МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ЗАДАННОЙ ТРОЙНОЙ ФАКТОРИЗАЦИЕЙ

А.Ф. Васильев[1], **Т.И. Васильева**[1,2], **К.Л. Парфенков**[1]

[1]*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины*
[2]*Белорусский государственный университет транспорта*, *Гомель*

ON FINITE GROUPS WITH GIVEN TRIPLE FACTORIZATION

A.F. Vasil'ev[1], **T.I. Vasil'eva**[1,2], **K.L. Parfiankou**[1]

[1]*F. Scorina Gomel State University*
[2]*Belarusian State University of Transport*, *Gomel*

Исследуются конечные группы, имеющие три подгруппы с попарно взаимно простыми индексами. В частности, установлено строение группы, у которой такие подгруппы являются сверхразрешимыми, имеют нильпотентный коммутант и т. п.

Ключевые слова: *конечная группа*, *сверхразрешимая группа*, *наследственная насыщенная формация*, *$\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа.*

Finite groups having three subgroups with pairwise relatively prime indices are studied. In particular, the structure of a group is established with such subgroups that are supersoluble, have a nilpotent commutator subgroup, and so on.

Keywords: *finite group*, *supersoluble group*, *hereditary saturated formation*, *$\mathfrak{F}$-subnormal subgroup.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Согласно Кегелю [1] группа G называется трижды факторизуемой, если в ней найдутся подгруппы A, B и C такие, что $G = AB = AC = BC$. Свойства таких групп в ряде случаев обнаруживают хорошую зависимость от свойств перемножаемых подгрупп [2]–[5]. Однако в общем случае требуются дополнительные предположения относительно группы, чтобы свойства подгрупп-множителей переносились на всю группу.

Заметим, что трижды факторизуемость группы G возникает естественным образом, если G имеет три подгруппы A, B и C, чьи индексы попарно взаимно просты в G. Относительно таких групп хорошо известно, что G абелева, если A, B, и C абелевы; как установил Кегель [1], группа G сохраняет свойство нильпотентности в случае нильпотентности подгрупп A, B и C; Виландт [6] доказал, что разрешимость множителей A, B и C влечет разрешимость всей группы. С другой стороны, из сверхразрешимости A, B и C уже не следует в общем случае сверхразрешимость G. Некоторые достаточные условия сверхразрешимости группы G со сверхразрешимыми подгруппами A, B и C попарно взаимно простых индексов в G рассматривались в работах [7]–[10]. Однако вопрос о строении группы G с тремя сверхразрешимыми подгруппами, чьи индексы попарно взаимно просты в G, оставался открытым. Возникает следующая естественная

Проблема. *Найти* (*конструктивно описать*) *подходящий класс групп $\mathfrak{H}$, которому принадлежит группа G, имеющая три $\mathfrak{F}$-подгруппы* (*сверхразрешимые подгруппы*), *чьи индексы попарно взаимно просты в G, где $\mathfrak{F}$ – непустой класс групп* (*формация*, *класс Фиттинга*, *класс Шунка*).

В настоящей работе указанная выше проблема решается в случае, когда $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация.

1 Предварительные результаты

В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографиях [11], [12].

Для группы G и простого числа p через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка $|G|$, $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа из G, $F(G)$ – подгруппа Фиттинга из G, $F_p(G)$ – p-нильпотентный радикал G, $\mathbf{P}$ – множество всех простых чисел.

Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если из $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$; наследственной, если из $G \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $H \in \mathfrak{F}$ для любой подгруппы H из G. Через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из G, для которой $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Через $\pi(\mathfrak{F})$ обозначается множество всех простых делителей порядков групп из $\mathfrak{F}$.

Функция $f : \mathbf{P} \to \{$формации$\}$ называется локальным экраном. Формация $\mathfrak{F}$ называется локальной, если найдется локальный экран f такой, что $\mathfrak{F}$ состоит из групп G, у которых $G / C_G(H / K) \in f(p)$ для любого главного фактора H / K и каждого $p \in \pi(H / K)$. Всякая локальная формация является насыщенной формацией и наоборот.

Группа G называется дисперсивной по Оре [11, с. 251], если для

$$\pi_{p_i} = \{p_1, p_2, \dots, p_i\} \subseteq \pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\},$$

где $p_1 > p_2 > \dots > p_n$, G имеет нормальную холлову π_{p_i}-подгруппу, $i = 1, \dots, n$.

Напомним, что A-группой называется разрешимая группа, у которой любая силовская подгруппа является абелевой. Класс всех A-групп образует наследственную формацию.

Будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп, $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп, $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп, $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп, $\mathcal{A}$ – класс всех A-групп.

***Лемма* 1.1** [11, лемма 3.9]. *Если H / K – главный фактор группы G и $p \in \pi(H / K)$, то $G / C_G(H / K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \leq C_G(H / K)$.*

***Лемма* 1.2** [11, лемма 4.5]. *Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G / F_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

В дальнейшем в работе $\mathfrak{F}$ обозначает непустую формацию.

Подгруппа H группы G называется $\mathfrak{F}$-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует максимальная цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$$

такая, что $H_i^{\mathfrak{F}} \subseteq H_{i-1}$ для всех $i = 1, \dots, n$.

***Лемма* 1.3** [12, леммы 6.1.6, 6.1.7]. *Пусть H и K – подгруппы группы G и $N \trianglelefteq G$. Пусть $\mathfrak{F}$ – формация, тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то HN / N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G / N*;

2) *если $N \leq H$ и H / N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G / N, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*;

3) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в K и K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G.

Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, тогда справедливы следующие утверждения:

4) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-*субнормальна в K*;

5) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G и K $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то $H \cap K$ $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*;

6) *если $G^{\mathfrak{F}} \leq H$, то H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G*;

7) *если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в G, то H^x $\mathfrak{F}$-субнормальна в G для любого $x \in G$.*

Как в [13] через $w\mathfrak{F}$ обозначается следующий класс групп:

$$w\mathfrak{F} = (G \mid \pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$$

и всякая силовская подгруппа из G является $\mathfrak{F}$-субнормальной в G).

Свойства $w\mathfrak{F}$ установлены в [13], [14]. Приведем некоторые из них.

***Лемма* 1.4.** *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Если $\mathfrak{F}$ – наследственная формация, то $\mathfrak{F} \subseteq w\mathfrak{F}$ и $w(w\mathfrak{F}) = w\mathfrak{F}$* [13, лемма 1.4].

2) *Если $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация, то $w\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация* ([13, теорема B] или [14, следствие 3.4.1]).

В работе [15] был исследован класс групп $w\mathfrak{U}$.

Подгруппа H группы G называется **P**-субнормальной в G, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 < H_1 < \dots < H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ – простое число для любого $i = 1, \dots, n$.

В любой группе всякая $\mathfrak{U}$-субнормальная подгруппа является **P**-субнормальной, а для разрешимых групп имеет место и обратное утверждение. Однако в общем случае оно неверно.

Группа G называется w-сверхразрешимой [15], если в ней любая силовская подгруппа является **P**-субнормальной. Класс групп $w\mathfrak{U}$ состоит из всех w-сверхразрешимых групп.

2 Основные результаты

***Теорема* 2.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация и $\mathfrak{F}$ состоит из разрешимых групп. Если группа G имеет три $\mathfrak{F}$-подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то справедливы следующие утверждения:*

1) *G разрешима*;

2) $G \in w\mathfrak{F}$;

3) *если G метанильпотентна*, *то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из теоремы Виландта.

2) Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой утверждение неверно. Тогда в G имеются три $\mathfrak{F}$-подгруппы A, B и C такие, что индексы $|G{:}A|$, $|G{:}B|$, $|G{:}C|$ попарно взаимно просты, и $G \notin w\mathfrak{F}$. Из того, что A, B и C принадлежат $\mathfrak{F}$ и $G = AB = AC = BC$ следует, что $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть N – минимальная нормальная подгруппа группы G. Если $AN \neq G$, $BN \neq G$ и $CN \neq G$, то $G / N \in \mathfrak{F}$ по выбору G. Если $TN = G$ для некоторой подгруппы $T \in \{A, B, C\}$, то фактор-группа $G / N \simeq T / T \cap N \in \mathfrak{F} \subseteq w\mathfrak{F}$. Поэтому $G^{w\mathfrak{F}} = N$.

Если в G имеется еще одна минимальная нормальная подгруппа N_1 и $N_1 \neq N$, то $G / N_1 \in w\mathfrak{F}$. По утверждению 2) леммы 1.4 $w\mathfrak{F}$ – формация, поэтому $G / (N \cap N_1) \simeq G \in w\mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Следовательно, N – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть $N \subseteq \Phi(G)$. Ввиду утверждения 2) леммы 1.4 $w\mathfrak{F}$ – насыщенная формация. Тогда из $G / \Phi(G) \simeq G / N / \Phi(G) / N \in w\mathfrak{F}$ следует $G \in w\mathfrak{F}$. Это противоречит выбору G. Поэтому можно считать, что $\Phi(G) = 1$. В этом случае в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = NM$, $N \cap M = 1$ и $N = C_G(N) = F(G)$.

Пусть P – силовская p-подгруппа группы G. Предположим, что $N \subseteq P$. Из $G / N \in w\mathfrak{F}$ следует, что P / N является $\mathfrak{F}$-субнормальной подгруппой в G / N. По утверждению 2) леммы 1.3 P – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G.

Допустим теперь, что $P \neq PN$. Заметим, что $|\pi(G)| \geq 3$, поэтому $PN \neq G$. Ввиду теоремы Силова и выбора подгрупп A, B, C найдется $x \in G$ такой, что $P^xN \subseteq L$ для некоторой подгруппы $L \in \{A, B, C\}$. Так как $G / N \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$ и P^xN / N – силовская p-подгруппа группы G / N, заключаем, что P^xN / N $\mathfrak{F}$-субнормальна в G / N. Тогда по утверждению 2) леммы 1.3 P^xN $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Так как $P^xN \subseteq L$ и $L \in \mathfrak{F}$, по утверждению 6) леммы 1.3 P^x $\mathfrak{F}$-субнормальна в P^xN. Откуда P^x – $\mathfrak{F}$-субнормальная подгруппа в G. По утверждению 7) леммы 1.3 P $\mathfrak{F}$-субнормальна в G. Итак, $G \in \mathrm{w}\mathfrak{F}$, что противоречит выбору G. Утверждение 2) доказано.

3) Пусть G – группа наименьшего порядка, для которой утверждение неверно. Тогда G метанильпотентна, в ней есть $\mathfrak{F}$-подгруппы A, B и C, у которых индексы попарно взаимно просты в G, и $G \notin \mathfrak{F}$.

Рассмотрим минимальную нормальную подгруппу N группы G. Из разрешимости G следует, что N – абелева p-группа для некоторого простого p.

Если $AN / N \neq G / N$, $BN / N \neq G / N$ и $CN / N \neq$ $\neq G / N$, то индексы $\mathfrak{F}$-подгрупп AN / N, BN / N и CN / N попарно взаимно просты в G / N. По выбору G фактор-группа $G / N \in \mathfrak{F}$. Если $TN / N =$ $= G / N$ для некоторой подгруппы $T \in \{A, B, C\}$, то $G / N \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $N = G^{\mathfrak{F}}$.

Так как $\mathfrak{F}$ – формация, N является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ следует, что $\Phi(G) = 1$. Тогда в G найдется максимальная подгруппа M такая, что $G = MN$, $N \cap M = 1$, $N = C_G(N)$. Заметим, что $N \subseteq F(G)$ и $F(G)$ является p-группой. Из леммы 1.1 заключаем, что $N = F(G)$. Так как $G^{\mathfrak{N}}$ нильпотентен и G не является нильпотентной группой, $N = G^{\mathfrak{N}}$. Значит, $G / N \simeq M$ – нильпотентная группа. Из $O_p(M) = 1$ заключаем, что N – силовская p-подгруппа группы G.

Пусть S – произвольная силовская q-подгруппа группы M, $q \in \pi(M)$. Тогда S является силовской q-подгруппой группы G и $S^yN \subseteq H$ для некоторой подгруппы $H \in \{A, B, C\}$ и некоторого $y \in G$. Из наследственности $\mathfrak{F}$ и $H \in \mathfrak{F}$ получаем, что $S^yN \in \mathfrak{F}$. Пусть f – локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Заметим, что $F_p(S^yN) = N$. По лемме 1.2 получаем, что $S^yN / F_p(S^yN) \in f(p)$. Это означает, что $S \simeq S^yN / N \in f(p)$, т. е. все силовские подгруппы группы M принадлежат $f(p)$. Ввиду того, что $f(p)$ – формация и M нильпотентна, получаем $M \in f(p)$. Тогда Из $G / C_G(N) = G / N \in f(p)$. Это означает, что N является f-центральным главным фактором группы G. Отсюда и из $G / N \in \mathfrak{F}$ заключаем, что $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие с выбором G. Утверждение 3) доказано. Теорема доказана.

Обобщенным коммутантом [14] группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что G / N является группой с абелевыми силовскими подгруппами.

В [13] установлено, что $\mathrm{w}(\mathfrak{N}\mathfrak{A}) = \mathfrak{N}\mathcal{A} \cap \mathfrak{S}$.

***Следствие* 2.1.1.** *Пусть группа G имеет три подгруппы A, B и C, чьи индексы попарно взаимно просты в G. Если коммутанты подгрупп A, B и C нильпотентены, то в G обобщенный коммутант нильпотентен.*

***Следствие* 2.1.2.** *Если группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то G является* w*-сверхразрешимой группой.*

Доказательство. Утверждение следует из пункта 2) теоремы 2.1 при $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$.

***Следствие* 2.1.3.** *Если метанильпотентная группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Утверждение следует из пункта 3) теоремы 2.1 при $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$.

***Следствие* 2.1.4** [8]. *Если группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, и коммутант G' нильпотентен, то G сверхразрешима.*

Для случая $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ теорема 2.1 может быть уточнена.

***Теорема* 2.2.** *Если группа G имеет три сверхразрешимые подгруппы A, B и C, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то она обладает следующими свойствами*:

1) G w*-сверхразрешима*,

2) *если A, B и C – собственные подгруппы из G, то* $|\pi(G)| \geq 3$,

3) *G имеет нильпотентную длину* ≤ 3,

4) *коммутант G' p-разложим для наименьшего простого делителя p порядка группы G.*

Теорема* 2.3.** *Пусть G – группа и* $|\pi(G)| \geq 3$. *Тогда и только тогда G является сверхразрешимой, когда в G существуют три* **P-субнормальные сверхразрешимые подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G.*

***Следствие* 2.3.1.** *Пусть G – группа и* $|\pi(G)| \geq 3$. *Тогда и только тогда G является сверхразрешимой, когда в G существуют три $\mathfrak{U}$-субнормальные сверхразрешимые подгруппы, индексы которых попарно взаимно просты в G.*

***Следствие* 2.3.2** [16]. *Группа G является сверхразрешимой с порядком, имеющим самое малое три различных простых делителя, тогда и только тогда, когда существуют три максимальные сверхразрешимые подгруппы из G, чьи индексы являются тремя различными простыми числами.*

Согласно [17] и [18], группа $G = AB$ называется произведением взаимно перестановочных (взаимно sn-перестановочных) подгрупп A и B, если A перестановочна с любой (соответственно, субнормальной) подгруппой из B, а B перестановочна с любой (соответственно, субнормальной) подгруппой из A.

Согласно [19] для подгрупп A и B группы G подгруппа A называется наследственно G-перестановочной с B, если $AB^g = B^gA$ для некоторого $g \in \langle A, B\rangle$.

В [20, лемма 4.5] установлено, что если в группе $G = AB$ подгруппа A разрешима, а подгруппа B либо перестановочна с любой субнормальной подгруппой из A, либо наследственно G-перестановочна с любой подгруппой из A, то B $\mathbf{P}$-субнормальна в G.

***Следствие* 2.3.3.** *Если в группе G существуют три сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G, чьи индексы попарно взаимно просты в G, и $G = G_iG_j$ – произведение взаимно перестановочных подгрупп G_i и G_j для любых i, j, то G является сверхразрешимой.*

***Следствие* 2.3.4.** *Если в группе G существуют три сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G_3, чьи индексы попарно взаимно просты в G, и $G = G_iG_j$ – произведение взаимно sn-перестановочных подгрупп G_i и G_j для любых i, j, то G является сверхразрешимой.*

***Следствие* 2.3.5.** *Если в группе G существуют три сверхразрешимые подгруппы G_1, G_2 и G_3, чьи индексы попарно взаимно просты в G, и G_i наследственно G-перестановочна с любой подгруппой из G_j для любых i, j, то G является сверхразрешимой.*

Заключение

В работе для наследственной насыщенной формации разрешимых групп $\mathfrak{F}$ установлено строение группы, в которой есть три $\mathfrak{F}$-подгруппы с попарно взаимно простыми индексами. Применение конструкции $w\mathfrak{F}$, используемой в теореме 2.1, позволяет получить новые результаты в случае, когда $w\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$.

Напомним, что формацией Шеметкова называется формация $\mathfrak{F}$, у которой любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа является либо группой простого порядка, либо группой Шмидта.

***Следствие* 2.1.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная формация Шеметкова, состоящая из разрешимых групп. Если группа G имеет три $\mathfrak{F}$-подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Напомним, что $\mathfrak{F}$ называется решеточной формацией (см., например, [12, с. 248]), если множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп образует подрешетку решетки всех подгрупп в любой группе.

***Следствие* 2.1.6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная насыщенная решеточная формация, состоящая из разрешимых групп. Если группа G имеет три $\mathfrak{F}$-подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то $G \in \mathfrak{F}$.*

***Следствие* 2.1.7.** *Если группа G имеет три разрешимые π-нильпотентные подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то G π-нильпотентна.*

***Следствие* 2.1.8.** *Если группа G имеет три разрешимые π-замкнутые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то G π-замкнута.*

***Следствие* 2.1.9.** *Если группа G имеет три разрешимые π-разложимые подгруппы, чьи индексы попарно взаимно просты в G, то G π-разложима.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kegel, O.H.* Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen / O.H. Kegel // Math. Z. – 1965. – Vol. 87, № 1. – S. 42–48.

2. *Васильев, А.Ф.* К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское, 1987. – Вып. 3. – С. 3–11.

3. *Васильев, А.Ф.* О перечислении локальных формаций с условием Кегеля / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – Гомель, 1993. – Вып. 7. – С. 86–93.

4. *Васильев, А.Ф.* О трижды факторизуемых конечных разрешимых группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Вес. Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 2. – С. 36–39.

5. *Ballester-Bolinches, A.* On formations with the Kegel property / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro // Journal of Group Theory. – 2005. – Vol. 8, № 5. – P. 605–611.

6. *Wielandt, H.* Über die Normalstruktur von mehrfach faktorisierbaren Gruppen / H. Wielandt // J. Austral. Math. Soc. – 1960. – № 1. – S. 143–146.

7. *Васильев, А.Ф.* Рекурсивно распознаваемые локальные формации конечных групп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2009. – № 1 (1). – С. 44–50.

8. *Flowers, N.* On a group with three supersolvable subgroups of pairwise relatively prime indices / N. Flowers, T.P. Wakefield // Arch. Math. – 2010. – Vol. 95, № 4. – P. 309–315.

9. *Guo, W.* On factorisations of finite groups with $\mathfrak{F}$-hypercentral intersections of the factors / W. Guo, A.N. Skiba // Journal of Group Theory. – 2011. – Vol. 14, № 5. – P. 695–708.

10. *Ballester-Bolinches, A.* Triple factorizations and supersolubility of finite groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro // Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. – 2015. – DOI:10.1017/S0013091515 000231.

11. *Шеметков, Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

12. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L.M. Ezquerro. – Dordrecht: Springer, 2006. – 385 p.

13. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 86–91.

14. *Васильев*, *А.Ф.* Конечные группы с обобщенно субнормальным вложением силовских подгрупп / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, А.С. Вегера // Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 259–275.

15. *Васильев*, *А.Ф.* О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

16. *Wang*, *K.* Finite group with two supersoluble subgroups of coprime indices / K. Wang // Northest. Math. J. – 2001. – Vol. 17. – P. 219–223.

17. *Asaad*, *M.* On the supersolubility of finite groups / M. Asaad, A. Shaalan // Arch. Math. – 1989. – Vol. 53, № 4. – P. 318–326.

18. *Alejandre*, *M.* On some permutable products of supersoluble groups / M. Alejandre, A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, M. Pedraza-Aguilera // Rev. Mat. Iberoamericana. 2004. – Vol. 20. – P. 413–425.

19. *Guo*, *W.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // Publ. Math. Debrecen. – 2006. – Vol. 68, № 3–4. – P. 433–449.

20. *Васильев*, *А.Ф.* О произведениях **P**-субнормальных подгрупп в конечных группах / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, № 1. – С. 59–67.

Поступила в редакцию 20.03.17.