Е. И. Худицкая
(ГрГу им. Я. Купалы, г. Гродно)

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'^2-(ax+by)x'-a_1x^2-b_1xy-c_1y^2=0, \\ y'^2-(ax+by)y'-a_1x^2-b_1xy-c_1y^2=0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a=a(t), b=b(t), a_1=a_1(t), b_1=b_1(t), c_1=c_1(t)$ – функции, аналитические по t, $|a|+|b|\neq 0$.

Система (1) равносильна совокупности следующих систем:

$$x'-y'=0,\ x'^2-(ax+by)x'-a_1x^2-b_1xy-c_1y^2=0; \tag{2}$$

$$x'-y'-(ax+by)=0,\ \ x'^2-(ax+by)x'-a_1x^2-b_1xy-c_1y^2=0\,. \tag{3}$$

Найдем необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических точек у решений системы (1) при $b=a$. Из первого уравнения системы (2) имеем, что, где – произвольная постоянная. Тогда второе уравнение системы (2) примет вид

$$x'^2=((a+b)x-bC)x'+a_1x^2+b_1x(x-C)+c_1(x-C)^2, \tag{4}$$

где – произвольная постоянная. Для уравнений первого порядка не первой степени получены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических точек [1]. Согласно которым найдем условия, при которых уравнение (4) имеет свойство Пенлеве.

Выполнив в системе (3) при $b=a$ замену $x\to \frac{1}{2}e^{\int adt}+x$ для компоненты *x* получаем уравнение

$$x'^2=(a_1-b_1+c_1)x^2+(a_1-c_1)e^{\int adt}x+\frac{1}{4}e^{2\int adt}(a^2+a_1+b_1+c_1). \tag{5}$$

Используя классификацию по свойству Пенлеве биномиальных дифференциальных уравнений Брио и Буке, получим, что решение уравнения (5) не имеет подвижных критических особых точек только, если выполняется одно из условий:

$$a_1-b_1+c_1=0, a^2+a_1+b_1+c_1=0, c_1\neq a_1; \tag{6}$$

$$a_1-b_1+c_1\neq 0, b_1^2-4c_1a_1-a^2(a_1-b_1+c_1)=0; \tag{7}$$

$$b_1=-2c_1, a_1=c_1. \tag{8}$$

Таким образом, справедлива

Теорема. *Для того, чтобы система (1) при* $b=a$ *имела свойство Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы решения уравнения (4) не имели подвижных критических особых точек и выполнялось одно из условий (6)–(8).*

Литература

1 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 718 с.