А. И. Новик
(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)

ПОЛУ-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРА КОПУЛ

Пусть случайные величины X и Y имеют совместную функцию распределения $F_{XY}(x,y)$, маргинальные функции распределения $F_X(x)$, $F_Y(y)$, и $f_X(x)$, $f_Y(y)$ – маргинальные плотности распределения. Тогда совместную плотность распределения $f_{XY}(x,y)$ случайных величин X, Y можно представить в виде:

$$f_{XY}(x,y) = c(F_x(x), F_y(y)) f_X(x) f_Y(y),$$

где плотность копулы $c(F_X(x), F_Y(y))$, определяется по формуле:

$$c(F_X(x), F_Y(y)) = \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_X(x) \partial F_Y(y)}$$

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ – выборки объемом T наблюдений над случайными величинами X, Y соответственно.

Полу-параметрический метод максимального правдоподобия предполагает двухэтапную оценку параметра копулы. На первом этапе используется эмпирическое распределение $\hat{F}_X(x)$ и $\hat{F}_Y(y)$. На втором этапе происходит параметрическая оценка параметра копул.

Предположим, что копула *C(x,y)* принадлежит параметрическому семейству с параметром θ. Логарифмическая функция правдоподобия имеет вид:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \ln c(F_x(x_t), F_Y(y_t)) + \sum_{t=1}^{T} \ln(f_X(x_t) f_Y(y_t))$$

Согласно полу-параметрическому методу максимального правдоподобия в качестве оценки неизвестного параметра θ принимается такое значение $\hat{\theta}$, которое максимизирует функцию *l(θ)*.

$$\hat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta) = \max_{\theta \in \Theta} \sum_{t=1}^{T} \ln c(\hat{F}_x(x_t), \hat{F}_Y(y_t); \theta)$$

Оценка построенная по полу-параметрическому методу является состоятельной и асимптотически нормальной.

Используя статистический пакет R исследуются копулы Клейтона, Гумбеля и Франка при различных значениях параметра θ, проводится оценивание модели полу-параметрическим методом.

Литература

1. Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. Copula Methods in Finance. John Wiley & Sons Ltd. 2004, pp. 49-80.