УДК 519.2

ОТКРЫТАЯ СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАРАНТИННЫМ УЗЛОМ

О.В. Якубович[1], Ю.Е. Летунович[1], В.Е. Евдокимович[2]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта*, *Гомель*

OPEN QUEUEING NETWORK WITH QUARANTINE NODE

O.V. Yakubovich[1], Y.E. Letunovich[1], V.E. Evdokimovich[2]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University of Transport*, *Gomel*

Исследуется марковская открытая сеть с карантинным узлом. Заявки поступают в обычные экспоненциальные узлы и проверяются на стандартность. Если заявка признается нестандартной, она направляется в карантинный узел, где осуществляется восстановление ее качеств, после чего заявка продолжает движение по сети. Устанавливаются условия эргодичности и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний модели.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания*, *карантинный узел*, *эргодичность*, *стационарное распределение.*

An open Markov queueing network with quarantine node is considered. Customers arrive in usual exponential nodes and are verified for standard. If a customer does not comply with the standard it is sent to the quarantine node, where its quality is restored. After that the customer continues to move through the network. The conditions of ergodicity and an analytical view of stationary distribution of the network states probabilities are found.

Keywords: *queueing network*, *quarantine node*, *ergodicity*, *stationary distribution.*

Введение

Теория сетей массового обслуживания предоставляет мощный математический аппарат для моделирования реальных объектов, имеющих сетевую структуру. В связи со стремительным развитием сферы информационных технологий в последнее время появляется много интересных моделей, позволяющих учитывать требования современности [1]–[5]. Нахождение стационарного распределения вероятностей состояний модели является центральным вопросом и отправной точкой дальнейших исследований.

Сети с карантинным узлом позволяют моделировать ситуации, когда узлы сети имеют защиту от заявок с нестандартными качествами. Наличие в сети карантинного узла может учитывать ситуацию, когда в сети есть антивирусное программное обеспечение, позволяющее как проверять входящую информацию на наличие вирусов, так и «лечить» зараженные объекты. В настоящей работе рассматривается модель открытой сети, в которую поступают пуассоновские потоки заявок. Сеть состоит из обычных узлов и одного карантинного узла. Заявки поступают извне пуассоновским потоком и с заданными вероятностями направляются в очереди обычных узлов. Заявки в обычных узлах получают обслуживание, время которого имеет экспоненциальное распределение. Пребывая в очереди узла, заявки проверяются на стандартность (например, на отсутствие вирусов, дефектность и т. д.). После окончания времени проверки, имеющего показательное распределение, заявка с заданной вероятностью может быть признана нестандартной, после чего мгновенно направляется в карантинный узел. Для марковского процесса, описывающего исследуемую сеть, устанавливаются условия эргодичности и определяется стационарное распределение в мультипликативной форме.

1 Изолированный узел

1.1 *Изолированный узел с проверкой заявок.* Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ.

Каждая заявка, находящаяся в системе, проверяется на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром $\nu(n)=\nu/n$, $n\neq 0$, где n – число заявок в системе, ν – некоторая положительная постоянная. Каждая заявка после окончания проверки либо с вероятностью p признается нестандартной и покидает систему, либо с вероятностью $1-p$ признается стандартной и остается в системе.

Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления, проверки и имеют показательное распределение с параметром μ. Порядок обслуживания заявок произвольный.

Функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t описывается случайным процессом $n(t)$, где $n(t)$ – количество заявок в системе в момент времени t. Тогда $n(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = \{n, n \geq 0\}$.

Предположим, что $\{p(n), n \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(n)\left[\lambda + (\mu + \nu p)I_{\{n\neq 0\}}\right] =$$
$$= p(n-1)\lambda I_{\{n\neq 0\}} + p(n+1)(\mu + \nu p),\ n \in X.$$

***Теорема* 1.1.** *При выполнении неравенства*

$$\frac{\lambda}{\mu + \nu p} < 1$$

марковский процесс $n(t)$ *эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид*:

$$p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu + \nu p}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu + \nu p}\right).$$

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия.

1.2 *Изолированный карантинный узел.* Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает пуассоновский поток нестандартных заявок с параметром λ. В системе производится восстановление качеств нестандартных заявок (обслуживание). Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления и имеют показательное распределение с параметром μ. Порядок обслуживания заявок произвольный.

Функционирование рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t описывается случайным процессом $n(t)$, где $n(t)$ – количество заявок в системе в момент времени t. Тогда $n(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и счетным пространством состояний $X = \{n, n \geq 0\}$.

Предположим, что $\{p(n), n \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $n(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(n)\left[\lambda + \mu I_{\{n\neq 0\}}\right] =$$
$$= p(n-1)\lambda I_{\{n\neq 0\}} + p(n+1)\mu,\ n \in X.$$

***Теорема* 1.2.** *При выполнении неравенства*

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

марковский процесс $n(t)$ *эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид*:

$$p(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия.

2 Открытая сеть

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N узлов со структурой, описанной в пункте 1.1, и $(N+1)$-го узла со структурой, описанной в пункте 1.2. В сеть поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ.

Каждая заявка независимо от других заявок направляется в i-ый узел с вероятностью p_{0i} $\left(i = \overline{1, N}\right)$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N} p_{0i} = 1$.

Каждая заявка в i-ом узле проверяется на стандартность. Времена проверки независимы, не зависят от процессов поступления, обслуживания и имеют показательное распределение с параметром $\nu_i(n_i) = \nu_i / n_i$, $n_i \neq 0$, где n_i – число заявок в i-ом узле, ν_i – некоторая положительная постоянная $\left(i = \overline{1, N}\right)$.

В каждом из N узлов находится экспоненциальный прибор, времена обслуживания заявок прибором i-го узла независимы, не зависят от процесса поступления, проверки и имеют показательное распределение с параметром μ_i $\left(i = \overline{1, N}\right)$. Порядок обслуживания заявок произвольный. Каждая заявка после завершения обслуживания в i-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел с вероятностью p_{ij}, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{ij} + p_{i0} = 1,\ i = \overline{1, N}\right)$. Каждая заявка после окончания проверки в i-ом узле с вероятностью p_i признается нестандартной и независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь $(N+1)$-го узла, а с вероятностью $1 - p_i$ признается стандартной и остается в i-ом узле.

В $(N+1)$-ом узле, который назовем карантином, осуществляется восстановление качеств (лечение) нестандартных заявок. Времена обслуживания заявок в $(N+1)$-ом узле независимы, не зависят от процессов поступления и имеют показательное распределение с параметром μ_{N+1}. Порядок обслуживания заявок произвольный. Каждая заявка после обслуживания в $(N+1)$-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь j-го узла с вероятностью p_{N+1j}, т. е. «вылечивается» и продолжает движение по сети, а с вероятностью p_{N+10} покидает сеть $\left(\sum_{j=1}^{N} p_{N+1j} + p_{N+10} = 1\right)$.

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{N+1}(t)\right)$, где $x_i(t)$ – число заявок в i-ом узле в момент времени t $\left(i = \overline{1, N+1}\right)$.

Процесс $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным пространством состояний

$$X = \left\{ x = \left(n_1, n_2, ..., n_{N+1}\right) : n_i \geq 0, i = \overline{1, N+1} \right\}.$$

Уравнения трафика имеют вид

$$\varepsilon_i = p_{0i} + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \frac{\mu_j}{\mu_j + \nu_j p_j} p_{ji} + \varepsilon_{N+1} p_{N+1i}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\varepsilon_{N+1} = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \frac{\nu_j}{\mu_j + \nu_j p_j} p_j.$$

Введем следующие обозначения:

$$p_{0i}^* = p_{0i}, \quad p_{ji}^* = \frac{\mu_j}{\mu_j + \nu_j p_j} p_{ji},$$

$$p_{jN+1}^* = \frac{\nu_j p_j}{\mu_j + \nu_j p_j}, \quad p_{N+1i}^* = p_{N+1i}.$$

Будем предполагать, что матрица маршрутизации $P^* = \left(p_{ji}^*, i, j = \overline{0, N+1}\right)$, где $p_{00}^* = p_{0N+1}^* = 0$, неприводима. Система уравнений трафика имеет единственное положительное решение $\left(\varepsilon_i, i = \overline{1, N+1}\right)$, что можно доказать, записав уравнения трафика через введенные обозначения вероятностей переходов. В результате получаем систему уравнений трафика сети Джексона, для которой доказано существование единственного положительного решения [3].

Пусть $\{p(x), x \in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид

$$p(x)\left(\lambda + \sum_{i=1}^{N} \left(\mu_i + \nu_i p_i\right) I_{\{n_i \neq 0\}} + \mu_{N+1} I_{\{n_{N+1} \neq 0\}}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} p(x - e_i) \lambda p_{0i} I_{\{n_i \neq 0\}} + \sum_{i=1}^{N+1} p(x + e_i) \mu_i p_{i0} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} p(x + e_i - e_{N+1}) \nu_i p_i I_{\{n_{N+1} \neq 0\}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p(x + e_i - e_j) \mu_i p_{ij} I_{\{n_j \neq 0\}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} p(x + e_{N+1} - e_i) \mu_{N+1} p_{N+1i} I_{\{n_i \neq 0\}}, \; x \in X.$$

Здесь e_i – единичный вектор размерности $N+1$ с единицей в i-ой позиции.

***Теорема* 2.1.** *Пусть для любых* $i = \overline{1, N}$ *выполняются неравенства*

$$\frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i p_i} < 1, \quad \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}} < 1,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ *эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид*:

$$p(x) = p_1(x_1)\, p_2(x_2) \ldots p_{N+1}(x_{N+1}), \; x \in X,$$

где $p_i(x_i) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i p_i}\right)^{n_i} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_i}{\mu_i + \nu_i p_i}\right), \; i = \overline{1, N},$

$$p_{N+1}(x_{N+1}) = \left(\frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right)^{n_{N+1}} \left(1 - \frac{\lambda \varepsilon_{N+1}}{\mu_{N+1}}\right),$$

$(\varepsilon_i, i = \overline{1, N})$ *– решение системы уравнений трафика.*

Доказательство теоремы проводится стандартным образом: подстановкой стационарного распределения в уравнения равновесия.

Рассматриваемая модель является обобщением модели сети, исследуемой в [3], на случай наличия карантинного узла и проверки заявок на стандартность. Если не вводить проверку на стандартность, т. е. положить параметр ν_i равным нулю $\left(i = \overline{1, N}\right)$, то полученный результат совпадет с результатом, рассматриваемым в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дудовская*, *Ю.Е.* Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания различных типов отрицательных заявок / Ю.Е. Дудовская, О.В. Якубович // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 4 (13). – С. 74–77.

2. *Дудовская*, *Ю.Е.* Исследование многорежимной сети массового обслуживания с абстрактным описанием состояний / Ю.Е. Дудовская, О.В. Якубович // Проблемы физики, математики и техники.– 2014. – № 1 (18). – С. 85 – 89.

3. *Jackson*, *J.R.* Jobshop-like Queueing Systems / J.R. Jackson // Manag. Sci. – 1963. – Vol. 10, № 1. – P. 131–142.

4. *Дудовская*, *Ю.Е.* Открытая марковская сеть массового обслуживания с «карантинным» узлом / Ю.Е. Дудовская, О.В. Якубович // XII Белорусская математическая конференция: материалы Междунар. науч. конф. Минск, 5–10 сентября 2016 г. в 5 ч. / Ред. С.Г. Красовский. – Часть 4. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016. – С. 5–6.

5. *Якубович*, *О.В.* Многорежимная сеть массового обслуживания со случайным временем пребывания сигналов / О.В. Якубович, Ю.Е Дудовская // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 71–74.

Поступила в редакцию 05.04.17.