Е. А. Полховская, А. В. Лубочкин
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

СТАБИЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ МАЯТНИКА С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ УПРАВЛЕНИЯМИ МИНИМАЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ

Рассматривается задача стабилизации неустойчивых положений равновесия нелинейной модели математического маятника, управляемого с помощью горизонтальных перемещений точки подвеса:

$$\ddot{x} - \sin x + u\cos x = 0,\ \ z(0) = (x(0), \dot{x}(0)) = z_0 = (x_{10}, x_{20}), \tag{1}$$

где $u = u(t)$ – ускорение точки подвеса в момент t.

Как известно, неустойчивыми состояниями равновесия системы (1) при $u = u(t) \equiv 0$, $t \ge 0$, на фазовой плоскости $z = (x, \dot{x})$ являются точки

$$z^k = (x = 2k\pi, \dot{x} = 0),\ k \in Z\,. \tag{2}$$

Для исследования поведения нелинейной системы (1) вводится кусочно-линейная и кусочно-постоянная аппроксимации нелинейностей, что позволяет решать задачу стабилизации при любых начальных возмущениях и любых движениях маятника.

Обратную связь $u = u(z) = u(x, \dot{x})$, $z \in R^2$, назовем ограниченной дискретной (с периодом квантования $\nu > 0$) стабилизирующей в области $G \in R^2$ для состояния равновесия (2), если: 1) $u(z^k) = 0$; 2) $|u(z)| \le L$, $z \in G$; 3) траектория замкнутой системы $\ddot{x} - \sin x + u(z)\cos x = 0$, $z(0) = z_0 \in G$, представляет собой непрерывное решение уравнения (1) с управлением $u(t) = u(k\nu)$, $t \in [k\nu, (k+1)\nu[$, $k = 0,1,\ldots$; 4) решение $x(t) = 2k\pi$, $t \ge 0$, замкнутой системы асимптотически устойчиво, и G – область притяжения состояния равновесия $x = 2k\pi$.

Для построения указанной обратной связи используется реализация в режиме реального времени позиционного решения следующей задачи оптимального управления

$$B_\theta(z) = \min \rho,\ \ddot{x} - a(x) + b(x)u = 0,\ (x(0), \dot{x}(0)) = z \tag{3}$$

$$(x(\theta), \dot{x}(\theta)) = z^k,\ |u(t)| \le \rho,\ t \in [0, \theta],$$

где $0 < \theta = N\nu < \infty$ (N – натуральное число) – параметр метода; $a(x)$, $b(x)$, $x \in R$ – кусочно-линейная и кусочно-постоянная аппроксимации нелинейных элементов $\sin x$, $\cos x$ соответственно. При этом минимум в задаче (3) берется не только по u, но и по моментам переключения указанных аппроксимаций с одного участка на другой. Задачи (3), рассматриваемые в классе кусочно-постоянных функций с периодом квантования $\nu > 0$, будут эквивалентны близким задачам линейного программирования переменной структуры. Построенные стабилизаторы программно реализованы, просчитаны тестовые примеры.