Проблемы физики, математики и техники, № 3 (32), 2017

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С $n\Phi$-ПОДГРУППАМИ ПРОСТЫХ ПОРЯДКОВ

Д.А. Ходанович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

FINITE GROUPS WITH $n\Phi$-SUBGROUPS OF PRIME ORDERS

D.A. Khadanovich

F. Scorina Gomel State University

Подгруппа H группы G называется $n\Phi$-подгруппой в G, если существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq \Phi(H)$. Доказано, что любая формация допускает характеризацию некоторыми $n\Phi$-подгруппами простых порядков.

***Ключевые слова**: конечная группа, нормальная подгруппа, силовская подгруппа, дополнение, $\mathfrak{F}$-корадикал, нильпотентная группа, абелева группа.*

A subgroup H of a group G is called $n\Phi$-subgroup in G if there exists a normal subgroup K of G such that $G = HK$ and $H \cap K \leq \Phi(H)$. It has been proved that any formation admits characterization by certain $n\Phi$-subgroups of prime orders.

***Keywords**: finite group, normal subgroup, Sylow subgroup, complement, $\mathfrak{F}$-coradical, nilpotent group, Abelian group.*

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и терминология стандартны и соответствуют [1]–[2].

Пусть A и B – подгруппы группы G. Если $G = AB$ и $A \cap B = 1$, то подгруппу B называют дополнением к подгруппе A в группе G. Если, кроме того, B нормальна в G, то говорят, что B – нормальное дополнение к подгруппе A в группе G.

Группы с системами дополняемых подгрупп исследовались в работах многих авторов, начиная с работы [3] Ф. Холла 1937 г. Различные аспекты теории дополняемых подгрупп отражены в монографии С.Н. Черникова [4]. Из работ текущего десятилетия отметим две работы В.Н. Княгиной и В.С. Монахова [5]–[6], в которых требование дополняемости накладывались на подгруппы порядка p и порядка p^2, где p – фиксированное простое число.

Обобщением понятия дополнение является понятие добавление. Добавлением к подгруппе K в группе G называется подгруппа H такая, что $G = KH$ и $KH_1 \neq G$ для всех собственных подгрупп H_1 из H. Если K – нормальная подгруппа и H – ее добавление, то $H \cap K \leq \Phi(H)$ [2, лемма 3.21], где $\Phi(H)$ – подгруппа Фраттини H. Справедливо и обратное, т. е. если K – нормальная подгруппа группы G и H – такая подгруппа, что $G = KH$ и $H \cap K \leq \Phi(H)$, то будет добавлением к K в G. Начальные свойства добавлений и их связь с дополнениями приведены в работах Л.А. Шеметкова [7]–[8].

Введем следующее определение.

Определение. Подгруппу H группы G будем называть $n\Phi$-подгруппой в G, если существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = HK$ и $H \cap K \leq \Phi(H)$.

Многие классы групп можно характеризовать $n\Phi$-подгруппами. Например, группа нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа является $n\Phi$-подгруппой, см. предложение 1.6.

В настоящей заметке доказывается, что любая формация допускает характеризацию некоторыми $n\Phi$-подгруппами простых порядков.

1 Вспомогательные результаты

Если в группе G есть нормальное дополнение к силовской p-подгруппе, то группа G называется p-нильпотентной. Запись $X \leq Y$ означает, что X является подгруппой группы Y, если X нормальна в Y, то пишем $X \trianglelefteq Y$. При $X \neq Y$ используем обозначения $X < Y$ и $X \triangleleft Y$. Запись $A \rtimes B$ означает полупрямое произведение групп A и B с нормальной в AB подгруппой A, а $\pi(G)$ – множество всех простых делителей группы G.

Лемма 1.1. *Пусть G – группа, $N \triangleleft G$ и $N \leq A \leq B \leq G$. Если подгруппа A является добавлением к нормальной в G подгруппе K, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *A является добавлением к нормальной в B подгруппе $K \cap B$;*

(2) *A / N является добавлением к нормальной в G / N подгруппе KN / N;*

(3) $\pi(A) = \pi(G / K)$.

Доказательство. 1. Из определения добавления следует, что $G = AK$ и $A \cap K \le \Phi(A)$. По тождеству Дедекинда

$$B = B \cap AK = A(B \cap K),$$

$$A \cap (B \cap K) = A \cap K \le \Phi(A).$$

Поскольку $B \cap K$ нормальна в B, то A – добавление к нормальной в B подгруппе $K \cap B$.

2. Ясно, что $G/N = A/N \cdot KN/N$ и $KN/N \lhd G/N$. Теперь

$$A/N \cap KN/N = (A \cap KN)/N =$$

$$= (A \cap K)N/N \le \Phi(A)N/N \le \Phi(A/N).$$

Значит, A/N – добавление в G/N к подгруппе KN/N.

3. По свойствам подгруппы Фраттини $\pi(X) = \pi(X/\Phi(X))$ для любой группы [2, 4.33]. Так как

$$G = AK,\ G/K \simeq A/(A \cap K),\ A \cap K \le \Phi(A),$$

то $\pi(A) = \pi(G/K)$. □

Из леммы 1.1 и определения $n\Phi$-подгруппы следует

***Лемма* 1.2.** *Пусть G – группа, $N \lhd G$ и $N \le A \le B \le G$. Если A – $n\Phi$-подгруппа в G, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *A – $n\Phi$-подгруппа в B;*

(2) *A/N – $n\Phi$-подгруппа в G/N;*

(3) *если $\Phi(A) = 1$, то $G = K \rtimes A$ для некоторой нормальной в G подгруппы K;*

(4) *если $\langle x \rangle$ – $n\Phi$-подгруппа простого порядка в G, то $G = K \rtimes A$ для некоторой нормальной в G подгруппы K.*

***Лемма* 1.3** [5, лемма 2 (1)]. *Пусть G – группа, $p \in \pi(G)$ и пусть каждая подгруппа простого порядка p из G дополняема в G. Если H – подгруппа в G, тогда каждая подгруппа простого порядка p из H дополняема в H. В частности, силовская p-подгруппа из G является элементарной абелевой и дополняемой в G.*

***Лемма* 1.4** [9, IV.4.7]. *Если P – силовская p-подгруппа группы G и N – нормальная в G подгруппа такая, что $P \cap N \le \Phi(P)$, то N p-нильпотентна.*

***Лемма* 1.5.** *Группа G p-нильпотентна тогда и только тогда, когда ее силовская p-подгруппа является $n\Phi$-подгруппой.*

Доказательство. Если G p-нильпотентна, то $G = H \rtimes P$, где P – силовская p-подгруппа, H – нормальное дополнение. Так как $P \cap H = 1 \le \Phi(P)$, то P является $n\Phi$-подгруппой.

Обратно, пусть силовская p-подгруппа P группы G является $n\Phi$-подгруппой. Это означает, что существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = PK$ и $P \cap K \le \Phi(P)$. По лемме 1.4 подгруппа K p-нильпотентна, т. е. $K = K_1(P \cap K)$, где K_1 – нормальное p-дополнение в K. Поскольку K_1 нормальна в G, то $G = K_1 \rtimes P$ – p-нильпотентна. □

***Предложение* 1.6.** *Группа нильпотентна тогда и только тогда, когда каждая ее силовская подгруппа является $n\Phi$-подгруппой.*

Доказательство. По лемме 1.5 группа G p-нильпотентна для каждого $p \in \pi(G)$, поэтому G нильпотентна. □

2 Характеризация формаций $n\Phi$-подгруппами простых порядков

***Теорема* 2.1.** *Пусть G – группа, $p \in \pi(G)$. Каждая подгруппа порядка p является $n\Phi$-подгруппой в G тогда и только тогда, когда группа G p-нильпотентна и силовская p-подгруппа в G элементарная абелева.*

Доказательство. Пусть A – $n\Phi$-подгруппа простого порядка p. По условию существует нормальная в G подгруппа K такая, что $AK = G$ и $A \cap K \le \Phi(A)$. Так как $\Phi(A) = 1$, то $A \cap K = 1$ и K – нормальное дополнение в G к подгруппе A. Таким образом, все подгруппы порядка p имеют нормальные дополнения. По леммам 1.1 и 1.3 силовская p-подгруппа в G элементарная абелева.

Пусть $P = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times ... \times \langle a_n \rangle$ – силовская p-подгруппа группы G и K_i – нормальное дополнение к подгруппе $\langle a_i \rangle$ в G, где $i = 1, 2, ..., n$. Подгруппа $N = \bigcap_{i=1}^{n} K_i$ будет нормальной в G и дополнением к P в G, т. е. группа G будет p-нильпотентной.

Обратно, пусть группа G p-нильпотентна и ее силовская p-подгруппа элементарная абелева. Тогда $G = N \rtimes P$, где P – элементарная абелева силовская p-подгруппа. Если $x \in P$, $|x| = p$, то $P = \langle x \rangle \times P_1$, где P_1 – подгруппа в P индекса p и $G = (N \rtimes P_1) \rtimes \langle x \rangle$, т. е. $N \rtimes P_1$ будет нормальным дополнением к $\langle x \rangle$ в группе G. □

Пример. В знакопеременной группе A_4 порядка 12 каждая подгруппа порядка 3 является $n\Phi$-подгруппой. Поэтому в теореме 2.1 группа G может быть не p-замкнутой.

***Следствие* 2.1.1.** *Если в группе G все подгруппы простых порядков будут $n\Phi$-подгруппами, то группа G абелева и все ее силовские подгруппы элементарные абелевы.*

Доказательство. По теореме 2.1 группа G p-нильпотентна и силовская p-подгруппа элементарная абелева для каждого $p \in \pi(G)$. Зафиксируем $p, q \in \pi(G)$, $p \ne q$. Лемма 1.2 (1) позволяет применить индукцию, поэтому $G_{p'}$ и $G_{q'}$ –

нормальные в G абелевы подгруппы. Так как, $G_p \le G_{q'}$, то G_p нормальна в G. Теперь $G = G_p \rtimes G_{p'} = G_p \times G_{p'}$ абелева. □

Если $\mathfrak{F}$ – формация, то $\chi(\mathfrak{F})$ ее характеристика, т. е. $\chi(\mathfrak{F})$ – все простые числа p, для которых $\mathfrak{F}$ содержит подгруппу порядка p. Пересечение всех нормальных подгрупп группы G, фактор-группы по которым принадлежат $\mathfrak{F}$, обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G.

Как обычно, $\mathfrak{A}$ – формация всех абелевых групп. За формацией всех абелевых групп с элементарными абелевыми силовскими подгруппами закрепим обозначение $\mathfrak{A}_1$.

***Теорема* 2.2.** *Пусть H – подгруппа группы G. Если подгруппа $\langle x\rangle$ является $n\Phi$-подгруппой в G для каждого элемента $x \in H$ простого порядка, то $H \in \mathfrak{A}_1$ и существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = K \rtimes H$.*

Доказательство индукцией по числу $|G|+|H|$. Если $H = 1$, то утверждение справедливо: $G = H \times G$, $H = 1 \in \mathfrak{A}_1$. Если $H = G$, то $G = H \times 1$ и подгруппа $H \in \mathfrak{A}_1$ по следствию 2.1.1.

Пусть далее $1 \ne H \ne G$. Если элемент $x \in H$ имеет простой порядок, то $\langle x\rangle$ – $n\Phi$-подгруппа в G по условию. По лемме 1.2 существует нормальная в G подгруппа K такая, что $G = K \rtimes \langle x\rangle$. По тождеству Дедекинда $H = (H \cap K) \rtimes \langle x\rangle$, поэтому $\langle x\rangle$ – $n\Phi$-подгруппа в H. Так как x – произвольный элемент из H простого порядка, то к подгруппе H применимо следствие 2.1.1, по которому $H \in \mathfrak{A}_1$. Теперь $H = \langle x\rangle \times (H \cap K)$. Ясно, что $\langle y\rangle$ – $n\Phi$-подгруппа в G для любого $y \in H \cap K$ простого порядка. Так как $|H \cap K| < |H|$, то к подгруппе $H \cap K$ применима индукция, по которой $G = B \rtimes (H \cap K)$, где B – нормальная в G подгруппа. Теперь $K \cap B$ – нормальная в G подгруппа и

$$|H(K \cap B)| = |H||K \cap B| = |\langle x\rangle||H \cap K||K \cap B| =$$

$$= \frac{|G|}{|K|}\cdot\frac{|G|}{|B|}|K \cap B| = \frac{|G|^2}{|KB|} \ge |G|.$$

Поэтому $G = (K \cap B) \rtimes H$. □

***Следствие* 2.2.1.** *Пусть G – группа, $\mathfrak{F}$ – формация и $\pi(G) \subseteq \chi(\mathfrak{F})$. Если $\langle x\rangle$ является $n\Phi$-подгруппой в G для каждого элемента $x \in G^{\mathfrak{F}}$ простого порядка, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Положим в теореме 2.2, что подгруппа H совпадает с $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда из теоремы 2.2 следует, что $G = G^{\mathfrak{F}} \times K$ и $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{A}_1$. По определению корадикала

$$G / G^{\mathfrak{F}} \simeq K \in \mathfrak{F},\ G / K \simeq G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{A}_1.$$

Поскольку $\pi(G) \subseteq \chi(\mathfrak{F})$, то из определения характеристики заключаем, что $\langle x\rangle \in \mathfrak{F}$ для каждого элемента $x \in G^{\mathfrak{F}}$ простого порядка. Значит, $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{F}$, но теперь группа $G \in \mathfrak{F}$. □

Придавая значения формации $\mathfrak{F}$ можно получать различные следствия. Например, справедливо

***Следствие* 2.2.2.** *Пусть G – группа. Если $\langle x\rangle$ является $n\Phi$-подгруппой в G для каждого элемента $x \in G'$ простого порядка, то G абелева.*

***Следствие* 2.2.3.** *Пусть G – группа, $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп. Если $\langle x\rangle$ является $n\Phi$-подгруппой в G для каждого элемента $x \in G^{\mathfrak{N}}$ простого порядка, то G нильпотентна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 272 с.

2. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

3. *Hall*, *P.* Complemented groups / P. Hall // J. Lond. Math. Soc. – 1937. – № 12. – P. 201–204.

4. *Черников*, *С.Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп / С.Н. Черников. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.

5. *Monakhov*, V.S. Finite groups with complemented subgroups of prime orders / V.S. Monakhov, V.N. Kniahina // Journal of Group Theory. – 2015. – № 18 (6). – P. 905–912.

6. *Княгина*, *В.Н.* О производной длине конечной группы с дополняемыми подгруппами порядка p^2 / В.Н. Княгина, В.С. Монахов // Укр. мат. журн. – 2015. – Vol. 67, № 7. – С. 874–881.

7. *Шеметков*, Л.А. Факторизация конечных групп / Л.А. Шеметков // ДАН СССР. – 1968. – Т. 178, № 3. – С. 678–689.

8. *Шеметков*, Л.А. Дополнения и добавления к нормальным подгруппам конечных групп / Л.А. Шеметков // Укр. мат. журн. – 1971. – Т. 23, № 5. – С. 678–689.

9. *Huppert*, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.

Поступила в редакцию 28.06.17.