А. А. Атвиновский, А. Р. Миротин
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

ОБ ОБРАТИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В R_b-ИСЧИСЛЕНИИ

В докладе решается задача обращения одного класса операторов в банаховом пространстве.

Определение 1. *Пусть* X *– банахово пространство над полем* $\mathbb{C}$. *Будем говорить, что замкнутый плотно определённый оператор* A *в* X *принадлежит классу* $V_b(X)$, *если* $\sigma(A)\cap[0,b]\subseteq\{b\}$ *и для некоторого* $M>0$ *имеем*

$$\left\|(tI-A)^{-1}\right\|\le\frac{M}{b-t},t\in[0,b).$$

Определение 2. *Класс* R_b *состоит из функций* $g\in R[0,b]$, *непрерывных в точке* b.

Функцию $g\in R_b$ можно единственным образом представить в виде

$$g(z)=\int_0^b\frac{d\tau(t)}{t-z}, \qquad (1)$$

где τ *– конечная мера, и интеграл сходится при* $z=b$.

Определение 3 *Пусть функция* $g\in R_b$ *имеет интегральное представление (1),* $A\in V_b(X)$. *Определим оператор* $g(A)$ *формулой*

$$g(A):=\int_0^b(tI-A)^{-1}d\tau(t).$$

Определение 4. *Пусть* $b>0$. *Положим* $Q_b:=\{\phi\mid\phi=1/g,\ g\in R_b\}$.

Лемма 5. *Для того чтобы функция* ϕ *принадлежала классу* Q_b, *необходимо и достаточно, чтобы её можно было представить в виде*

$$\phi(z)=\alpha+\beta z-h(z), \qquad (2)$$

где $h\in R_b$, *интеграл, представляющий* $h(0)$ *по формуле (1), сходится и*

$$\begin{cases}\alpha-h(0)&\ge&0\\ \alpha+\beta b-h(b)&\le&0\\ \beta&<&0.\end{cases}$$

Определение 6. *Пусть* $A\in V_b(X)$. *Для функции* $\phi\in Q[0,b]$ *вида (2) положим*

$$\phi(A):=\alpha+\beta A-h(A),$$

где $h(A)$ *понимается в смысле определения* (1) ($D(\phi(A))=D(A)$).

Теорема 7. *Для любых* $g\in R_b$ *и* $A\in V_b(X)$ *оператор* $g(A)$ *имеет левый обратный* $g(A)^{-1}=\phi(A)$, где $\phi=1/g$, *а правая часть понимается в смысле* Q_b*-исчисления.*