В. В. Мироненко, Возмущения дифференциальных систем, не изменяющие временных симметрий, *Дифференц. уравнения*, 2004, том 40, номер 10, 1325–1332

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2004, том 40, № 10, с. 1325–1332

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.925.52

ВОЗМУЩЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ, НЕ ИЗМЕНЯЮЩИЕ ВРЕМЕННЫХ СИММЕТРИЙ

© 2004 г. В. В. Мироненко

Получено уравнение для возмущений дифференциальных систем, не изменяющих оператор сдвига вдоль решений этих систем на симметричном временном промежутке $[-\omega,\omega]$. Такие возмущения, в частности, не изменяют отображения за период $[-\omega,\omega]$ периодической дифференциальной системы. Это обстоятельство облегчает качественное исследование семейств решений дифференциальных систем.

Наряду с исходной дифференциальной системой

$$\frac{dx}{dt}=X(t,x),\quad t\in R,\quad x\in D\subset R^n, \tag{1}$$

будем рассматривать множество возмущенных систем

$$\frac{dx}{dt}=X(t,x)+\alpha(t)\Delta(t,x),\quad t\in R,\quad x\in D\subset R^n, \tag{2}$$

где $\alpha(t)$ – непрерывная скалярная нечетная функция, а $\Delta(t,x)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая вектор-функция. Выясним вопрос об эквивалентности в смысле совпадения отражающих функций [1, с. 11] дифференциальных систем (1) и (2). При совпадении отражающих функций двух систем совпадают их операторы сдвига [2, с. 11–12] на симметричном промежутке вида $[-\tau,\tau]$ [1, с. 12] и, значит, для периодических систем совпадают их отображения за период $[-\omega,\omega]$.

Как известно [1, с. 11], отражающая функция системы (1) обязана удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}X(t,x)+X(-t,F)\equiv 0. \tag{3}$$

Если $V(x)=(V_1(x),V_2(x),\ldots,V_m(x))^{\mathrm{T}}$ – вектор-функция, а $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^{\mathrm{T}}$ – вектор-столбец, то, как всегда, полагаем

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right),\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}.$$

Лемма 1. *Для любых трех вектор-функций* $S(t,x)=(S_1(t,x),S_2(t,x),\ldots,S_n(t,x))^{\mathrm{T}}$, $X(t,x)=(X_1(t,x),X_2(t,x),\ldots,X_n(t,x))^{\mathrm{T}}$, $Y(t,x)=(Y_1(t,x),Y_2(t,x),\ldots,Y_n(t,x))^{\mathrm{T}}$, *из которых функция* S *дважды непрерывно дифференцируема, а функции* X *и* Y *дифференцируемы, имеет место тождество*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}X\right)Y-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}Y\right)X\equiv\frac{\partial S}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}Y-\frac{\partial Y}{\partial x}X\right). \tag{4}$$

Доказательство. Преобразуем левую часть тождества (4):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}X\right)Y-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}Y\right)X\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}X_i\right)Y-\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}Y_i\right)X\equiv$$

$$\equiv\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}X_i\right)Y_j-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}Y_i\right)X_j\equiv$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j}(X_iY_j - Y_iX_j) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial X_i}{\partial x_j}Y_j(t,x) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial Y_i}{\partial x_j}X_j(t,x) \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial x}Y - \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x}X \equiv \frac{\partial S}{\partial x}\left(\frac{\partial X}{\partial x}Y - \frac{\partial Y}{\partial x}X\right).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $F(t,x)$ – отражающая функция системы (1) с непрерывно дифференцируемой правой частью. Тогда для каждой непрерывно дифференцируемой вектор-функции $\Delta(t,x)$ функция*

$$U(t,x) := \frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\Delta(t,x) - \Delta(-t,F(t,x)) \tag{5}$$

удовлетворяет тождеству

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}X + \frac{\partial X}{\partial x}(-t,F)U \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial F}{\partial t}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x}X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta\right) + \frac{\partial \Delta}{\partial t}(-t,F) + \frac{\partial \Delta}{\partial x}(-t,F)X(-t,F) - \frac{\partial X}{\partial x}(-t,F)\Delta(-t,F). \tag{6}$$

Доказательство. Учитывая соотношение (3), простыми выкладками установим тождества

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}X(t,x) \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}\Delta + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial t}(-t,F) - \frac{\partial \Delta}{\partial x}(-t,F)\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Delta(t,x)\right)X -$$

$$-\frac{\partial \Delta}{\partial x}(-t,F(t,x))\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)X(t,x) \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\Delta\right)X - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}X\right)\Delta - \frac{\partial X}{\partial x}(-t,F)\frac{\partial F}{\partial x}\Delta +$$

$$+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial t}(-t,F) - \frac{\partial \Delta}{\partial x}(-t,F)\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\Delta(-t,F))X.$$

К первым двум слагаемым последней части этого тождества применим тождество (4). Тогда после несложных формальных преобразований придем к соотношению

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x}X \equiv \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x}X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta\right) +$$

$$+\frac{\partial \Delta}{\partial t}(-t,F) + \frac{\partial \Delta}{\partial x}(-t,F)X(-t,F) - \frac{\partial X}{\partial x}(-t,F)\Delta(-t,F) - \frac{\partial X}{\partial x}(-t,F)U.$$

Прибавив к левой и правой частям этого соотношения выражение $\frac{\partial X}{\partial x}(-t,F)U$, придем к нужному нам тождеству (6). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть вектор-функция $\Delta(t,x)$ является решением дифференциального уравнения в частных производных*

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial \Delta}{\partial x}(t,x)X(t,x) - \frac{\partial X}{\partial x}(t,x)\Delta(t,x) = 0. \tag{7}$$

Тогда возмущенная дифференциальная система (2), где $\alpha(t)$ – произвольная непрерывная скалярная нечетная функция, эквивалентна дифференциальной системе (1).

Доказательство. Пусть $F(t,x)$ – отражающая функция системы (1). Следовательно, эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (3). Покажем, что она удовлетворяет и тождеству

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)\Delta(t,x) \equiv \Delta(-t,F(t,x)). \tag{8}$$

Для этого введем функцию $U(t,x)$ по формуле (5). Согласно лемме 2, эта функция удовлетворяет тождеству (6). При условиях доказываемой теоремы с учетом соотношения (7) это тождество переписывается в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(t,x)X + \frac{\partial X}{\partial x}(-t,F)U \equiv 0.$$

Кроме того, поскольку для всякой отражающей функции F верно тождество $F(0,x) = x$ [1, с. 11], имеют место соотношения

$$U(0,x) \equiv \frac{\partial F}{\partial x}(0,x)\Delta(0,x) - \Delta(0,F(0,x)) \equiv 0.$$

Таким образом, функция U является решением задачи Коши

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial U}{\partial t}(t,x)X(t,x) + \frac{\partial X}{\partial x}(-t,F)U = 0, \quad U(0,x) = 0.$$

Решение этой задачи существует и единственно [3, с. 66]. Следовательно, имеет место тождество $U(t,x) \overset{t,x}{\equiv} 0$, влекущее за собой тождество (8).

Теперь покажем, что отражающая функция $F(t,x)$ системы (1) является также и отражающей функцией системы (2). Для этого нужно проверить выполнение основного соотношения (3), которое в данном случае должно быть переписано в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(X + \alpha(t)\Delta) + X(-t,F) + \alpha(-t)\Delta(-t,F) \equiv 0. \tag{9}$$

Действительно, последовательно преобразовывая левую часть последнего соотношения и учитывая нечетность функции $\alpha(t)$, приходим к следующей цепочке тождеств:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}(X + \alpha(t)\Delta) + X(-t,F) + \alpha(-t)\Delta(-t,F) \equiv \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}X + X(-t,F) +$$

$$+ \alpha(t)\frac{\partial F}{\partial x}\Delta - \alpha(t)\Delta(-t,F) \equiv \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}X + X(-t,F)\right] + \alpha(t)\left[\frac{\partial F}{\partial x}\Delta - \Delta(-t,F)\right].$$

Оба слагаемых, стоящих в квадратных скобках, тождественно равны нулю. Первое – в силу того, что для отражающей функции системы (1) верно тождество (3), второе – потому, что при условиях теоремы верно тождество (8). Следовательно, тождество (9) выполняется и функция $F(t,x)$ является отражающей функцией системы (2). Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функции $\Delta_k(t,x)$ являются решениями дифференциального уравнения в частных производных (6). Тогда все дифференциальные системы вида*

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(t)\Delta_k(t,x), \tag{10}$$

где $\alpha_k(t)$ – нечетные скалярные непрерывные функции, а стоящий в правой части ряд сходится к непрерывно дифференцируемой функции, эквивалентны между собой в смысле совпадения отражающих функций и все они эквивалентны системе (1).

Доказательство следствия очевидно.

Замечание. В работе [1, с. 24] доказано, что если существует некоторая стационарная система, эквивалентная системе (1), то правая часть этой системы может быть найдена по формуле $Y(x) = X(0,x)$. Учитывая это и следствие, для нас важно установить, когда вектор-функция $\Delta(t,x) := X(t,x) - X(0,x)$ может быть представлена в виде

$$\Delta(t,x) := \Delta^{(0)}(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\Delta_k(t,x), \tag{11}$$

где Δ_k – решения уравнения (7). Последующие рассмотрения направлены на решения этой задачи. Решив ее, мы сможем свести изучение свойств решений нестационарных систем к изучению свойств решений стационарных систем вида $dx/dt = X(0, x)$.

Лемма 3. *Пусть функция $\Delta(t, x)$ определяется формулой (11), где $\alpha_k(t)$ – s раз дифференцируемые, а Δ_k – один раз дифференцируемые функции, являющиеся решениями уравнения (7), и пусть для каждого i, $i = \overline{1, s-1}$, функции $\Delta^{(i)}(t, x)$ определены формулами*

$$\Delta^{(i+1)}(t,x) := \frac{\partial \Delta^{(i)}(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \Delta^{(i)}(t,x)}{\partial x} X(t,x) - \frac{\partial X(t,x)}{\partial x} \Delta^{(i)}(t,x). \tag{12}$$

Тогда справедливы тождества

$$\Delta^{(i)}(t,x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^i \alpha_k(t)}{dt^i} \Delta_k(t,x), \quad i = \overline{0, s}. \tag{13}$$

Доказательство. Будем находить последовательно значения выражений (12) для каждого i, $i = \overline{1, s}$:

$$\Delta^{(0)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Delta_k, \quad \Delta^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\alpha_k \left[\frac{\partial \Delta_k}{\partial t} + \frac{\partial \Delta_k}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} \Delta_k \right] + \frac{d\alpha_k}{dt} \Delta_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d\alpha_k}{dt} \Delta_k,$$

$$\Delta^{(2)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{d\alpha_k}{dt} \left[\frac{\partial \Delta_k}{\partial t} + \frac{\partial \Delta_k}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} \Delta_k \right] + \frac{d^2\alpha_k}{dt^2} \Delta_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^2\alpha_k}{dt^2} \Delta_k, \quad \ldots,$$

$$\Delta^{(s)} = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{d^{s-1}\alpha_k}{dt^{s-1}} \left[\frac{\partial \Delta_k}{\partial t} + \frac{\partial \Delta_k}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} \Delta_k \right] + \frac{d^s\alpha_k}{dt^s} \Delta_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{d^s\alpha_k}{dt^s} \Delta_k,$$

откуда и следует выполнение соотношений (13). Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) функции $\alpha_k(t)$ нечетные, скалярные, линейно независимые на R, m раз дифференцируемые;

2) каждая из m раз дифференцируемых вектор-функций $\Delta_k(t, x)$ является решением уравнения (7).

Тогда существуют скалярные непрерывные функции $a_s(t)$, $s = \overline{0, m}$, для которых имеет место тождество

$$a_0(t)\Delta + a_1(t)\Delta^{(1)} + \ldots + a_m(t)\Delta^{(m)} \overset{t,x}{\equiv} 0, \tag{14}$$

где функции $\Delta^{(k)}(t, x)$ определяются формулами (12). При этом функции $a_k(t)$ можно найти по формулам

$$a_0 = (-1)^{(m)} \begin{vmatrix} \dfrac{d\alpha_1}{dt} & \dfrac{d^2\alpha_1}{dt^2} & \cdots & \dfrac{d^m\alpha_1}{dt^m} \\ \dfrac{d\alpha_2}{dt} & \dfrac{d^2\alpha_2}{dt^2} & \cdots & \dfrac{d^m\alpha_2}{dt^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d\alpha_m}{dt} & \dfrac{d^2\alpha_m}{dt^2} & \cdots & \dfrac{d^m\alpha_m}{dt^m} \end{vmatrix},$$

$$a_1 = (-1)^{(m-1)} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \dfrac{d^2\alpha_1}{dt^2} & \cdots & \dfrac{d^m\alpha_1}{dt^m} \\ \alpha_2 & \dfrac{d^2\alpha_2}{dt^2} & \cdots & \dfrac{d^m\alpha_2}{dt^m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_m & \dfrac{d^2\alpha_m}{dt^2} & \cdots & \dfrac{d^m\alpha_m}{dt^m} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad a_m = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \dfrac{d\alpha_1}{dt} & \cdots & \dfrac{d^{m-1}\alpha_1}{dt^{m-1}} \\ \alpha_2 & \dfrac{d\alpha_2}{dt} & \cdots & \dfrac{d^{m-1}\alpha_2}{dt^{m-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_m & \dfrac{d\alpha_m}{dt} & \cdots & \dfrac{d^{m-1}\alpha_m}{dt^{m-1}} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Доказательство. Формулы (15) определяют решения системы алгебраических при фиксированных (t, x) уравнений

$$\sum_{s=0}^{m} a_s \frac{d^s \alpha_k}{dt^s} = 0, \quad k = \overline{1, m}, \tag{16}$$

относительно переменных $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Будем последовательно преобразовывать левую часть выражения (14). Учитывая лемму 3, имеем

$$\sum_{s=0}^{m} a_s \Delta^{(s)} \equiv \sum_{s=0}^{m} a_s \sum_{k=1}^{m} \frac{d^s \alpha_k}{dt^s} \Delta_k \equiv \sum_{k=1}^{m} \sum_{s=0}^{m} \left(a_s \frac{d^s \alpha_k}{dt^s} \right) \Delta_k.$$

Применяя формулу (16), заключаем, что получившееся выражение тождественно равно нулю, и, значит, имеет место тождество (14). Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть для некоторой m раз дифференцируемой вектор-функции $\Delta(t, x)$ существуют скалярные функции $a_s(t)$, $s = \overline{0, m}$, для которых выполнено тождество (14), где Δ_k определяются формулами (12). Тогда если линейное дифференциальное уравнение*

$$a_0(t)\alpha(t) + a_1(t)\frac{d\alpha(t)}{dt} + \ldots + a_m(t)\frac{d^m \alpha(t)}{dt^m} = 0 \tag{17}$$

имеет m нечетных решений $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_m(t)$, для которых вронскиан-определитель обращается в нуль лишь в изолированных точках, то система

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) + \Delta(t, x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R^n,$$

эквивалентна системе (1) (в этой системе в отличие от системы (2) функция Δ не умножается на $\alpha(t)$).

Доказательство. Запишем систему линейных алгебраических при фиксированных (t, x) уравнений относительно неизвестных $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$

$$\frac{d^i \alpha_1}{dt^i}\Delta_1 + \frac{d^i \alpha_2}{dt^i}\Delta_2 + \ldots + \frac{d^i \alpha_m}{dt^i}\Delta_m = \Delta^{(i)}, \quad i = \overline{0, m-1}. \tag{18}$$

Найдем из этой системы $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$, что по условиям теоремы всегда можно сделать всюду, кроме, быть может, изолированных точек, $t = t_k$. Тем самым из первого уравнения системы (18) можно представить функцию $\Delta^{(0)}$ в виде

$$\Delta^{(0)} = \alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \ldots + \alpha_m \Delta_m.$$

Покажем, что верно следующее соотношение:

$$\frac{d^m \alpha_1}{dt^m}\Delta_1 + \frac{d^m \alpha_2}{dt^m}\Delta_1 + \ldots + \frac{d^m \alpha_m}{dt^m}\Delta_m = \Delta^{(m)}.$$

Для этого выразим из тождества (14) функцию

$$\Delta^{(m)} \equiv -\frac{1}{a_m}(a_0 \Delta^{(0)} + a_1 \Delta^{(1)} + \ldots + a_{m-1}\Delta^{(m-1)}).$$

Найдем функции $\Delta^{(i)}$, $\overline{i = 0, m-1}$, из уравнений (18) и подставим их в левую часть получившегося тождества:

$$\Delta^{(m)} = -\frac{1}{a_m}\left[a_1(\alpha_1\Delta_1 + \alpha_2\Delta_2 + \ldots + \alpha_m\Delta_m) + a_0\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\Delta_1 + \frac{d\alpha_2}{dt}\Delta_2 + \ldots + \frac{d\alpha_m}{dt}\Delta_m\right) + \ldots \right.$$
$$\left.\ldots + a_m\left(\frac{d^{m-1}\alpha_1}{dt^{m-1}}\Delta_1 + \frac{d^{m-1}\alpha_2}{dt^{m-1}}\Delta_2 + \ldots + \frac{d^{m-1}\alpha_m}{dt^{m-1}}\Delta_m\right)\right],$$
$$\Delta^{(m)} = -\frac{1}{a_m}\left(a_0\alpha_1 + a_1\frac{d\alpha_1}{dt} + \ldots + a_{m-1}\frac{d^{m-1}\alpha_1}{dt^{m-1}}\right)\Delta_1 - \tag{19}$$
$$-\frac{1}{a_m}\left(a_0\alpha_2 + a_1\frac{d\alpha_2}{dt} + \ldots + a_{m-1}\frac{d^{m-1}\alpha_2}{dt^{m-1}}\right)\Delta_2 - \ldots - \frac{1}{a_m}\left(a_0\alpha_m + a_1\frac{d\alpha_m}{dt} + \ldots + a_{m-1}\frac{d^{m-1}\alpha_m}{dt^{m-1}}\right)\Delta_m.$$

Функции $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ являются решениями уравнения (17). Следовательно, верны равенства

$$a_0\alpha_j + a_1\frac{d\alpha_j}{dt} + \ldots + a_{m-1}\frac{d^{m-1}\alpha_j}{dt^{m-1}} = -a_m\frac{d^m\alpha_j}{dt^m}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Поэтому соотношение (19) можно переписать следующим образом:

$$\Delta^{(m)} = -\frac{1}{a_m}\left(-a_m\frac{d^m\alpha_1}{dt^m}\right)\Delta_1 - \frac{1}{a_m}\left(-a_m\frac{d^m\alpha_2}{dt^m}\right)\Delta_2 - \ldots - \frac{1}{a_m}\left(-a_m\frac{d^m\alpha_m}{dt^m}\right)\Delta_m =$$
$$= \frac{d^m\alpha_1}{dt^m}\Delta_1 + \frac{d^m\alpha_2}{dt^m}\Delta_2 + \ldots + \frac{d^m\alpha_m}{dt^m}\Delta_m.$$

Таким образом, мы пришли к соотношениям

$$\frac{d^s\alpha_1}{dt^s}\Delta_1 + \frac{d^s\alpha_2}{dt^s}\Delta_2 + \ldots + \frac{d^s\alpha_m}{dt^s}\Delta_m = \Delta^{(m)}, \quad s = \overline{0, m}.$$

Вычислим теперь $\Delta^{(1)}$ через α_k, учитывая записанные выше равенства:

$$\Delta^{(1)} = \frac{\partial\Delta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial\Delta^{(0)}}{\partial x}X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta^{(0)} = \Delta^{(1)} + \sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left(\frac{\partial\Delta_k}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_k}{\partial x}X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta_k\right).$$

Отсюда заключаем, что имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left(\frac{\partial\Delta_k}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_k}{\partial x}X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta_k\right) = 0.$$

Аналогичным образом, вычисляя $\Delta^{(2)}$, придем к соотношению

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{d\alpha_k}{dt}\left(\frac{\partial\Delta_k}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_k}{\partial x}X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta_k\right) = 0.$$

Продолжая этот процесс, получаем равенства

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{d^p\alpha_k}{dt^p}\left(\frac{\partial\Delta_k}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_k}{\partial x}X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta_k\right) = 0, \quad p = \overline{0, m-1},$$

которые можно переписать в виде

$$\frac{d^p\alpha_1}{dt^p}L\Delta_1 + \frac{d^p\alpha_2}{dt^p}L\Delta_2 + \ldots + \frac{d^p\alpha_m}{dt^p}L\Delta_m = 0, \quad p = \overline{0, m-1},$$

где $L\Delta_k = \partial\Delta_k/\partial t + (\partial\Delta_k/\partial x)X - (\partial X/\partial x)\Delta_k$.

Эти соотношения показывают, что функции $L\Delta_1, L\Delta_2, \ldots, L\Delta_m$ при фиксированных (t, x) являются решениями системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{d^p\alpha_1}{dt^p}y_1 + \frac{d^p\alpha_2}{dt^p}y_2 + \ldots + \frac{d^p\alpha_m}{dt^p}y_m = 0, \quad p = \overline{0, m-1}.$$

Единственным решением этой системы при $t \neq t_k$ является нулевое решение. Таким образом, при $t \neq t_k$ имеем

$$L\Delta_k = \frac{\partial\Delta_k}{\partial t} + \frac{\partial\Delta_k}{\partial x}X - \frac{\partial X}{\partial x}\Delta_k = 0 \quad \forall k = \overline{1, m}.$$

Возмущение $\Delta(t, x)$ мы представили в виде $\Delta = \sum \alpha_k\Delta_k(t, x)$, где Δ_k суть решения уравнения (7), т.е. записали нашу возмущенную систему в виде (10). Использованием теоремы 1, а вернее, ее следствия завершаем доказательство теоремы.

Лемма 4. *Пусть* 2ω*-периодическая дифференциальная система (1) с решением* $x(t)$ *и отражающей функцией* $F(t, x)$ *эквивалентна в смысле совпадения отражающих функций некоторой дифференциальной системе с решением* $y(t)$ *и отражающей функцией* $\Phi(t, x)$, *причем имеет место равенство*

$$x(-\omega) = y(-\omega), \tag{20}$$

а $x(t)$ *и* $y(t)$ *продолжимы на* $[-\omega, \infty)$. *Тогда для любого натурального* k *имеют место равенства*

$$x(2k\omega - \omega) = y(2k\omega - \omega). \tag{21}$$

Доказательство проведем методом индукции. Докажем вначале, что утверждение леммы справедливо при $k = 1$. Действительно, согласно основному свойству отражающей функции, имеют место равенства

$$x(\omega) = F(-\omega, x(-\omega)), \quad y(\omega) = \Phi(-\omega, y(-\omega)). \tag{22}$$

В силу эквивалентности дифференциальных систем, о которых говорится в лемме, справедливо также равенство $F(-\omega, x(-\omega)) = \Phi(-\omega, x(-\omega))$. Из соотношения (20) следует, что правую часть этого равенства можно переписать в виде $\Phi(-\omega, x(-\omega)) = \Phi(-\omega, y(-\omega))$, и поэтому правые части равенств (22) совпадают. Таким образом, при $k = 1$ утверждение леммы верно.

Предположим теперь, что утверждение леммы справедливо при некотором k. Это значит, что для этого k имеет место равенство (21). Покажем, что утверждение леммы справедливо и при $k + 1$, т.е. имеет место равенство

$$x(2k\omega + \omega) = y(2k\omega + \omega). \tag{23}$$

Введем функцию $z(t) = x(2k\omega + t)$, которая является решением дифференциальной системы (1) в силу 2ω-периодичности этой системы. Аналогично функция $u(t) = y(2k\omega + t)$ будет решением системы с решением $y(t)$. Обе функции продолжимы на $[-\omega, \omega]$, что следует из продолжимости на $[-\omega, \infty)$ решений $x(t)$ и $y(t)$. В силу сделанного нами предположения имеет место цепочка равенств $z(-\omega) = x(2k\omega - \omega) = y(2k\omega - \omega) = u(-\omega)$.

Следовательно, $z(\omega) = u(\omega)$, что, исходя из определения функций z и u, и означает выполнение равенства (23). Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть* 2ω*-периодическая дифференциальная система (1) с решением* $x(t)$ *эквивалентна в смысле совпадения отражающих функций стационарной системе*

$$dy/dt = X(0, y) \tag{24}$$

с решением $y(t)$ *и выполняются следующие условия:*

А) верно равенство (20);

Б) решение $y(t)$ *ограничено на* $[-\omega, \infty)$;

В) существует число a *такое, что неравенство* $\|y(2k\omega - 3\omega)\| \leq a$ *выполняется для всякого натурального* k;

Г) все решения $z(t)$ *системы (1), для которых верно неравенство* $\|z(-\omega)\| \leq a$, *продолжимы на* $[-\omega, \omega]$.

Тогда решение $x(t)$ *продолжимо и ограничено на* $[-\omega, \infty)$.

Доказательство. Докажем сначала продолжимость решения $x(t)$ на $[-\omega, \infty)$. Это решение продолжимо на $[-\omega, \omega]$, что следует из условия Г), равенства (20) и условия В) (при $k = 1$) : $\|x(-\omega)\| = \|y(-\omega)\| \leq a$. Покажем, что решение $x(t)$ продолжимо и на $[\omega, 3\omega]$. Заметим, что функция $z(t) = x(t + 2\omega)$ является решением системы (1) и для него выполняются соотношения $\|z(-\omega)\| = \|x(\omega)\| = \|y(\omega)\| \leq a$, справедливость которых следует из основного свойства отражающей функции. Тогда по условию теоремы $z(t)$ продолжимо на $[-\omega, \omega]$, т.е. $x(t)$ действительно продолжимо на $[\omega, 3\omega]$. Индукцией по k доказывается, что $x(t)$ продолжимо на $[-\omega, 2k\omega + \omega]$. В силу произвольности k отсюда следует продолжимость $x(t)$ на $[-\omega, \infty)$.

Теперь докажем, что $x(t)$ ограничено на $[-\omega, \infty)$. Из продолжимости на $[-\omega, \omega]$ тех решений $z(t)$ системы (1), для которых выполняется неравенство $\|z(-\omega)\| \leq a$, следует существование числа M, для которого выполняется неравенство $\|z(t)\| \leq M$ для любого t из $[-\omega, \omega]$. Из леммы 4 вытекает, что $x(2k\omega - 3\omega) = y(2k\omega - 3\omega)$ для любого натурального k. Поэтому для $z(t) := x(t + 2\omega k)$ справедливы соотношения $\|z(-\omega)\| = \|x(2k\omega - \omega)\| = \|y(2k\omega - \omega)\| \leq a$ и, значит, в свою очередь имеют место соотношения $\|x(t + 2\omega k\| = z(t) \leq M$ при $t \in [-\omega, \omega]$. Таким образом, для любого натурального k имеет место неравенство, означающее ограниченность решения $x(t)$ на $[-\omega, \infty)$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия А), В) и Г) теоремы 4, а решение $y(t)$ системы (24) является 2ω-периодическим и асимптотически устойчивым (асимптотически неустойчивым). Тогда решение $x(t)$ системы (1) также 2ω-периодично и асимптотически устойчиво (асимптотически неустойчиво).*

Доказательство. Пусть решение $y(t)$ является 2ω-периодическим. Тогда верны равенства

$$x(\omega) = F(-\omega, x(-\omega)) = \Phi(-\omega, x(-\omega)) = \Phi(-\omega, y(-\omega)) = y(\omega) = y(-\omega) = x(-\omega),$$

т.е. $x(\omega) = x(-\omega)$. Это означает, что $x(-\omega)$ является неподвижной точкой отображения за период $[-\omega, \omega]$, откуда и следует 2ω-периодичность решения $x(t)$.

Дальнейшее доказательство следует из факта совпадения отображений $F(-\omega, x)$ и $\Phi(-\omega, x)$ за период $[-\omega, \omega]$ для двух рассматриваемых систем. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим систему

$$dx/dt = a(t)x + b(t)y - a(t)x(x^2 + y^2), \quad dy/dt = -b(t)x + a(t)y - a(t)y(x^2 + y^2),$$

в которой непрерывные и 2π-периодические функции $a(t)$, $b(t)$ таковы, что $\alpha_1(t) := a(t) - 1$ и $\alpha_2(t) := b(t) - 1$ – нечетные функции.

Эта система эквивалентна стационарной системе

$$dx/dt = x + y - x(x^2 + y^2), \quad dy/dt = -x + y - y(x^2 + y^2).$$

Здесь $\Delta = \alpha_1\Delta_1 + \alpha_2\Delta_2$ и $\Delta_1 = (x - x(x^2 + y^2), y - y(x^2 + y^2))^{\mathrm{т}}$, $\Delta_2 = (y, -x)^{\mathrm{т}}$, $X = (x + y - x(x^2 + y^2), -x + y - y(x^2 + y^2))^{\mathrm{т}}$.

Так как стационарная система имеет асимптотически устойчивый предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$, которому соответствуют 2π-периодические решения, то из сказанного следует, что все решения $x(t)$, $y(t)$ рассматриваемой системы, начинающиеся при $t = -\pi$ на окружности $x^2(-\pi) + y^2(-\pi) = 1$, являются 2π-периодическими, а каждое из остальных решений, кроме нулевого, при $t \to \infty$ стремится к одному из указанных периодических.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мироненко В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. Минск, 1986.
2. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., 1966.
3. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1978.

Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию
31.08.2002 г.