А. С. Юруть
(ГрГУ им. Я. Купалы, г. Гродно)

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = \left(\alpha_1(t)y + \alpha_0(t)\right)x^2 + \left(\beta_1(t)y + \beta_0(t)\right)x + \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(t)y^i, \\ y' = \left(\gamma_1(t)x + \gamma_0(t)\right)y^2 + \left(\delta_1(t)x + \delta_0(t)\right)y + \sum\limits_{j=0}^{k} b_j(t)x^j, \end{cases} \tag{1}$$

где $n,k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $\alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \beta_0, \gamma_1, \gamma_0, \delta_1, \delta_0, a_i, i = \overline{0,n}, b_j, j = \overline{0,k}$ – функции, аналитические по t.

Используя метод малого параметра, можно получить ограничения на степени n и k для наличия свойства Пенлеве у системы (1), при этом одна из полученных систем имеет вид

$$\begin{cases} x' = \left(\alpha_1(t)y + \alpha_0(t)\right)x^2 + \left(\beta_1(t)y + \beta_0(t)\right)x + \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(t)y^i, \\ y' = \left(\gamma_1(t)x + \gamma_0(t)\right)y^2 + \left(\delta_1(t)x + \delta_0(t)\right)y + b_0(t) + b_1(t)x, \end{cases} \tag{2}$$

где $|\gamma_1(t)| + |\delta_1(t)| + |b_1(t)| \neq 0.$

Найдём условия, при которых система (2) имеет свойство Пенлеве.

Полагая $f = \gamma_0(t)y^2 + \delta_0(t)y + b_0(t), g = \gamma_1(t)y^2 + \delta_1(t)y + b_1(t)$ из системы (2) для компоненты y построим уравнение

$$y'' = \left(\frac{g'_y + \alpha_1(t)y + \alpha_0(t)}{g}\right)y'^2 + \left(f'_y + \frac{g'_t - fg'_y}{g} - \frac{2(\alpha_1(t)y + \alpha_0(t))}{g}f + \right. \\ \left. + \beta_1(t)y + \beta_0(t)\right)y' + \frac{\alpha_1(t)y + \alpha_0(t)}{g}f^2 - \left(\frac{g'_t}{g} + \beta_1(t)y + \beta_0(t)\right)f + f'_t + g\sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^i. \tag{3}$$

Пенлеве классификация дифференциальных уравнений второго порядка с рациональной правой частью содержится в [1]. Согласно [1], чтобы решения уравнения (3) не имели подвижных критических точек, необходимо, чтобы выполнялось одно из условий:

1) $a_i(t) = 0, i = \overline{2}$

при $\gamma_1(t) \neq 0;$ (4)

2) $\alpha_1(t) = 0, a_i(t$

при $\gamma_1(t) = 0, \delta_1(t) \neq 0;$ (5)

3) $\alpha_1(t) = 0, \alpha_0(t$

при $\gamma_1(t) = \delta_1(t) = 0, b_1(t) \neq 0.$ (6)

Теорема. *Для того чтобы система* (2) *не имела подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы имело место одно из условий* (4)–(6).

Далее исследуется вопрос о наличии свойства Пенлеве у системы (2) при выполнении условий (4)–(6).

Литература

1 Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – 718 с.