$$w(0,t) = u(t),\ w(b,t) = 0,\ w(x,0) = 0. \tag{2}$$

Функция $v(x,t)$ называется нестационарным потенциалом. Представляет интерес задача восстановления потенциала v в классе кусочно-гладких функций по данным измерений функции w в фиксированной точке $x^* \in (0,1)$, то есть по функции

$$y(t) = w(x^*,t),\ \forall t \in [0,t_f]. \tag{3}$$

Таким образом, для численной параметризации решений задачи нестационарных потенциалов можно использовать метод функциональной идентификации /1/. Наряду с задачей (1)–(3) представляет интерес задача определения нестационарного коэффициента теплопроводности $\lambda(x,t)$ исходя из системы уравнений

$$c(x,t)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,t)\frac{\partial T}{\partial x}\right),\ (x,t) \in \Omega, \tag{4}$$

$$T(x,0) = T_0(x),\quad T(0,t) = g_1(t),\quad T(b,t) = g_2(t), \tag{5}$$

$$y(t) = T(x_*,t),\ \forall t \in [0,t_f]. \tag{6}$$

Будем предполагать, что функции $c, \lambda : \Omega \to R$, таковы, что существует единственное непрерывно дифференцируемое в области Ω решение $T : \Omega \to R$ начально-краевой задачи (4), (5).

Идентификация λ, основанная на функциональном подходе, представляет собой итерационный процесс минимизации целевого функционала

$$J(\lambda) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left(T(\lambda : x_*, t) - y(t)\right)^2 dt. \tag{7}$$

Итерации, определяющие минимизирующую последовательность для функционала (7), задаются рекурсией $\lambda_{k+1} = \lambda_k + \beta_k l_k,\ \lambda_0 = \lambda^* l\ _k = J'_{\lambda_k} - \gamma_{k-1} l_{k-1},\ l_{-1} = 0,\ k \in \{0,1,...\}$, где λ^* – заданное начальное приближение, λ_{k+1} $-k+1$-е приближение для λ, l_k – направление спуска на -й итерации, – градиент функционала (7) в точке $\lambda = \lambda_k$, параметры β_k и γ_{k-1} указываются.

Отметим, что рассмотренные выше задачи имеют континуум решений, которые параметризуются при численном подходе начальными условиями алгоритма.

Литература

1. Borukhov V.T., Tsurko V.A., Zayats G.M. The functional identification approach for numerical reconstruction of the temperature-dependent thermal-conductivity coefficient // International Journal Heat and Mass Transfer, 2009, v. 52, p. 232–238.