СЕТИ С СИГНАЛАМИ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ И ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВОК В УЗЛАХ

Ю. Малинковский, О. Якубович

Гомельский государственный университет

Гомель, Беларусь

malinkovsky@gsu.by, yakubovich@gsu.by

В настоящей работе исследуется марковская модель открытой сети, в которой перемещаются положительные заявки и сигналы различных типов. Очереди в узлах формируются из положительных заявок. Сигналы с заданной вероятностью могут оказать на состояние узла следующие воздействия: уменьшить длину очереди на единицу, увеличить длину очереди на единицу или не произвести никакого изменения. Время пребывания в узле для положительных заявок каждого типа ограничено экспоненциальной случайной величиной. Определено условие эргодичности марковского процесса, описывающего функционирование сети, стационарное распределение вероятностей состояний найдено в форме произведение множителей, представляющих собой стационарные распределения изолированных узлов.

Ключевые слова: открытая сеть, положительные заявки, сигналы, различные типы, ограниченное время пребывания, условие эргодичности, стационарное распределение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В аналитических исследованиях стационарного функционирования сетей массового обслуживания ключевым является вопрос о нахождении стационарного распределения, которое является отправной точкой большинства исследований в теории массового обслуживания. Для точного нахождения стационарного распределения многомерного процесса, описывающего поведение сети массового обслуживания, используют возможность мультипликативного представления распределения, множители которого характеризуют отдельные узлы. Требования современности диктуют необходимость развития аналитического аппарата исследования объектов, имеющих сетевую структуру, что приводит к появлению новых интересных моделей сетей массового обслуживания.

В настоящей работе рассматривается модель открытой сети, в которую поступают различные типы положительных заявок и различные типы сигналов. Очереди в узлах формируются только из положительных заявок. Сигнал каждого типа, поступая в узел, с заданной вероятностью оказывает одно из следующих воздействий на очередь положительных заявок соответствующего типа, находящихся в узле: уменьшает длину очереди на единицу, увеличивает длину очереди на единицу или не производит никакого изменения. Таким образом, данная модель применима к исследованию сетей, в которых поступающий сигнал либо „исправляется"— становится положительной заявкой, либо „несет разрушение"— становится отрицательной заявкой, либо „отражается "— не оказывает воздействия на узел. Время пребывания в очереди узла для положительных заявок ограничено случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром различным для каждого типа положительных заявок и обратно пропорциональным количеству заявок данного типа, находящихся в узле. Данное предположение может найти применение в моделировании реальных сетей связи, поскольку при передаче запроса часто устанавливается так называемый таймаут, истечение которого означает, что передача запроса не укладывается в планируемый интервал времени, после чего запрос удаляется из очереди.

2. ИЗОЛИРОВАННЫЙ УЗЕЛ

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает M независимых пуассоновских потоков положительных заявок с параметрами λ_1^+, λ_2^+, $\ldots$, λ_M^+ и M независимых пуассоновских потоков сигналов с параметрами λ_1^s, λ_2^s, $\ldots$, λ_M^s. λ_k^+ есть интенсивность поступления положительных заявок k-го типа, λ_k^s есть интенсивность поступления сигналов k-го типа в данную систему. Положительная заявка любого типа, поступившая в систему, увеличивает длину очереди в системе на единицу и требует обслуживания. Сигнал типа k, поступивший в систему, с вероятностью $p(k,-)$ уменьшает длину очереди на одну положительную заявку типа k, если в системе есть положительные заявки соответствующего типа, не изменяет состояние системы, если в ней нет положительных заявок соответствующего типа, с вероятностью $p(k,+)$ увеличивает длину очереди на одну положительную заявку типа k, с вероятностью $p(k,0)$ не производит никаких воздействий на систему. Очевидно, что $p(k,-)+p(k,+)+p(k,0)=1$, для всех $k=\overline{1,\ M}$. Сигналы не требуют обслуживания. В системе находится M экспоненциальных приборов, k-ый прибор обслуживает положительные заявки k-го типа. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания заявок независимы, не зависят от процесса поступления и для положительных заявок k-го типа имеют показательное распределение с параметром μ_k ($k=\overline{1,\ M}$). Каждая положительная заявка k-го типа в очереди системы имеет время пребывания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\nu_k(n_k)=\nu_k/n_k$, если $n_k\neq 0$, $\nu_k(n_k)=0$, если $n_k=0$, где n_k — число заявок k-го типа в системе, ν_k — некоторая постоянная ($k=\overline{1,\ M}$).

Каждое состояние рассматриваемой системы в момент времени t будем характеризовать вектором $n(t)=(n_1(t),n_2(t),\ldots,n_M(t))$, где $n_k(t)$ — число положительных заявок k-го типа в системе в момент t. Тогда $n(t)$ — однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более, чем счетным фазовым пространством $X=\{n=(n_1,n_2,\ldots,n_M),n_i=0,1,\ldots;i=\overline{1,\ M}\}$. Пусть $\{p(n),\ n\in X\}$ — стационарное распределение вероятностей процесса $n(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей рассматриваемой системы имеют следующий вид:

$$p(n)\sum_{k=1}^{M}\left[\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+) + (\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k + \nu_k) I_{\{n_k\neq 0\}}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{M}\left[(\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+))p(n-e_k) I_{\{n_k\neq 0\}} + (\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k + \nu_k)p(n+e_k)\right], \quad n \in X.$$

Здесь e_k — единичный вектор размерности M с единицей в k-ой позиции, $I_{\{x\}}$ — характеристическая функция, принимающая значение 1, если x истинно, и 0 — в противном случае.

Теорема 1. *Пусть для любого $k = 1, \ldots, M$ выполнено условие*

$$\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+)}{\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k + \nu_k} < 1,$$

тогда марковский процесс $n(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид

$$p(n_1, n_2, \ldots, n_M) = \prod_{k=1}^{M}\left[\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+)}{\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k + \nu_k}\right]^{n_k}\left[1 - \frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+)}{\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k + \nu_k}\right].$$

Доказательство. Проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера из требования этой теоремы сходимости ряда:

$$\sum_{n\in X} x(n) = \sum_{n\in X} p(n) \sum_{k=1}^{M}\left[\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+) + (\lambda_k^s p(k,-) + \mu_k + \nu_k) I_{\{n_k\neq 0\}}\right].$$

□

Модель данной системы может быть проинтерпретирована следующим образом. Рассматривается открытая сеть масового обслуживания, состоящая из M узлов. Положительные заявки одного типа, поступающие в сеть пуссоновским потоком с параметром λ^+ с вероятностью $(\lambda_k^+ + \lambda_k^s p(k,+))/\lambda^+$ направляются в k-ый однолинейный узел. Отрицательные заявки одного типа, поступающие в сеть пуссоновским потоком с параметром λ^- с вероятностью $\lambda_k^s p(k,-)/\lambda^-$ направляются в k-ый однолинейный узел. Времена обслуживания в узлах независимы, не зависят от процесса поступления и имеют показательное распределение с параметром $\mu_k + \nu_k$ в k-ом узле ($k = \overline{1, M}$). После обслуживания положительные заявки с вероятностью 1 покидают сеть. Матрица маршрутов очевидно является неприводимой. В такой интерпретации рассмотренная модель системы эквивалентна модели открытой сети с одним типом положительных и отрицательных заявок, исследованной в работе Геленбе [1], а результат теоремы совпадает с результатом, изложенным в [1].

3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОТКРЫТОЙ СЕТИ

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N, узлов со структурой, описанной выше. В сеть поступает простейший поток положительных заявок интенсивности λ^+. Каждая положительная заявка входного потока независимо от других заявок направляется в i-ый узел и становится положительной заявкой k-го типа с вероятностью $p^+_{0(i,k)}$ $(i = \overline{1,N}, k = \overline{1,M})$. Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{M} p^+_{0(i,k)} = 1$. В сеть также поступает простейший поток сигналов интенсивности λ^s. Каждый сигнал входного потока независимо от других направляется в i-ый узел и становится сигналом k-го типа с вероятностью $p^s_{0(i,k)}$ $(i = \overline{1,N},\ k = \overline{1,M})$. Очевидно, что $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{M} p^s_{0(i,k)} = 1$. Сигнал типа k, поступивший в i-ый узел, с вероятностью $p_i(k,-)$ уменьшает длину очереди на одну положительную заявку типа k, если в узле есть положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на узел, если в узле нет положительных заявок соответствующего типа, с вероятностью $p_i(k,+)$ увеличивает длину очереди на одну положительную заявку типа k, с вероятностью $p_i(k,0)$ не оказывает воздействия на узел. Очевидно, что $p_i(k,-) + p_i(k,+) = 1$ для всех $k = \overline{1,\ M}$, $i = \overline{1,\ N}$).

В каждом узле находится M экспоненциальных приборов, k-ый прибор обслуживает положительные заявки k-го типа. Времена обслуживания заявок независимы, не зависят от процесса поступления и для положительных заявок k-го типа в i-ом узле имеют показательное распределение с параметрами $\mu_{(i,k)}$ соответственно $(i = \overline{1,\ N},\ k = \overline{1,\ M})$. Каждая положительная заявка k-го типа в i-ом узле имеет время пребывания, ограниченное экспоненциально распределенной случайной величиной с параметром $\nu_{(i,k)}(n_{i,k}) = \nu_{i,k}/n_{i,k}$, если $n_{i,k} \neq 0$, $\nu_{(i,k)}(n_{i,k}) = 0$, если $n_{i,k} = 0$, где $n_{i,k}$ – число заявок k-го типа в i-ом узле, $\nu_{i,k}$ – некоторая постоянная $(i = \overline{1,N},\ k = \overline{1,\ M})$. Положительная заявка k-го типа, время пребывания которой в i-ом узле закончилось, продолжает движение по сети и ведет себя также, как положительные заявки k-го типа, получившие обслуживание в i-ом узле $(i = \overline{1,N},\ k = \overline{1,\ M})$.

Каждая положительная заявка l-го типа, завершившая обслуживание в i-ом узле, независимо от других заявок мгновенно направляется в очередь j-го узла и становится положительной заявкой m-го типа с вероятностью $p^+_{(i,l)(j,m)}$, или становится сигналом m-го типа с вероятностью $p^s_{(i,l)(j,m)}$, а с вероятностью $p_{(i,l)0}$ покидает сеть. Очевидно, что $\sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{m=1}^{M} (p^+_{(i,l)(j,m)} + p^s_{(i,l)(j,m)}) + p_{(i,l)0} = 1$; $i = \overline{1,N}$; $l = \overline{1,M}$. $p_{(i,l)(j,m)} = p^+_{(i,l)(j,m)} + p^s_{(i,l)(j,m)}$ $(i,j = \overline{1,N};\ l,m = \overline{1,M})$ – вероятность перехода марковской цепи, выражающей перемещение заявок между приборами $(i,j = \overline{1,N};\ l,m = \overline{1,M})$.

Нелинейные уравнения трафика имеют следующий вид:

$$\varepsilon^+_{i,k} = \lambda^+ p^+_{0(i,k)} + \lambda^s p^s_{0(i,k)} p_i(k,+) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} \frac{\varepsilon^+_{j,l}(\mu_{(j,l)} + \nu_{(j,l)})}{\varepsilon^s_{j,l} + \mu_{(j,l)} + \nu_{(j,l)}} (p^+_{(j,l)(i,k)} + p^s_{(j,l)(i,k)} p_i(k,+)),$$

$$\varepsilon^s_{i,k} = \lambda^s p^s_{0(i,k)} p_i(k,-) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{M} \frac{\varepsilon^+_{j,l}(\mu_{(j,l)} + \nu_{(j,l)})}{\varepsilon^s_{j,l} + \mu_{(j,l)} + \nu_{(j,l)}} p^s_{(j,l)(i,k)} p_i(k,-), \quad i = \overline{1,N};\ k = \overline{1,M}$$

Доказательство существования решения нелинейных уравнений трафика проводится с помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке [2].

Состояние рассматриваемой сети в момент времени t будем характеризовать вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$, где $x_i(t) = (x_{i,1}(t),\ x_{i,2}(t),\ \ldots,\ x_{i,M}(t))$ описывает состояние i-го узла, то есть $x_{i,k}(t)$ — число заявок k-го типа в i-ом узле в момент времени t ($i = \overline{1,N},\ k = \overline{1,M}$). Тогда $x(t)$ — однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более, чем счетным фазовым пространством $X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N),\ x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,M}),\ x_{i,k} = 0, 1, 2, \ldots;\ i = \overline{1,N},\ k = \overline{1,M}\}$. Пусть $\{p(x),\ x \in X\}$ — стационарное распределение вероятностей процесса $x(t)$.

Уравнения глобального равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(x)\Big[\lambda^+ + \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\Big(\lambda^s p^s_{0(i,k)} p_i(k,+) + (\lambda^s p^s_{0(i,k)} p_i(k,-) + \mu_{(i,k)} + \nu_{(i,k)}) I_{\{x_{i,k}\neq 0\}}\Big)\Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M}\Big[p(x + e_{i,k})[(\mu_{(i,k)} + \nu_{(i,k)}) p_{(i,k)0} + \lambda^s p^s_{0(i,k)} p_i(k,-)] +$$

$$+ p(x - e_{i,k})\big(\lambda^+ p^+_{0(i,k)} + \lambda^s p^s_{0(i,k)} p_i(k,+)\big) I_{\{x_{i,k}\neq 0\}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}[p(x + e_{i,k} - e_{j,l})(\mu_{(i,k)} + \nu_{(i,k)})\big(p^+_{(i,k)(j,l)} + p^s_{(i,k)(j,l)} p_j(l,+)\big) I_{\{x_{j,l}\neq 0\}} +$$

$$+ p(x + e_{i,k} + e_{j,l})(\mu_{(i,k)} + \nu_{(i,k)}) p^s_{(i,k)(j,l)} p_j(l,-) +$$

$$+ p(x + e_{i,k})(\mu_{(i,k)} + \nu_{(i,k)}) p^s_{(i,k)(j,l)} (p_j(l,-) I_{\{x_{j,l}=0\}} + p_j(l,0))]\Big], \quad x \in X.$$

Здесь $e_{i,k}$ — единичный вектор размерности M^2 с единицей в i,k-ой позиции, $I_{\{x\}}$ — характеристическая функция, принимающая значение 1, если x истинно, и 0 — в противном случае.

Теорема 2. *Пусть для любого $k = 1, \ldots, M$, $i = 1, \ldots, N$ выполнено условие*

$$\frac{\varepsilon^+_{i,k}}{\varepsilon^s_{i,k} + \mu_{(i,k)} + \nu_{(i,k)}} < 1,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \ldots p_N(x_N), \quad x \in X,$$

где

$$p_i(x_i) = \prod_{k=1}^{M} \left[\frac{\varepsilon^{+}_{i,k}}{\varepsilon^{s}_{i,k} + \mu_{(i,k)} + \nu_{(i,k)}}\right]^{x_{i,k}} \left[1 - \frac{\varepsilon^{+}_{i,k}}{\varepsilon^{s}_{i,k} + \mu_{(i,k)} + \nu_{(i,k)}}\right],$$

$(\varepsilon^{+}_{i,k}, \varepsilon^{s}_{i,k},\ i = \overline{1,N};\ k = \overline{1,M})$ *находятся как решение нелинейных уравнений трафика.*

Доказательство теоремы проводится стандартным образом, подстановкой стационарного распределения в уравнения равновесия.

Рассматриваемая модель сети совпадет с моделью сети в [3], если положить $p_i(k,+) = p_i(k,0) = 0$, $\nu_{(i,k)} = 0$ для всех $i = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,M}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe E.* Product-form networks with negative and positive customers // J. Appl. Prob. 1991. V. 28. P. 656–663.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.:ИЛ, 1962.
3. *Gelenbe E., Schassberger R.* Stability of product-form G-networks // Probab. Eng. and Inf. Sci. 1992. V. 6. P. 271–276