

ТЕНЕВОЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ
ТРЕХМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

В. Д. Зимин и П. Г. Фрик

Рассмотрен метод восстановления трехмерных полей показателя преломления по экспериментальным данным, полученным с помощью теневого прибора. Метод расчета основан на формуле обращения для преобразования Радона. Приводятся результаты проверки метода на модельной задаче и результаты восстановления температурных полей в жидкости по ракурсным теневым фотографиям оптической неоднородности.

Теневые и интерференционные методы широко применяются для исследования плоских и осесимметричных оптических неоднородностей. В силу таких преимуществ, как высокая скорость и бесконтактность при одновременной регистрации всего поля зрения, интересно распространить оптические методы на более широкий класс задач. Переход от плоских и осесимметричных к произвольным трехмерным оптическим неоднородностям связан со значительным ростом объема обрабатываемой информации и усложнением расчета восстанавливаемого поля показателя преломления.

Проблема восстановления трехмерного поля показателя преломления рассматривалась в ряде работ [1-7]. Были рассмотрены методы расчета неоднородностей и проверялась их работоспособность на модельных задачах.

В данной работе рассмотрен метод обработки ракурсных фотографий трехмерных фазовых неоднородностей, полученных тевым прибором, и восстановления по ним поля показателя преломления с использованием формулы обращения преобразования Радона. Метод проверялся расчетно экспериментально восстанавливались температур-

ные поля в жидкости.

Пусть имеется область, в которой показатель преломления $n = n(x, y, z)$, а за ее пределами $n = n_0 = \text{const}$. Для восстановления трехмерного поля показателя преломления результатов одного просвечивания недостаточно даже при расчете в параксиальном приближении, не учитывающем искривления траекторий лучей. Поэтому будем предполагать, что неоднородность просвечивается плоскими волнами во всевозможных направлениях. Тогда известными величинами можно считать вносимые неоднородностью оптические разности хода l для всех лучей, пересекающих оптическую неоднородность. Траектории лучей в параксиальном приближении считаются прямыми линиями, поэтому совокупность всевозможных лучей, пересекающих область, образует четырехпараметрическое семейство. В качестве параметров удобно выбрать две угловые координаты α и β , характеризующие направление просвечивания s и две линейные координаты p и q в плоскости, перпендикулярной этому направлению и проходящей через начало декартовой системы координат (рис. 1).

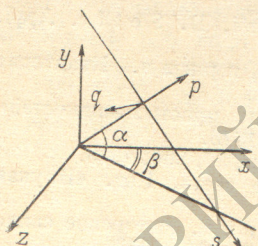


Рис. 1

Введенные параметры однозначно определяют прямую в трехмерном пространстве. Лучи, имеющие одинаковые значения параметров α и β , принадлежат одной и той же плоской волне.

Искомой величиной является функция $f = n - n_0$, зависящая от трех переменных. Известная функция

$$l(\alpha, \beta, p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) ds \quad (1)$$

зависит от четырех переменных, т. е. исходная информация при такой постановке задачи является избыточной. Поэтому можно использовать данные, полученные при фиксированном значении одного из параметров, например β , что соответствует просвечиванию области системой плоских волн, волновые векторы которых лежат в одной плоскости. В силу произвольности выбора системы координат можно без ограничения общности положить $\beta = 0$, а ось q направить параллельно оси z . Тогда экспериментальные данные $l(\alpha, p)$, относящиеся к сечению $z = q = \text{const}$, выражаются через значения функции f в том же самом сечении. Таким образом, расчет неоднородности можно вести для отдельных сечений.

Задача нахождения неизвестной функции, зависящей от N переменных по значениям ее интегралов по всевозможным гиперплоскостям, известна в математике как проблема Радона. Ее решение для двумерного случая дается формулой [8]

$$f(x, y) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} l(\alpha, p) \frac{dp}{(p - p_0)^2}, \quad (2)$$

где $p_0 = x \cos \alpha + y \sin \alpha$.

Значение оптической длины пути луча дают интерференционные методы. Теневой прибор позволяет измерять значения угловых отклонений лучей ε , которые связаны с функцией l следующим образом:

$$\varepsilon(\alpha, p) = \frac{1}{n_0} \frac{\partial l}{\partial p}. \quad (3)$$

Выполняя интегрирование по частям во внутреннем интеграле формулы (2) и учитывая, что $l(p) = 0$ при $p \rightarrow \pm \infty$, получим

$$f(x, y) = -\frac{n_0}{2\pi^2} \int_0^\pi J(\alpha, p_0) d\alpha. \quad (4)$$

Здесь

$$J(\alpha, p_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon dp}{p - p_0}. \quad (5)$$

Интеграл (5) содержит функцию $1/(p - p_0)$, имеющую неинтегрируемую особенность в точке $p = p_0$. Согласно теории обобщенных функций, регуляризация этого интеграла имеет следующий вид [9]:

$$J(\alpha, p_0) = \int_{p_0}^{\infty} \frac{\varepsilon(\sigma, p) - \varepsilon(\alpha, 2p_0 - p)}{p - p_0} dp. \quad (6)$$

Формулы (4)–(6) дают полное решение обратной задачи для трехмерных неоднородностей в параксиальном приближении. Объем расчетов по этим формулам велик из-за большого объема обрабатываемой информации и необходимости интерполирования функции $\varepsilon(\alpha, p)$ по p , так как при вычислении интеграла (6) необходимы значения функции в точках, симметричных относительно p_0 .

Программа для ЭВМ составлялась в двух вариантах. В первом варианте интегралы (6) вычислялись для каждой точки x, y отдельно. Во вто-

ром предварительно вычислялась зависимость $J_k(p_0)$ (где индекс k соответствует номеру направления просвечивания) и запоминалась в виде таблицы. Затем выбиралась сетка по x, y и вычислялась $f(x, y)$, при этом нужные значения $J(\alpha, p_0)$ находились интерполированием вычисленных

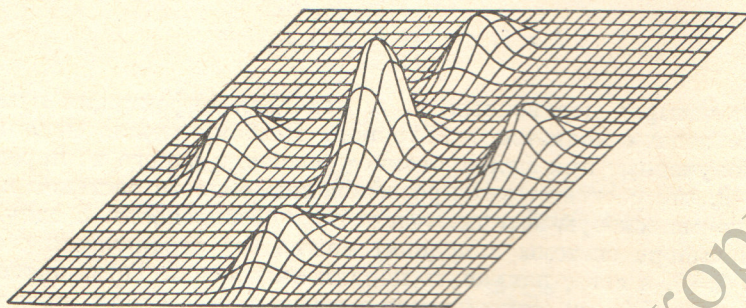


Рис. 2

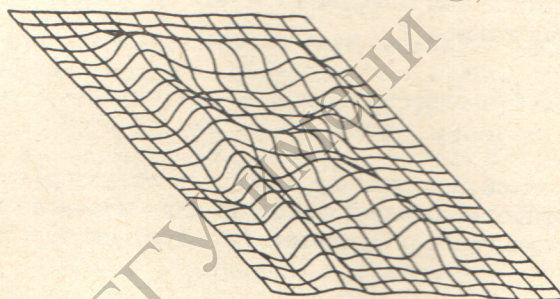


Рис. 3

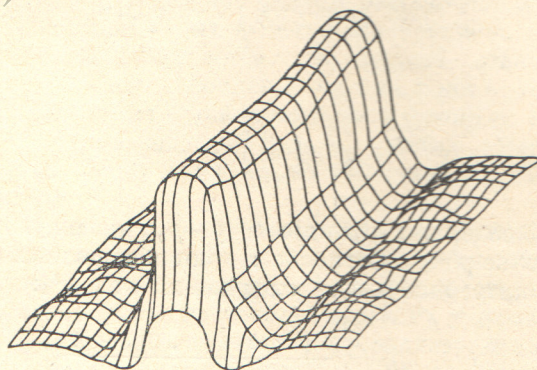


Рис. 4

ранее значений. Второй вариант работает на порядок быстрее первого, причем если в первом случае время счета пропорционально числу точек, в которых ищется $f(x, y)$, то во втором оно почти не зависит от него, так как основная часть времени уходит на вычисление интегралов (6).

Для проверки работоспособности формул и программы рассчитывалась модельная задача. Поле показателя преломления было задано в виде пяти

гауссовых функций разной амплитуды. Функции $\varepsilon(p)$ вычислялись для 10 направлений просвечивания аналитически и по их значениям по формулам (4)–(6) приближенно восстанавливалось поле показателя преломления (рис. 2). Погрешность восстановления составила 3%. Исследовалась зависимость точности от числа направлений просвечивания. При четырех направлениях погрешность возрастает до 7%, при двух — превышает 25%.

При этом появляются значительные искажения в виде ложных максимумов и минимумов, затрудняющих даже качественное опознание исходных функций.

Для экспериментальной проверки метода был выбран объект, не обладающий элементами симметрии. Таким объектом являлась температурная неоднородность в жидкости над нагревателем, выполненным в форме латинской буквы R. На рис. 3 приводятся результаты восстановления температуры в горизонтальном сечении на высоте 1 см над нагревателем. Расчет производился по результатам 10 просвечиваний. Угловые отклонения ε регистрировались на теневом приборе Свиль-80. Обработка велась на ЭВМ М-220М, время счета 30 мин.

Для количественного сравнения восстанавливалось поле температур над линейным источником тепла длиной 4 см. Одновременно производились измерения температуры термомпарным зондом (рис. 4). Следует отметить, что в этом случае из-за наличия плоскости симметрии достаточно просвечивать неоднородность в интервале углов от 0 до $\pi/2$, так как $J(\alpha, p_0) = J(\pi - \alpha, p_0)$. Но интегрирование по α необходимо проводить от 0 до π , а не до $\pi/2$, так как для плоскостей α и $\pi - \alpha$ значения $p_0 = x \sin \alpha + y \sin \alpha$ различны. При интегрировании по углу каждая зависимость $J_k(p_0)$ используется дважды. Эта неоднородность просвечивалась в шести направлениях. Расхождения с показаниями термомпары не превышали 10%. При этом следует учитывать, что из-за малой ширины конвективного факела (4 мм) термомпарный зонд не дает точных показаний.

Литература

- [1] M. V. Berry, D. F. Sibbs. Proc. Roy. Soc. London, A314, № 1517, 143, 1970.
- [2] G. N. Ramachandran, A. V. Lakshminarayana. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 68, 2236, 1971.
- [3] R. D. Matulka, D. J. Collins. J. Appl. Phys., 42, 1109, 1971.
- [4] H. N. Chau. Opt. Comm., 4, 1, 1971.
- [5] H. G. Junginger, W. von Haerlinger. Opt. Comm., 5, 1, 1972.
- [6] D. W. Sweeney, C. M. Vest. App. Opt., 11, 205, 1972.
- [7] Ю. И. Филенко, В. А. Фадеев, И. Н. Штейн. Сб. «Проблемы голографии», вып. 3, 64, М., 1973.
- [8] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. ГИФМЛ, М., 1962.
- [9] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. Обобщенные функции и действия над ними. ГИФМЛ, М., 1959.

Поступило в Редакцию 14 марта 1975 г.