УДК 535.21.01

УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА—ПЛАНКА ДЛЯ ГАЗА АТОМОВ, РЕЗОНАНСНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СО СВЕТОВОЙ ВОЛНОЙ

Е. В. Бакланов и *Б. Я. Дубецкий*

Решена задача о движении газа атомов в поле бегущей волны, частота которой близка к частоте атомного перехода между основным и возбужденным состоянием. Для газа малой плотности, когда столкновениями атомов можно пренебречь, получено кинетическое уравнение для матрицы плотности. Когда энергия отдачи мала по сравнению с радиационной шириной линии, для функции распределения получено уравнение Фоккера—Планка, описывающее эффекты светового давления и диффузию частиц в пространстве скоростей. Подробно исследован случай движения одной частицы.

Движение атомов под действием силы резонансного светового давления [1, 2] приводит к явлениям, представляющим интерес для приложений [3]. При действии световой волны на атом в основном состоянии, когда частота волны близка к частоте перехода в возбужденное состояние, возникает сила светового давления, связанная с поглощением фотона. Возврат атома в основное состояние происходит за время жизни возбужденного уровня $1/\gamma$. Благодаря отдаче при спонтанном излучении атом приобретает импульс в произвольном направлении, что приводит к его диффузии в пространстве скоростей.

Сила, действующая на атом, есть $F=\hbar kI\sigma$, где k — волновой вектор фотона, I — плотность потока фотонов световой волны, σ — полное сечение резонансного рассеяния (для $I\sigma/\gamma \ll 1$, σ — сечение резонансной флуоресценции Вайскопфа [4, 5], для произвольной интенсивности оно приведено в [6]). Для интенсивности поля, при которой надо учитывать насыщение $I\sigma/\gamma \sim 1$, т. е. $F \sim \hbar k\gamma$.

Для перехода $3s \rightarrow 3p$ натрия из основного состояния ($\lambda \approx 0.6$ мкм, $\gamma \approx 10^8$ 1/с) ускорение атома $\sim 10^8$ см/с^2. Коэффициент диффузии в пространстве скоростей по порядку величины равен $D \sim (\Delta v)^2/\Delta t$, где $\Delta v = \hbar k/M$ — изменение скорости атома в отдельном акте излучения, $\Delta t \sim 1/\gamma$. Оценка дает $D \sim 10^9$ см^2/с^3. Указанный механизм диффузии не зависит от плотности газа и при давлениях $10^{-2} \div 10^{-3}$ тор его вклад сравнивается с диффузией, определяемой газокинетическим сечением при столкновениях атомов.

Наблюдать эффекты диффузии можно в пучке атомов, движущихся вдоль светового луча. Если частица проходит путь $l \sim 10$ см и имеет скорость $v \sim 10^4$ см/с, то поперечная скорость $u \sim 10^3$ см/с, т. е. может быть больше поперечной скорости в реальных пучках (расходимость пучка становится $\Theta \sim u/v \sim 10^0$).[1]

В ряде случаев учет диффузии является принципиально необходимым. Например, в системе, предложенной в [3], где сила резонансного светового давления используется для накопления атомов на устойчивых круговых орбитах, при движении пучка атомов вблизи поверхности и т. д.

---

[1] Резонансный характер силы не является принципиальным для проведенных оценок (см. разд. 3).

В этой работе дан вывод уравнения для матрицы плотности газа атомов, резонансно взаимодействующих с полем бегущей волны при учете эффекта отдачи.[2] При малом импульсе отдачи получено уравнение типа Фоккера—Планка для функции распределения атомов, которое описывает эффекты светового давления и диффузию.

1. Основные уравнения

Рассмотрим газ атомов в поле бегущей волны, частота которого ω близка к частоте перехода ω_{10} между возбужденным состоянием 1 и основным 0,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t) = \mathbf{e}_0 E e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}} + \text{к. с.},$$

где $\mathbf{k}$, E, $\mathbf{e}_0$ — волновой вектор, амплитуда волны и вектор поляризации соответственно. В дальнейшем для определенности волну будем считать линейно поляризованной. Гамильтониан в представлении взаимодействия системы атом—рассеянные фотоны имеет вид

$$H = i\hbar G\sigma_+ e^{i(\mathbf{kr} - \Omega t)} - i\hbar \sum_{\mathbf{q}} g e^{i(\mathbf{qr} - \Omega_{\mathbf{q}} t)} c_{\mathbf{q}} \sigma_+ + \text{э. с.} \tag{1}$$

Здесь $c_{\mathbf{q}}$ — оператор уничтожения фотона с волновым вектором $\mathbf{q}$ и вектором поляризации $\mathbf{e}$, лежащим в плоскости векторов $\mathbf{e}_0$ и $\mathbf{k}$, $\Omega_{\mathbf{q}} = \omega_{\mathbf{q}} - \omega_{10}$, $\omega_{\mathbf{q}} = c|\mathbf{q}|$, $g = (2\pi\omega/\hbar V)^{1/2} d(\mathbf{ee}_0)$, V — нормировочный объем, $d = \langle 0|\mathbf{de}_0|1\rangle$ — матричный элемент проекции оператора дипольного момента на $\mathbf{e}_0$, $G = idE/\hbar$, $\Omega = \omega - \omega_0$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные функции состояний 0 и 1 имеют вид

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В общем случае базисное состояние системы (без внутренних квантовых чисел атома) задается импульсом атома $\hbar p$ и волновыми векторами n фотонов $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \ldots \mathbf{q}_n$

$$|\mathbf{p}\mathbf{q}_1 \ldots \mathbf{q}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{pr}} c^+_{\mathbf{q}_1} c^+_{\mathbf{q}_2} \ldots c^+_{\mathbf{q}_n} \Phi_0,$$

где Φ_0 — состояние вакуума. Матричные элементы матрицы плотности ρ будем записывать в виде

$$\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\ldots\mathbf{q}_n}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}'_1\mathbf{q}'_2\ldots\mathbf{q}'_{n'}} = \langle \mathbf{p}\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \ldots \mathbf{q}_n|\rho|\mathbf{p}'\mathbf{q}'_1\mathbf{q}'_2 \ldots \mathbf{q}'_{n'}\rangle.$$

Нас интересует матрица плотности атома, для нахождения которой мы должны взять шпур по квантовым числам фотонов

$$\rho^{\mathbf{p}}_{\mathbf{p}'} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{q_1 q_2 \ldots q_n} \rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\ldots\mathbf{q}_n}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\ldots\mathbf{q}_n}.$$

Вывод уравнения для $\rho^{\mathbf{p}}_{\mathbf{p}'}$ с использованием гамильтониана (1) дан в Приложении. Из (П. 5) имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_{\mathbf{pp}'}\right)\rho^{\mathbf{p}}_{\mathbf{p}'} = -\frac{\gamma}{2}\left(\sigma_+\sigma_-\rho^{\mathbf{p}}_{\mathbf{p}'} + \rho^{\mathbf{p}}_{\mathbf{p}'}\sigma_+\sigma_-\right) + \gamma\frac{3}{8\pi}\int d\mathbf{n}\,[1 - (\mathbf{ne}_0)^2]\,\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{q}}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}}\sigma_+ +$$
$$+ Ge^{-i\Omega t}\left(\sigma_+\rho^{\mathbf{p}-\mathbf{k}}_{\mathbf{p}'} - \rho^{\mathbf{p}}_{\mathbf{p}'+\mathbf{k}}\sigma_+\right) - \overset{*}{G}e^{i\Omega t}\left(\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{k}}_{\mathbf{p}'} - \rho^{\mathbf{p}}_{\mathbf{p}'-\mathbf{k}}\sigma_-\right).$$

---

[2] Когда оба уровня имеют конечное время жизни, постановка задачи должна быть иной — необходимо учитывать возбуждение атомов. В такой постановке учет эффекта отдачи при радиационном переходе между уровнями проведен в [7].

Здесь $\omega_{\mathbf{pp}'} = (\hbar/2M)(\mathbf{p}^2 - \mathbf{p}'^2)$, M — масса атома, $\gamma = (4/3)(d^2\omega^3/\hbar c^3)$ — вероятность радиационного перехода $1 \to 0$, $\mathbf{n} = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$, $|\mathbf{q}| = |\mathbf{k}|$. В представлении Вигнера

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \left(\frac{M}{2\pi\hbar}\right)^3 \sum_{\varkappa} \rho^{\mathbf{p}-\varkappa/2}_{\mathbf{p}+\varkappa/2} e^{-i\varkappa\mathbf{r}},$$

где $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{p}/M$, записанное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{\gamma}{2}\left[\sigma_+\sigma_-\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\sigma_+\sigma_-\right] +$$

$$+ \gamma\frac{3}{8\pi}\int d\mathbf{n}\left[1 - (\mathbf{n}\mathbf{e}_0)^2\right]\sigma_-\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \mathbf{n}v_r, t)\sigma_+ + Ge^{-i\Omega t + i\mathbf{kr}}\left[\sigma_+\rho\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}_r}{2}, t\right) -\right.$$

$$\left. - \rho\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_r}{2}, t\right)\sigma_+\right] - G^* e^{i\Omega t - i\mathbf{kr}}\left[\sigma_-\rho\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_r}{2}, t\right) - \rho\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}_r}{2}, t\right)\sigma_-\right]. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}_r = \hbar\mathbf{k}/M$, $v_r = |\mathbf{v}_r|$. После замены $\rho_{01}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) \to \rho_{01}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})e^{i(\Omega t - \mathbf{kr})}$ в (2), где $\rho_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) = \langle i|\rho(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)|k\rangle$, уравнение (2) переписывается в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)\rho_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = G\rho_{01}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}_r}{2}, t\right) + G^*\rho_{10}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}_r}{2}, t\right),\\
&\frac{d}{dt}\rho_{00}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{3\gamma}{8\pi}\int d\mathbf{n}\left[1 - (\mathbf{n}\mathbf{e}_0)^2\right]\rho_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \mathbf{n}v_r, t) -\\
&\qquad - G\rho_{01}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_r}{2}, t\right) - G^*\rho_{10}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_r}{2}, t\right),\\
&\left[\frac{d}{dt} + \frac{\gamma}{2} - i(\Omega - \mathbf{kv})\right]\rho_{10}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = G\left[\rho_{00}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}_r}{2}, t\right) - \rho_{11}\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}_r}{2}, t\right)\right],\\
&\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{t}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Из уравнения (3) можно получить уравнение Фоккера—Планка в случае, когда отдача мала ($v_r \ll v$, $v_r \ll \gamma/k$), а матрица плотности медленно изменяется за время γ^{-1}. Разлагая матрицу плотности в правой части (3) до квадратичных по $\mathbf{v}_r$ членов, получим для функции распределения атомов $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) = \rho_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t}) + \rho_{00}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{t})$ уравнение [3]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\mathbf{n}_r Bf(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_k}D\left(\delta_{ik} - \frac{e_{0i}e_{0k}}{2}\right)f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \qquad (4)$$

где $\mathbf{n}_r = \frac{\mathbf{v}_r}{v_r}$, $B = \frac{\gamma v_r \varkappa}{2}\frac{(\gamma/2)^2}{(\gamma/2)^2(1 + \varkappa) + (\Omega - \mathbf{kv})^2}$, $D = \frac{v_r B}{5}$, $\varkappa = \frac{8|G|^2}{\gamma^2}$.

2. Движение частицы в поле бегущей волны

Пусть в начальный момент $t = 0$ функция распределения имеет вид

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0) = \delta[v - v(0)]\,\delta(z)\,\delta(\mathbf{u}), \qquad (5)$$

где v — проекция скорости на ось z, вдоль которой распространяется волна, $\mathbf{u}$ (u_x, u_y) — поперечная скорость, ось x направлена по $\mathbf{e}_0$. Мы рассматриваем частицу в точке $z = 0$, со скоростью $v(0)$ (распределение от x, y считается независящим).

В уравнении (4) будем считать $v(0) \gg v_r$ и пренебрежем диффузией вдоль оси z. В этом случае решение (4) можно искать в виде $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta[v - v(t)]\,\delta[z - z(t)]\,\Phi(\mathbf{u}, t)$. Для $v(t)$ и $z(t)$ имеем уравнения

$$\frac{dz(t)}{dt} = v(t), \quad \frac{dv(t)}{dt} = B[v(t)], \qquad (6)$$

[3] В отличие от уравнений работы [7] в (3) учтено, что функция распределения рассеянных фотонов анизотропна.

которые соответствуют движению частицы под действием силы светового давления. Для $\Phi(\mathbf{u}, t)$ получаем уравнение диффузии

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = D[v(t)]\left(\frac{\partial^2}{\partial u_y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u_x^2}\right)\Phi, \quad \Phi(\mathbf{u}, 0) = \delta(\mathbf{u}). \tag{7}$$

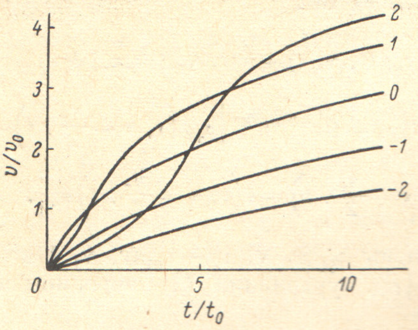

Рис. 1.

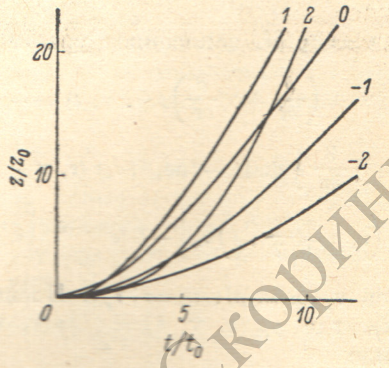

Рис. 2.

В (6), (7) удобно перейти к безразмерным переменным $t \to t/t_0$, $z \to z/z_0$, $v \to v/v_0$, $\mathbf{u} \to \mathbf{u}/u_0$, $\Omega \to \Omega/\Omega_0$, где

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= \frac{(1+\varkappa)^{3/2}}{2kv_r\varkappa}, \quad z_0 = \frac{\gamma(1+\varkappa)^{5/2}}{4k^2v_r\varkappa}, \quad v_0 = \frac{\gamma}{2k}(1+\varkappa)^{1/2}, \\ u_0 &= \sqrt{\frac{\gamma v_r}{20k}}(1+\varkappa)^{3/4}, \quad \Omega_0 = (\gamma/2)(1+\varkappa)^{1/2}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

а в качестве независимой переменной выбрать v. Вместо (6), (7) имеем

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= v[1 + (v-\Omega)^2], \quad \frac{\partial t}{\partial v} = 1 + (v-\Omega)^2, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v} &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_x^2}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Без ограничения общности можно считать $v(0) = 0$, так как переход в систему покоя частицы сводится лишь к изменению Ω ($\Omega \to \Omega - v(0)$). Решение (9) есть

$$\left.\begin{aligned} t &= (1+\Omega^2)v + \frac{v^3}{3} - \Omega v^2, \\ z &= (1+\Omega^2)\frac{v^2}{2} + \frac{v^4}{4} - \frac{2}{3}\Omega v^3, \\ \Phi &= \frac{1}{2^{3/2}\pi v}\exp\left[-(u_y^2 + 2u_x^2)/4v\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

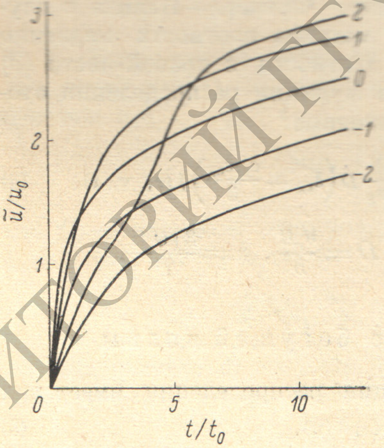

Рис. 3.

Формулы (10) определяют в параметрическом виде (от параметра v) движение частицы вдоль z и ее диффузию по поперечным скоростям. Графики функций $v(t)$, $z(t)$, $\tilde{u}(t) = \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} du_x \int\limits_{-\infty}^{\infty} du_y u_y^2 \Phi\right\}^{1/2} = \sqrt{2v(t)}$ приведены на рис. 1—3.

3. Обсуждение

Первый член в правой части уравнения (4) описывает эффекты светового давления, а второй — эффект диффузии. Уравнение (4) без диффузионного члена есть уравнение непрерывности в пространстве $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, а B — ускорение частицы под действием силы резонансного светового давления, которая, согласно [1, 2], равна

$$\mathbf{F}=\frac{\hbar\mathbf{k}\gamma\varkappa}{2}\,\frac{(\gamma/2)^2}{(\gamma/2)^2\,(1+\varkappa)+(\Omega-\mathbf{kv})^2}=MB. \tag{11}$$

Под действием этой силы частица, ускоряясь, выходит из резонанса за время t_0, проходя при этом путь z_0 (если частица первоначально покоилась) и приобретая скорость v_0.[4] Для линии натрия, обсуждавшейся во Введении, при $\varkappa\sim 1$ имеем $t_0\sim 10^{-6}$ с, $z_0\sim 10^{-3}$ см, $v_0\sim 10^3$ см/с. При больших насыщениях ($\varkappa\gg 1$), несмотря на то что сила стремится к константе ($F\to\hbar k\gamma/2$), частицу можно ускорить до $v_0\sim 10^3\sqrt{\varkappa}$ см/с за счет уширения резонанса полем.

Механизм диффузии, как и световое давление, имеет резонансный характер. Поперечная скорость, приобретаемая частицами из-за диффузии за время t_0 порядка u_0. При $\varkappa\sim 1$ $u_0\sim 10^2$ см/с, а с ростом насыщения $u_0\sim\varkappa^{1/4}$. Коэффициент диффузии при $\varkappa\to\infty$ стремится к константе $D\to\to\gamma v_r^2/10$.

Тензор диффузии в (4) анизотропен. Это связано с анизотропией рассеяния линейно поляризованной волны атомом ($\sigma(\theta)\sim\sin^2\theta$, θ — угол между волновым вектором рассеянного фотона и $\mathbf{e}_0$). Угловая зависимость дифференциального сечения рассеяния приводит к уменьшению компоненты тензора диффузии в направлении $\mathbf{e}_0$ в два раза по сравнению с перпендикулярными к $\mathbf{e}_0$ компонентами. Для волны круговой поляризации такой анизотропии естественно не будет.

Авторы благодарны В. П. Чеботаеву за обсуждение работы.

Приложение

Получим уравнение для величин

$$\rho^{\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_{l'}}_{\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}=\mathrm{Sp}\,\{c^+_{\mathbf{q}_1}\ldots c^+_{\mathbf{q}_l}c_{\mathbf{Q}_1}\ldots c_{\mathbf{Q}_{l'}}\rho\}, \tag{П. 1}$$

где шпур берется по состояниям фотонов, т. е.

$$\mathrm{Sp}\,L=\sum_n\sum_{\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_n}\langle\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_n|\,L\,|\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_L\rangle.$$

Из уравнения $i\hbar\,(\partial\rho/\partial t)=[H,\,\rho]$, пользуясь правилами коммутации c и c^+, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}&=\Big\langle\mathbf{p}\,\Big|\Big[v,\ \rho^{\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\Big]\Big|\,\mathbf{p}'\Big\rangle-\\&-\sum_{\mathbf{q}}\Big[ge^{-i\Omega_{\mathbf{q}}t}\Big(\sigma_+\rho^{\mathbf{p}-\mathbf{q},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{p',\,q_1\ldots q_l}-\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{p'+q,\,q_1\ldots q_l}\sigma_1\Big)-\\&-g^*e^{i\Omega_{\mathbf{q}}t}\Big(\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{q},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{p',\,q_1\ldots q_l q}-\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}'-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l\mathbf{q}}\sigma_-\Big)\Big]+\\&+\sum_{j=1}^{l}g\,(\mathbf{q}_j)\,e^{-i\Omega_{\mathbf{q}_j}t}\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}_j,\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_{j-1}\mathbf{q}_{j+1}\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_++\\&+\sum_{j=1}^{m}g^*\,(\mathbf{Q}_j)\,e^{i\Omega_{\mathbf{Q}_j}t}\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_j,\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_{j-1}\mathbf{Q}_{j+1}\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l},\end{aligned} \tag{П. 2}$$

$$\langle\mathbf{p}\,|\,v\,|\,\mathbf{p}'\rangle=-i\,(\hbar\mathbf{p}^2/2M)\,\delta_{\mathbf{pp}'}+[G\sigma_+e^{-i\Omega t}\delta_{\mathbf{p},\,\mathbf{p}'+\mathbf{k}}-\text{э. с.}],\quad g\equiv g\,(\mathbf{q}).$$

Решение (П. 2) ищем в виде

$$\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}=g\,(\mathbf{q}_1)\ldots g\,(\mathbf{q}_l)\,g^*\,(\mathbf{Q}_1)\ldots g^*\,(\mathbf{Q}_m)\exp\,(i\textstyle\sum t)\,\tilde{\rho}^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l},$$

где $\sum=\sum_{j=1}^{m}(\Omega_{\mathbf{Q}_j}-\Omega)-\sum_{j=1}^{l}(\Omega_{\mathbf{q}_j}-\Omega)$.

---

[4] При перестройке частицы волны по линейному закону $\Omega=kv\,(0)+kBt\,(B=(\hbar k\gamma/2M)\times\times(\varkappa/1+\varkappa)$ сила (11) не зависит от скорости, а частица все время находится в резонансе.

Переходя в (П. 2) от суммы к интегралу и пренебрегая медленной зависимостью функций $g(\mathbf{q})$ и $(\Omega_{\mathbf{q}}+\omega_{10})^2$ от $\Omega_{\mathbf{q}}$ (допускаемая при этом погрешность $\sim\gamma/\omega_{10}$), получим, опуская знак $\sim$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\Sigma+\delta\right)\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}=\left\langle p\left|\left[v,\ \rho^{\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\right]\right|\mathbf{p}'\right\rangle-\gamma\frac{3}{8\pi}\int d\mathbf{n}\,[1-(\mathbf{n}\mathbf{e}_0)^2]\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Omega_{\mathbf{q}}}{2\pi}\Big[e^{-i\Omega t}\left(\sigma_+\rho^{\mathbf{p}-\mathbf{q},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}-\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_+\right)-$$

$$-e^{i\Omega t}\left(\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{q},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l\mathbf{q}}-\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}'-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l\mathbf{q}}\sigma_-\right)\Big]+e^{-i\Omega t}\sum_{j=1}^{l}\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}_j,\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_{j-1}\mathbf{q}_{j+1}\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_++$$

$$+e^{i\Omega t}\sum_{j=1}^{m}\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_j,\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_{j-1}\mathbf{Q}_{j+1}\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l},$$

где $\mathbf{q}=\mathbf{n}\omega_{10}/c$.[5]

Воспользовавшись уравнениями для величин, стоящих под интегралами, перепишем (П. 3) в виде

$$(i\Sigma+\delta)\,\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}-\sum_{j=1}^{l}e^{-i\Omega t}\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}_j,\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_{j-1}\mathbf{q}_{j+1}\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_+-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}e^{i\Omega t}\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_j,\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_{j-1}\mathbf{Q}_{j+1}\ldots\mathbf{Q}_l}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}=-\frac{\partial}{\partial t}\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}+\left\langle\mathbf{p}\left|\left[v,\ \rho^{\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\right]\right|\mathbf{p}'\right\rangle-$$

$$-\frac{\gamma}{2}\left(\sigma_+\sigma_-\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}+\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_+\sigma_-\right)+\gamma\frac{3}{8\pi}\int d\mathbf{n}\,[1-(\mathbf{n}\mathbf{e}_0)^2]\,\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{q},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_+-$$

$$-\gamma\frac{3}{8\pi}\int d\mathbf{n}\,[1-(\mathbf{n}\mathbf{e}_0)^2]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Omega_{\mathbf{q}}}{2\pi}\Big\{[i(\Sigma+\Omega_{\mathbf{q}}-\Omega)+\delta]^{-1}e^{-i\Omega t}\left(\sigma_+R^{\mathbf{p}-\mathbf{q},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}-\right.$$

$$\left.-R^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_+\right)-[i(\Sigma-\Omega_{\mathbf{q}}+\Omega)+\delta]^{-1}e^{i\Omega t}\left(\sigma_-R^{\mathbf{p}+\mathbf{q},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}-R^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}'-\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l\mathbf{q}}\sigma_-\right)\Big\},\quad(\text{П. }4)$$

где

$$R^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}=-\frac{\partial}{\partial t}\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}+\left\langle\mathbf{p}\left|\left[v,\ \rho^{\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\right]\right|\mathbf{p}'\right\rangle-$$

$$-\gamma\frac{3}{8\pi}\int d\mathbf{n}'\left[1-(\mathbf{n}\mathbf{e}_0)^2\right]\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\Omega_{\mathbf{q}'}}{2\pi}\Big\{e^{-i\Omega t}\left(\sigma_+\rho^{\mathbf{p}-\mathbf{q}',\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}\mathbf{q}'}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}-\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}\mathbf{q}'}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_+\right)-$$

$$-e^{i\Omega t}\left(\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{q}',\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l\mathbf{q}'}-\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l\mathbf{q}'}\sigma_-\right)\Big\}+e^{-i\Omega t}\sum_{j=1}^{l}\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}_j,\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_{j-1}\mathbf{q}_{j+1}\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_++$$

$$+\sum_{j=1}^{m}e^{i\Omega t}\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{Q}_j,\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_{j-1}\mathbf{Q}_{j+1}\mathbf{Q}_m\mathbf{q}}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l};$$

$$R^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}'\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l\mathbf{q}}=\left(R^{\mathbf{p}'\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l\mathbf{q}}_{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}\right)^+.$$

Покажем, что слагаемое, содержащее фигурные скобки (П. 4), равно нулю. Для этого достаточно убедиться, что $\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}$, получающаяся из (П. 4) без этого слагаемого, как функция от $\Omega_{\mathbf{Q}_j}$ и $\Omega_{\mathbf{q}_j}$ содержит полюса только в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Для этого достаточно предположить, что это свойство справедливо для $\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_{j-1}\mathbf{q}_{j+1}\ldots\mathbf{q}_l}$, $\rho^{\mathbf{p},\,\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_{j-1}\mathbf{Q}_{j+1}\ldots\mathbf{Q}_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}$ и проиттерировать по правой части уравнения (П. 4). Вычисляя коммутатор в (П. 4), окончательно получим

---

[5] Для получения замкнутых уравнений мы пользуемся методом, аналогичным [8].

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\Sigma+i\omega_{\mathbf{pp}'}\right)\rho^{\mathbf{p},\,Q_1\ldots Q_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}=-\frac{\gamma}{2}\left(\sigma_+\sigma_-\rho^{\mathbf{p},\,Q_1\ldots Q_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}+\rho^{\mathbf{p},\,Q_1\ldots Q_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_+\sigma_-\right)+$$

$$+\gamma\frac{3}{8\pi}\int d\mathbf{n}\,[1-(\mathbf{n}\mathbf{e}_0)^2]\,\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{q},\,Q_1\ldots Q_m}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q},\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_++Ge^{-i\Omega t}\left(\sigma_+\rho^{\mathbf{p}-\mathbf{k},\,Q_1\ldots Q_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}-\rho^{\mathbf{p},\,Q_1\ldots Q_m}_{\mathbf{p}'+\mathbf{k},\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_+\right)-$$

$$-G^*e^{i\Omega t}\left(\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+\mathbf{k},\,Q_1\ldots Q_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}-\rho^{\mathbf{p},\,Q_1\ldots Q_m}_{\mathbf{p}'-\mathbf{k},\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_-\right)+\sum_{j=1}^{l}e^{-i\Omega t}\rho^{\mathbf{p},\,Q_1\ldots Q_m}_{\mathbf{p}'+\mathbf{q}_j,\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_{j-1}\mathbf{q}_{j+1}\ldots\mathbf{q}_l}\sigma_+-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}e^{i\Omega t}\sigma_-\rho^{\mathbf{p}+Q_j,\,Q_j\ldots Q_{j-1}Q_{j+1}\ldots Q_m}_{\mathbf{p}',\,\mathbf{q}_1\ldots\mathbf{q}_l}. \qquad (\text{П. }5)$$

Уравнение (П. 5) для $\rho^{\mathbf{p}}_{\mathbf{p}'\mathbf{q}}$ фактически было использовано в [6] для решения задачи о резонансном рассеянии света атомами.

Литература

[1] A. Ashkin. Phys. Rev. Lett., *25*, 1321, 1970.
[2] А. П. Казанцев. ЖЭТФ, *66*, 1599, 1974.
[3] А. Эшкин. Усп. физ. наук, *110*, 101, 1973.
[4] V. Weisskopf. Ann. der Phys., *9*, 23, 1931.
[5] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Релятивистская квантовая теория, ч. 1. Изд. «Наука», 1968.
[6] Е. В. Бакланов. ЖЭТФ, *65*, 2203, 1973.
[7] Ф. А. Воробьев, С. Г. Раутиан, Р. И. Соколовский. Опт. и спектр., *27*, 728, 1969.
[8] П. Л. Рубин, Р. И. Соколовский. ЖЭТФ, *56*, 362, 1969.

Поступило в Редакцию 17 марта 1975 г.