МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ С ПОДГРУППАМИ ШМИДТА РАНГА 4

Е.В. Зубей

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

ON FINITE GROUPS WITH SCHMIDT SUBGROUPS OF RANK 4

E.V. Zubei

F. Scorina Gomel State University

Указано строение холловых подгрупп конечной группы, все подгруппы Шмидта которой имеют ранг 4.

Ключевые слова: *конечная группа*, *группа Шмидта*, *ранг группы*, *холлова подгруппа*.

The structure of Hall subgroups of a finite group is considered. All Schmidt subgroups have rank 4.

Keywords: *finite group*, *group of Schmidt*, *rank of the group*, *Hall subgroup*.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые обозначения и терминология стандартны и соответствуют [1], [2].

Пусть G_1 – минимальная нормальная подгруппа группы G. Для каждого натурального $i \geq 2$ определим подгруппу G_i так, что G_i / G_{i-1} – минимальная нормальная подгруппа фактор-группы G / G_{i-1}. Ряд подгрупп

$$G_0 = 1 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m = G$$

называют главным рядом группы G, а его факторы G_i / G_{i-1} – главными факторами. Если G – неединичная разрешимая группа, то все главные факторы являются элементарными абелевыми примарными группами. Пусть $p_i^{n_i} = | G_{i+1} / G_i |$, все p_i – простые числа, не обязательно различные. Число $r(G) = \max_{1 \leq i \leq m} n_i$ называется рангом группы G, [2, VI.5.2]. Для единичной группы считают $r(1) = 0$. Группы ранга 1 называют сверхразрешимыми, их основные свойства приведены в [2, VI.9]. В силу теоремы Жордана–Гельдера любые два главных ряда группы G изоморфны, поэтому значения ранга для каждой разрешимой группы определяется однозначно. Свойства разрешимых групп G с $r(G) \leq 2$ получены в работах Б. Хупперта [3] и Дж. Роуза [4]. Монахов В.С. и Трофимук А.А. [5] изучили разрешимые группы ранга ≤ 3.

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Их строение хорошо известно, в частности, группы Шмидта бипримарны, одна из силовских подгрупп нормальна, а другая циклическая. Следуя [6] группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и ненормальной циклической силовской q-подгруппой будем называть $S_{<p,q>}$-группой. Здесь и везде ниже p и q – различные простые числа. Для $S_{<p,q>}$-группы S будем использовать запись $S = [P]Q$, где P – нормальная силовская p-подгруппа, а Q – циклическая ненормальная силовская q-подгруппа. О.Ю. Шмидт [7] установил, что ранг $S_{<p,q>}$-группы равен показателю числа p по модулю q.

Для любой подгруппы H группы G ранг подгруппы H не превышает ранга группы G. Следовательно, ранги подгрупп Шмидта не выше ранга группы. В минимальной несверхразрешимой группе все собственные подгруппы Шмидта имеют ранг 1, а ранг всей группы >1. Поэтому совпадение ранга группы и ранга собственных подгрупп в общем случае не будет.

Монахов В.С. [8] изучил класс $\mathfrak{F}$ всех групп с подгруппами Шмидта ранга 1, т. е. со сверхразрешимыми подгруппами Шмидта. Класс $\mathfrak{F}$ является наследственной насыщенной радикальной формацией и каждая группа из $\mathfrak{F}$ обладает силовской башней сверхразрешимого типа. Класс $\mathfrak{H}$ всех групп с подгруппами Шмидта ранга $\neq 1$ тоже является наследственной насыщенной радикальной формацией и каждая группа из $\mathfrak{H}$ 2-замкнута, в частности, разрешима [8]. Свойства групп с подгруппами Шмидта ранга 2 и 3 установлены в работах [9]–[11].

В настоящей статье исследуются строение группы, у которой все с подгруппы Шмидта имеют ранг 4.

1 Свойства групп Шмидта

Напомним некоторые необходимые свойства групп Шмидта.

В лемме 1.1 приведены свойства групп Шмидта, полученные самим О.Ю. Шмидтом в 1924 году.

***Лемма* 1.1.** [7] *Пусть S – группа Шмидта, т. е. ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) $S=[P]Q$, *где P – нормальная силовская p-подгруппа, Q – ненормальная силовская q-подгруппа, p и q – различные простые числа;*

(2) $Q=<y>$ – *циклическая подгруппа и* $y^q \in Z(S)$;

(3) $|P/P'|=p^m$, *где m – показатель числа p по модулю q*;

(4) *главный ряд группы S имеет систему индексов: $p,p,...p,p^m,q,...,q$, где m – показатель числа p по модулю q; число индексов равных p совпадает с n, где $p^n=|P'|$; число индексов равных q совпадает с b, где $q^b=|Q|$.*

Из леммы 1.1 (4) вытекает

***Лемма* 1.2.** *Пусть p и q – различные простые числа и m – показатель числа p по модулю q. Тогда любая $S_{<p,q>}$-группа имеет ранг m.*

***Лемма* 1.3.** [12] *Пусть p,q – различные простые числа и m – показатель p по модулю q. Тогда естественное полупрямое произведение $[P]Q$ элементарной абелевой p-группы P порядка p^m и группы Q порядка q является $S_{<p,q>}$-группой ранга m, у которой все подгруппы примарны.*

***Лемма* 1.4** [2, теорема IV.5.4.]. *Если в группе G нет $S_{<p,q>}$-подгрупп для всех $q\in\pi(G)$, то группа G p-нильпотентна.*

***Лемма* 1.5.** *Если $\{p,q\}$-группа не q-замкнута, то в ней существует $S_{<p,q>}$-подгруппа.*

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 1.4.

***Лемма* 1.6** [13]. *Если группа не 2-замкнута, то в ней существует $S_{<p,2>}$-подгруппа для некоторого $p\in\pi(G)$.*

***Лемма* 1.7** [14, теорема IX.8.3]. *Пусть a и m – целые числа >1. Тогда, исключая случаи $m=2, a=2^b-1$ и $m=6, a=2$, существует простое число q со следующими свойствами*:

(1) *q делит a^m-1;*

(2) *q не делит a^i-1 для всех $0<i<m$;*

(3) *q не делит m.*

В частности, m есть показатель числа a по модулю q.

2 Холловы подгруппы в группах с подгруппами Шмидта ранга 4

***Лемма* 2.1.** *Для любого простого числа p существует $S_{<p,q>}$-группа для некоторого простого числа q ранга 4.*

Доказательство. По лемме 1.7 для любого натурального числа m и любого простого числа p, за исключением $m=2$, $p=2^b-1$ и $m=6$, $p=2$, существует простое число q, для которого m является показателем числа p по модулю q. По лемме 1.3 существует $S_{<p,q>}$-подгруппа, ранг которой будет равен m по лемме 1.2. При $m=4$ получаем искомое утверждение. □

Обозначим через $\mathbf{Sch}(4)$ класс, состоящих из всех нильпотентных групп и всех групп, у которых каждая подгруппа Шмидта имеет ранг 4. Через $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$ обозначается класс всех $\{p,q\}$-групп из $\mathbf{Sch}(4)$. Как обычно $\mathfrak{S},\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_p$ – классы всех разрешимых, нильпотентных и p-групп соответственно, а $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ – формационное произведение классов $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}_q$. Ясно, что класс $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ состоит из всех p-замкнутых $\{p,q\}$-групп. Класс всех $\{p,q\}$-групп и всех нильпотентных $\{p,q\}$-групп обозначаются через $\mathfrak{S}_{\{p,q\}}$ и $\mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ соответственно.

***Лемма* 2.2.** *Группа Шмидта четного порядка ранга 4 является $S_{<2,5>}$-группой.*

Доказательство. Пусть G – $\{2,p\}$-группа Шмидта ранга 4. Если G p-замкнута, то ее ранг по лемме 1.2 равен 1. Это противоречит условию. Поэтому группа G будет $S_{<2,p>}$-группой. Так как ранг G равен 4, то из леммы 1.2 следует, что показатель числа 2 по модулю p равен 4, т. е. $p=5$. Значит, группа G является $S_{<2,5>}$-группой.

***Лемма* 2.3.** *Пусть p и q – нечетные простые числа. Тогда и только тогда показатель числа q по модулю p равен 4, когда p делит q^2+1.*

Доказательство. Пусть показатель числа q по модулю p равен 4. Тогда p делит $q^4-1=(q^2-1)(q^2+1)$ и не делит q^2-1, поэтому p делит q^2+1. Обратно, пусть p делит q^2+1. Если p делит (q^2-1), то p делит $(q^2+1)-(q^2-1)=2$, противоречие. Поэтому p не делит $q-1$ и не делит q^2-1. Если p делит q^3-1, то p делит $(q^3-1)+(q^2+1)=q^3+q^2=q^2(q+1)$, т. е. p делит $q+1$. Но теперь p делит $(q-1)(q+1)=q^2-1$, противоречие. Значит, показатель числа q по модулю p равен 4. Лемма доказана.

***Лемма* 2.4.** *Пусть p и q – нечетные простые числа. Тогда и только тогда существует $S_{<p,q>}$-группа ранга 4, когда делит q делит p^2+1.*

Доказательство. Пусть q делит p^2+1. Тогда по лемме 2.3 показатель числа p по модулю q равен 4 и по лемме 1.2 любая $S_<p,q>$-группа имеет ранг равный 4.

Если любая $S_<p,q>$-группа имеет ранг равный 4, то показатель числа p по модулю q равен 4 и по лемме 2.3 q делит p^2+1.

***Теорема* 2.5.**

1. *Пусть p – нечетное простое число. Тогда*:

(1.1) $\boldsymbol{Sch}(4)_{\{2,p\}} = \mathfrak{N}_{\{2,p\}}$ *при* $p \neq 5$;

(1.2) $\boldsymbol{Sch}(4)_{\{2,5\}} = \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_5$.

2. *Пусть* p *и* q *– нечетные простые числа*, $p > q$. *Тогда*:

(2.1) $\boldsymbol{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ *в случае, когда* $p \nmid (q^2+1), q \nmid (p^2+1)$;

(2.2) $\boldsymbol{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ *в случае, когда* $p \nmid (q^2+1), q \mid (p^2+1)$;

(2.3) $\boldsymbol{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$ *в случае, когда* $p \mid (q^2+1), q \nmid (p^2+1)$;

(2.4) $\boldsymbol{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{S}_{\{p,q\}}$ *в случае, когда* $p \mid (q^2+1), q \mid (p^2+1)$.

Доказательство. 1. Все нильпотентные $\{2,p\}$-группы принадлежат классу $\mathbf{Sch}(4)_{\{2,p\}}$. Пусть ненильпотентная группа $G \in \mathbf{Sch}(4)_{\{2,p\}}$. Тогда в группе G существует подгруппа Шмидта и по условию она имеет ранг 4. По лемме 2.2 все подгруппы Шмидта в группе G будут $S_{<2,5>}$-подгруппами. Значит, при $p \neq 5$ класс $\mathbf{Sch}(4)_{\{2,p\}}$ состоит из нильпотентных групп. При $p = 5$ в ненильпотентных группах из класса $\mathbf{Sch}(4)_{\{2,5\}}$ нет $S_{<5,2>}$-подгрупп. Следовательно,

$$\mathbf{Sch}(4)_{\{2,5\}} = \mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_5.$$

2. Пусть $G \in \mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$, т. е. G является $\{p,q\}$-группой и любая ее подгруппа Шмидта имеет ранг 4.

Предположим, что p не делит (q^2+1). По лемме 2.3 показатель числа q по модулю p не равен 4. Поэтому в G нет $S_{<q,p>}$-подгрупп и $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ по лемме 1.5. Аналогично, если q не делит (p^2+1), то $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{N}_q\mathfrak{N}_p$. Отсюда следует, что $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{N}_{\{p,q\}}$ в случае, когда p не делит (q^2+1) и q не делит (p^2+1). Поскольку $\mathfrak{N}_{\{p,q\}} \subseteq \mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$, то утверждение (2.1) доказано.

Пусть теперь p не делит (q^2+1), а q делит (p^2+1). По доказанному $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$. Если X – произвольная группа из $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$ и S – ее подгруппа Шмидта, то S будет $S_{<p,q>}$-подгрупп по лемме 1.5 и ранг S равен 4 по лемме 2.3. Значит, $X \in \mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$ и $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q$.

Аналогично проверяется утверждение (2.3).

Рассмотрим случай (2.4). Пусть Y – произвольная $\{p,q\}$-группа. Поскольку p делит (q^2+1), а q делит (p^2+1), то по лемме 2.3 ранг $S_{<p,q>}$-подгрупп и $S_{<q,p>}$-подгрупп из группы Y равен 4. Значит, $Y \in \mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$ и $\mathfrak{S}_{\{p,q\}} \subseteq \mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$. Обратное включение выполняется по определению класса $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}}$, поэтому имеем равенство $\mathbf{Sch}(4)_{\{p,q\}} = \mathfrak{S}_{\{p,q\}}$. □

***Пример* 2.1.** Для простых чисел 13 и 5 число 4 является показателем 13 по модулю 5 и показателем 5 по модулю 13. Пусть E_{p^n} – элементарная абелева группа порядка p^n, а Z_m – циклическая группа порядка m. По лемме 1.3 существуют $S_{<5,13>}$-группа $[E_{5^4}]Z_{13}$ и $S_{<13,5>}$-группа $[E_{13^4}]Z_5$. Их прямое произведение $([E_{5^4}]Z_{13}) \times ([E_{13^4}]Z_5)$ является недисперсивной $\{5,13\}$-группой, у которой все подгруппы Шмидта имеют ранг 4. Поэтому ситуация, рассмотренная в пункте (2.4) теоремы 2.5, имеет место для $\{p,q\} = \{5,13\}$. В частности, существуют недисперсивные группы, у которых каждая подгруппа Шмидта имеет ранг 4.

***Следствие* 2.5.1.** *Пусть* $G \in \boldsymbol{Sch}(4)$. *Тогда*

(1) G *– 2-замктута*;

(2) $5'$*-холлова подгруппа 2-разложима и 3-нильпотентна;*

(3) $61'$*-холлова подгруппа 11-нильпотентна.*

Доказательство. 1. Если группа не 2-замкнута, то по лемме 1.6 в ней существует $S_{<p,2>}$-подгруппа для некоторого p. Но ее ранг равен 1, противоречие. Значит, G – 2-замкнута.

2. Пусть $G_{5'} = H$ – $5'$-холлова подгруппа. Тогда H – 2-замкнута по пункту (1). Если H не является 2-нильпотентной, то по лемме 1.5 в ней существует $S_{<2,p>}$-подгруппа для некоторого $p \in \pi(H)$. Так как ее ранг равен 4, то имеем противоречие с леммой 2.2. Значит, H – 2-нильпотентна, поэтому она 2-разложима. Если H не является 3-нильпотентной, то существует $S_{<3,p>}$-подгруппа S для некоторого $p \in \pi(H)$. Так как ранг S равен 4, то p делит $3^2+1=10$, т. е. $p=5$, но $5 \notin \pi(H)$. Значит, H – 3-нильпотентна.

3. Пусть $G_{61'} = K$ – $61'$-холлова подгруппа. Если K не является 11-нильпотентной, то

существует $S_{<11,p>}$-подгруппа S для некоторого $p \in \pi(K)$. Так как ранг S равен 4, то p делит $11^2+1=122$, т. е. $p=61$, но $61 \notin \pi(K)$. Значит, K – 11-нильпотентна. Следствие доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York, 1967. – 796 p.

3. *Huppert*, *B.* Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen / B. Huppert. – Math. Zeitschr. – 1954. – Vol. 60. – P. 409–434.

4. *Rose*, *J.* Sufficient conditions for the existence of ordered Sylow towers in finite groups / J. Rose // Journal of algebra. – 1974. – Vol. 28. – P. 116–126.

5. *Монахов*, *В.С.* О конечных разрешимых группах фиксированного ранга / В.С. Монахов, А.А. Трофимук // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 5. – С. 1124–1137.

6. *Монахов*, *В.С.* Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения / В.С. Монахов // Труды Укр. матем. конгресса 2001. – Киев. – 2002, секция 1. – С. 81–90.

7. *Шмидт*, *О.Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные / О.Ю. Шмидт // Матем. сб. – 1924. – Т. 31. – С. 366–372.

8. *Монахов*, *В.С.* О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта / В.С. Монахов // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 717–722.

9. *Maksimov*, *S.L.* On classes of finite group with fixed Schmidt subgroups / S.L. Maksimov, V.S. Monakhov // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2001. – Suppl. 2. – P. 179–185.

10. *Максимов*, *С.Л.* О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 3 / С.Л. Максимов // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 3 (6). – С. 186–190.

11. *Максимов*, *С.Л.* О конечных группах с подгруппами Шмидта ранга 2 / С.Л. Максимов // Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2002. – № 2. – С. 38–41.

12. *Гольфанд*, *Ю.А.* О группах, все подгруппы которых специальные / Ю.А. Гольфанд // ДАН СССР. – 1948. – Т. 60, № 8. – С. 1313–1315.

13. *Монахов*, *В.С.* О подгруппах Шмидта конечных групп / В.С. Монахов // Вопросы алгебры. Выпуск 13. – Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1998. – С. 153–171.

14. *Huppert*, *B.* Finite groups, II / B. Huppert, N. Blackburn // Berlin – Heidelberg – New York: Springer. – 1982.

Поступила в редакцию 14.06.17.