УДК 535.317.1

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ТЕОРИИ ЭЙКОНАЛОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ В ДИФРАКЦИОННОМ ИЗОБРАЖЕНИИ

А. П. Дмитриев

Анализируются условия, при которых вычисление распределения интенсивности в дифракционном изображении точки может быть сведено к двойному преобразованию Фурье некоторой функции, связанной с эйконалом; показано, какими переменными нужно пользоваться при интегрировании для случаев, когда изображение расположено на конечном расстоянии от оптической системы и на бесконечно большом расстоянии.

Вычисление дифракционного распределения интенсивности в изображении, создаваемом оптической системой, из задачи теоретической оптики превратилось в последнее время в задачу прикладной оптики. Для конкретных оптических систем, обладающих большими аберрациями, вычисление распределения интенсивности, как известно, связано с интегрированием быстро осциллирующих функций, что при обычно применяемых численных методах может приводить к потере точности. Для перехода к более точным методам интегрирования необходимо уточнить прежде всего вид подынтегральной функции, а также область интегрирования и переменные интегрирования.

В настоящей статье рассматриваются и уточняются основные предпосылки, позволяющие свести вычисление двойного интеграла, описывающего распределение комплексных амплитуд в плоскости дифракционного изображения светящейся точки, создаваемого оптической системой при наличии аберраций, к преобразованию Фурье некоторой функции от двух переменных. Рассматриваются случаи, когда изображение находится на конечном расстоянии от оптической системы (пространственное распределение интенсивности) и на бесконечно большом расстоянии (угловое распределение интенсивности). В обоих рассмотренных случаях светящаяся точка также располагается либо на конечном расстоянии от оптической системы, либо бесконечно удалена.

В полученных результатах нет явных ограничений как по апертурным, так и по полевым углам оптической системы; приближенность результатов обусловлена лишь использованием скалярной теории и предположением, что края диафрагм, ограничивающих пучок лучей, не влияют на результат дифракции, т. е. что к дифракционной формуле Кирхгофа применима гипотеза Сен-Венана [1].

Использование принципа Гюйгенса в дифракции Фраунгофера

По принципу Гюйгенса излучение от точки эквивалентно излучению от некоторой поверхности — волнового фронта, каждая точка которого является элементарным когерентным излучателем. Волновые фронты как поверхности, ортогональные множеству лучей, вышедших из одной светящейся точки (и может быть прошедших через оптическую систему), могут быть построены в любом месте пространства, если известны форма и положение хотя бы одного волнового фронта. Ограничение участка волнового фронта определяется ограничениями пучка лучей, вызванными одной или несколькими диафрагмами.

В случае, когда вычисляется пространственное распределение интенсивности («изображение на конечном расстоянии»), дифракции Фраунгофера соответствует предельный случай бесконечно удаленной диафрагмы, при вычислении дифракционной картины мы будем рассматривать излучение от волнового фронта, расположенного бесконечно далеко от изображения. В этом случае каждая бесконечно удаленная точка волнового фронта посылает на изображение параллельный пучок дифрагированных «лучей» и дает плоский «волновой фронт»; волновые фронты, расположенные на конечном расстоянии от плоскости изображения, в этом случае получаются в результате суперпозиции плоских «волновых фронтов» (огибающая поверхность).

В случае, когда вычисляется угловое распределение интенсивности («изображение в бесконечности»), дифракции Фраунгофера соответствует расположение диафрагмы на конечном расстоянии от оптической системы. В этом случае мы будем рассматривать излучение от волнового фронта, расположенного вблизи диафрагмы, каждая точка волнового фронта дает расходящийся пучок дифрагированных лучей со сферическим «волновым фронтом».

Вычисление пространственного распределения интенсивности

В случае, когда изображение находится на конечном расстоянии от оптической системы, для вычисления распределения амплитуд электрического поля в плоскости изображения необходимо в каждой точке изображения просуммировать с учетом фаз вклады отдельных участков волнового фронта, являющегося по принципу Гюйгенса излучающей поверхностью. Для каждого геометрического луча фаза в точке пересечения луча с плоскостью изображения определяется оптической длиной пути — численным

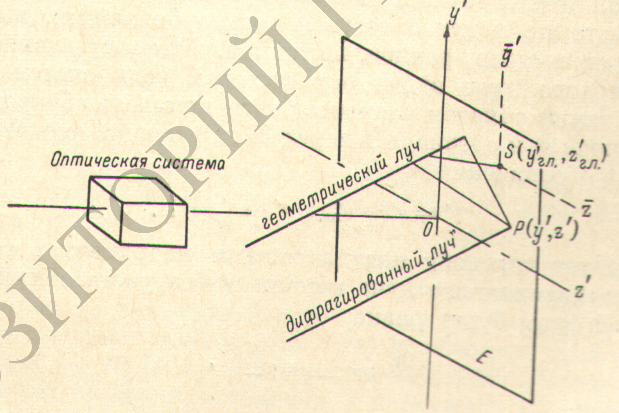

Рис. 1.

значением эйконала. Но для вычисления амплитуды электрического поля в некоторой точке P (рис. 1) плоскости изображения необходимо знать фазы дифрагированных лучей, пришедших в точку P. На рис. 1 показана плоскость изображений E и один из лучей, прошедших оптическую систему; μ' и ν' — направляющие косинусы этого луча. Поскольку, как было отмечено выше, излучающая поверхность в случае дифракции Фраунгофера расположена в бесконечности, то каждая точка этой бесконечно удаленной излучающей поверхности посылает плоский «волновой фронт», и если из точки P опустить перпендикуляр на геометрический луч, то фаза дифрагированного луча будет та же, что и в точке T, являющейся основанием перпендикуляра (рис. 1). Таким образом, получается, что в произвольной точке изображения P фаза дифрагированного луча с направляющими косинусами μ' и ν' определяется эйконалом (оптическим путем вдоль луча между двумя точками на луче), конечная точка которого определяется как в угловом эйконале, но центр, из которого опускаются перпендикуляры на лучи, расположен не на оси оптической системы, а в точке P, т. е. в той точке, где вычисляется интенсивность. Если излучающая точка находится на конечном расстоянии от оптической системы, то начало отсчета эйконала следует брать как для точечного эйконала, т. е. в точке пересечения луча с плоскостью, на которой лежит излучающая точка; фазы дифрагированных лучей в этом случае определяются смешанным («точечно-угловым») эйконалом. Если же предмет лежит в бесконечности, то начальная точка отсчета эйконала берется как для углового эйконала и фаза в этом случае определяется угловым эйконалом.

Для вычисления распределения амплитуд в произвольных точках плоскости изображения целесообразно вычислять в зависимости от расположения светящейся точки смешанный или угловой эйконал, выбрав в плоскости изображений одну единственную точку — центр, из которого опускаются перпендикуляры на лучи для определения оконечных точек эйконала. В качестве такой точки можно выбрать, например, идеальное положение изображения или след главного луча. Обозначим координаты центра S (например, следа главного луча), из которого опускаются перпендикуляры на лучи, в плоскости E через $y'_{\text{гл.}}$ и $z'_{\text{гл.}}$, а точки P через y' и z'. Фаза дифрагированного луча в точке P будет определяться эйконалом (смешанным или угловым) соответствующего геометрического луча, к которому добавлена взятая с обратным знаком и умноженная на показатель преломления среды пространства изображений проекция на луч расстояния между следом главного луча и точкой P

$$(y'_{\text{гл.}} - y')\,\mu' + (z'_{\text{гл.}} - z')\,\nu'$$

(здесь предполагается, что μ' и ν' — оптические направляющие косинусы луча в пространстве изображений). Для удобства вычислений и во избежание возможной потери точности целесообразно для всех лучей из значений эйконалов, которые могут оказаться весьма большими, вычесть одно и то же постоянное число, равное, например, эйконалу главного луча (или длине оптического пути вдоль оси системы, если система имеет ось).[1] Полученную таким образом разность будем называть аберрационным приращением эйконала и обозначать через δV. Очевидно, что $\delta V = \delta V\ (\mu', \nu')$. Введем также обозначения

$$\bar{y}' = y' - y'_{\text{гл.}};\quad \bar{z}' = z' - z'_{\text{гл.}},$$

что соответствует переносу начала отсчета координат в точку S. Фаза каждого дифрагированного луча в точке P без учета общей для всех лучей начальной фазы будет равна

$$\frac{2\pi}{\lambda}\,(\delta V - \bar{y}'\mu' - \bar{z}\nu'),$$

где λ — длина волны в пространстве изображений, а комплексная амплитуда в точке P с точностью до произвольного множителя определится известным выражением

$$A\,(\bar{y}',\ \bar{z}') = k \iint\limits_{\Omega_{3p}} \exp\left(i\,\frac{2\pi}{\lambda}\,(\delta V - \bar{y}'\mu' - \bar{z}'\nu')\right) d\mu' d\nu', \tag{1}$$

где k — нормировочный множитель, а Ω_{3p} — множество геометрических лучей, участвующих в образовании изображения, т. е. проходящих через зрачок.

[1] В [2] приведена формула, позволяющая при расчете хода луча на ЭВМ избежать потери точности.

Вводя функцию $F(\mu', \nu')$, учитывающую пропускание зрачка и равную нулю вне зрачка, можно изменить пределы интегрирования и выражение (1) представить в виде

$$A(\bar{y}'/\lambda,\ \bar{z}'/\lambda) = k \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\mu',\ \nu') \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}\delta V\right) \exp\left[-i2\pi\left(\frac{\bar{y}'}{\lambda}\mu' + \frac{\bar{z}'}{\lambda}\nu'\right)\right] d\mu' d\nu'.$$

Полученный результат выражает хорошо известный факт [3], что распределение комплексных амплитуд в плоскости изображения с точностью до нормировочного множителя определяется интегральным преобразованием — преобразованием Фурье [2] некоторой функции, зависящей от направляющих косинусов лучей. Сама функция при этом имеет вид

$$F(\mu',\ \nu') \exp\left(i2\pi\frac{\delta V}{\lambda}\right).$$

Когда излучающая точка находится на конечном расстоянии, для вычисления аберрационных приращений следует пользоваться смешанным «точечно-угловым» эйконалом, а при бесконечно удаленной точке — угловым эйконалом. В случае безаберрационного изображения точки аберрационные приращения эйконала, как и волновые аберрации, равны нулю. Естественно, что в рассмотренном случае переменными интегрирования могут быть только направляющие косинусы лучей в пространстве изображений, координаты же точек пересечения геометрических лучей с плоскостью изображения (поперечные аберрации) никакого значения при этом не имеют. Следует отметить, что в [4] волновая аберрация вычисляется при бесконечно большом радиусе сферы сравнения; в этом случае она равна введенным выше аберрационным приращениям эйконала.

Вычисление углового распределения интенсивности

В случае, когда изображение расположено в бесконечности, для вычисления распределения амплитуд электрического поля по направлениям необходимо для каждого направления просуммировать с учетом фаз вклады отдельных участков волнового фронта, проходящего вблизи диафрагмы (следует отметить, что в общем случае геометрический волновой фронт не опирается на края диафрагмы).

В каждой точке плоскости зрачка фаза геометрического луча определяется оптической длиной пути — эйконалом, конечная точка отсчета которого определяется, как для точечного эйконала. Фаза дифрагированного луча, выходящего из точки пересечения геометрического луча с плоскостью зрачка, равна по принципу Гюйгенса фазе геометрического луча.

Если излучающая точка расположена на конечном расстоянии, то начальная точка отсчета эйконала для каждого луча, как и в предыдущем случае, должна определяться как для точечного эйконала, и фаза в плоскости зрачка для этого случая определяется точечным эйконалом. Если же излучающая точка бесконечно удалена и в оптическую систему входит параллельный пучок лучей, то начальную точку отсчета эйконала следует определять как в угловом эйконале, а фаза в плоскости зрачка в этом случае определяется смешанным «угло-точечным» эйконалом.

Для вычисления амплитуды в направлении, заданном направляющими косинусами μ' и ν', следует вычислить распределение фаз не в плоскости зрачка, а в плоскости, перпендикулярной заданному направлению, для которого вычисляется амплитуда, т. е. к значению эйконала, определяющему фазу в некоторой точке плоскости зрачка, следует добавить взятую

---

[2] Вообще говоря, авторы различных книг по-разному записывают формулу преобразования Фурье. Эти формулы отличаются друг от друга лишь расположением множителя 2π. Используемая здесь формула наиболее часто употребляется в оптической литературе.

с обратным знаком и умноженную на показатель преломления проекцию радиус-вектора той же точки зрачка на заданное направление, определяющуюся выражением (рис. 2)

$$-(y'_{зр}\mu' + z'_{зр}\nu')$$

(как и в предыдущем случае, μ' и ν' — оптические направляющие косинусы). Для каждого луча, дифрагировавшего в направлении, определен-

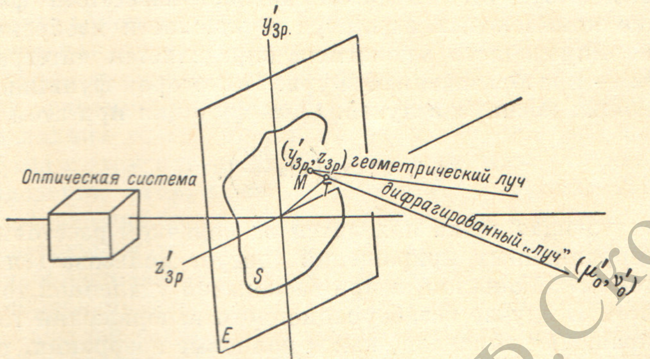

Рис. 2.

ном величинами μ' и ν', и проходящего через точку зрачка с координатами $y'_{зр}$ и $z'_{зр}$, фаза без учета общей для всех лучей начальной фазы равна

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\delta V - y'_{зр}\mu' - z'_{зр}\nu'),$$

где δV — аберрационное приращение эйконала. Комплексная амплитуда в рассматриваемом направлении с точностью до произвольного множителя определится выражением

$$A(\mu', \nu') = k \iint\limits_{S_{зр}} \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\delta V - y'_{зр}\mu' - z'_{зр}\nu')\, dy'_{зр}dz'_{зр}\right),$$

где $S_{зр}$ — множество геометрических лучей, прошедших через зрачок. Введя, как в предыдущем случае, функцию $F(y'_{зр}, z'_{зр})$, учитывающую пропускание зрачка, и изменив пределы интегрирования, перепишем выражение в виде

$$A(\mu'/\lambda, \nu'/\lambda) = k \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(y'_{зр}, z'_{зр}) \exp\left(i2\pi\frac{\delta V}{\lambda}\right) \exp\left(-i2\pi\left(\frac{\mu'}{\lambda} y'_{зр} + \frac{\nu'}{\lambda} z'_{зр}\right)\right) dy'_{зр}dz'_{зр},$$

т. е. распределение комплексных амплитуд по направлениям также определяется интегральным преобразованием некоторой функции, связанной с аберрационными приращениями эйконала, которые на этот раз являются функциями координат на выходном зрачке; само преобразование также имеет вид преобразования Фурье. В отличие от предыдущего случая координаты μ' и ν' берутся в общей системе координат, а не в смещенной, так что для «внеосевой точки» в центре дифракционного изображения μ' и ν' равны не нулю, а некоторым значениям μ'_0 и ν'_0, определяющим направление на центр дифракционного изображения. Переменными интегрирования в этом случае могут быть только координаты на выходном зрачке, направляющие косинусы геометрических лучей и связанные с ними угловые аберрации никакого значения не имеют.

В обоих рассмотренных случаях не делалось попытки связать распределение амплитуд в изображении с амплитудой излучающей точки, как это делается обычно в теории дифракции, поскольку связать вычисленные таким образом значения амплитуд с освещенностью от одной единственной излучающей точки все равно не удастся. Можно только вычислить распределение интенсивности, представляющей собой квадрат модуля амплитуды и отнормировать ее каким-либо образом.

Литература

[1] Р. Дитчберн. Физическая оптика. Изд. «Наука», М., 1965.
[2] Г. Г. Слюсарев. Тр. ГОИ, *41*, вып. 173, 48, 1972.
[3] А. Марешаль, М. Франсон. Структура оптического изображения. ИЛ, М., 1962.
[4] Г. Г. Слюсарев. Методы расчета оптических систем. Изд. «Машиностроение», Л., 1969.

Поступило в Редакцию 25 апреля 1975 г.