Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Е.М. БЕРЕЗОВСКАЯ

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ

для студентов специальности
1-31 03 06 «Экономическая кибернетика»

В 2-х частях

Часть 1

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Гомель 2007

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

УДК 519.6 (075.8)
ББК 22.19я73
Б 484

Рецензенты:

С.П.Новиков, зав. кафедрой высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта», доцент, к.ф.-м.н.

В.И.Мироненко, зав. кафедрой дифференциальных уравнений учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», профессор, к.ф.-м.н.

Рекомендованы к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Березовская, Е.М.

Б 484 Методы численного анализа: тексты лекций для студентов вузов специальности 1-31 03 06 «Экономическая кибернетика»: в 2 ч. Ч.1. Интерполяция и интегрирование / Е.М. Березовская; М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2007. – 131с.

Тексты лекций ставят своей целью оказание помощи студентам в овладении базовых знаний по различным аспектам методов численного анализа. Излагается теоретический материал по вопросам приближения функций, приближенному вычислению интегралов и численному решения интегральных уравнений.

Адресованы студентам специальности 1-31 03 06 «Экономическая кибернетика».

УДК 519.6 (075.8)
ББК 22.19я73

© Березовская Е.М., 2007
© УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
Тема 1 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ 5
Лекция 1 Интерполирование с равноотстоящими узлами 5
Лекция 2 Интерполяционные формулы Ньютона 9
Лекция 3 Интерполирование внутри таблицы 13
Лекция 4 Интерполирование функций для неравноотстоящих узлов 18
Лекция 5 Интерполяционные формулы Ньютона для неравноотстоящих узлов 24
Лекция 6 Обратное интерполирование 29
Лекция 7 Интерполирование функций многих переменных 32
Лекция 8 Сходимость интерполяционного процесса 34
Тема 2 ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ 38
Тема 3 ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ 43
Лекция 1 Кубические сплайны 43
Лекция 2 Способы задания кубических сплайнов 48
Тема 4 СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ 52
Лекция 1 Точечная квадратичная аппроксимация функций 52
Лекция 2 Метод ортогональных полиномов 55
Лекция 3 Метод наименьших квадратов 61
Тема 5 ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ 65
Лекция 1 Интерполяционные квадратурные правила 65
Лекция 2 Квадратурные формулы для равноотстоящих узлов 69
Лекция 3 Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности 79
Лекция 4 Коэффициенты формул Гаусса. 85
Лекция 5 Вычисление несобственных интегралов. 92
Лекция 6 Вычисление кратных интегралов. 95
Лекция 7 Вероятностный метод 98
Лекция 8 Сходимость квадратурных процессов 105
Тема 6 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 111
Лекция 1 Метод последовательных приближений. 111
Лекция 2 Решение интегральных уравнений 116
Лекция 3 Решение интегральных уравнений Фредгольма 124
ЛИТЕРАТУРА 130

ГГУ имени Ф. Скорины

ВВЕДЕНИЕ

Изучение курса «Методы численного анализа» предусмотрено образовательным стандартом и учебным планом подготовки специалистов специальности 1-31 03 06 «Экономическая кибернетика». Данная дисциплина входит в цикл общепрофессиональных и специальных дисциплин указанной специальности.

Характерной особенностью современного этапа развития экономики следует считать резкое повышение требований к квалификации работников производства и управления, а также «виртуализацию» так называемого социального заказа на подготовку экономистов-кибернетиков агропромышленного комплекса. Содержание образовательного процесса в вузах достаточно жестко определяется государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования, которые предусматривают выпуск конкурентно способных на рынке труда специалистов. Последние должны формировать у себя прочные теоретические и практические навыки самообразования, что возможно в современных условиях только при наличии должного уровня информационной культуры.

Тексты лекций по курсу «Методы численного анализа» направлены на формирование теоретической и практической углубленной подготовки студентов по специализации в области применения численных методов. Изучение курса базируется на дисциплинах: «Вычислительные методы алгебры», «Функциональный анализ и интегральные уравнения», «Теория алгоритмов», «ЭВМ и программирование», «Программное обеспечение ЭВМ», «Математический анализ».

ГГУ имени Ф. Скорины

Тема 1 ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Лекция 1 Интерполирование с равноотстоящими узлами

1 Постановка задачи интерполирования.
2 Примеры интерполяционных функций.
3 Конечные разности и их свойства.

1 Постановка задачи интерполирования

Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ некоторую m – кратно дифференцируемую функцию $f(x)$. Пусть в k_0 точках $x_{01}, x_{02}, x_{03},..., x_{0k_0}$ известны ее значения $f(x_{01}), f(x_{02}), f(x_{03}),..., f(x_{0k_0})$, в k_1 точках $x_{11}, x_{12}, x_{13},..., x_{1k_1}$ известны значения первой производной $f^{(1)}(x_{11}), f^{(1)}(x_{12}),..., f^{(1)}(x_{1k_1})$ и в k_m точках известны значения m –ой производной $f^{(m)}(x_{m1}), f^{(m)}(x_{m2}),..., f^{(m)}(x_{mk_m})$. Значения функции и ее производных называются **данными интерполирования**, а точки x_{ij} – **узлами интерполирования**.

Задача интерполирования заключается в отыскании функции $\varphi(x)$ из некоторого класса Φ такой, что выполняется условие

$$\varphi^{(i)}(x_{ij}) = f^{(i)}(x_{ij}), \quad i = 1,2,...,m, \; j = 1,2,...,k_i. \tag{1.1}$$

Пусть $n = k_0 + k_1 + ... + k_m$. Рассмотрим на отрезке $[a,b]$ последовательность линейно независимых m – кратно дифференцируемых функций: $\omega_1(x), \omega_2(x),..., \omega_n(x)$. В качестве семейства Φ возьмем всевозможные линейные комбинации первых n функций с произвольными коэффициентами

$$\varphi(x) = a_1\omega_1(x) + a_2\omega_2(x) + ... + a_n\omega_n(x).$$

Из условия (1.1) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_i, $i = 1,2,...,n$

$$a_1\omega_1^{(i)}(x_{ij}) + a_2\omega_2^{(i)}(x_{ij}) + ... + a_n\omega_n^{(i)}(x_{ij}) = f^{(i)}(x_{ij}). \tag{1.2}$$

Система (1.2) будет иметь единственное решение в том случае, если ее определитель отличен от нуля.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2 Примеры интерполяционных функций

Приведем **примеры** интерполяционных функций.

1. Рассмотрим следующую систему линейно независимых функций: $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$. Тогда семейством Φ является совокупность алгебраических многочленов вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n . \qquad (1.3)$$

Геометрически это означает, что нужно найти алгебраическую кривую $y = P_n(x)$, проходящую через систему точек $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ (Рис. 1.1).

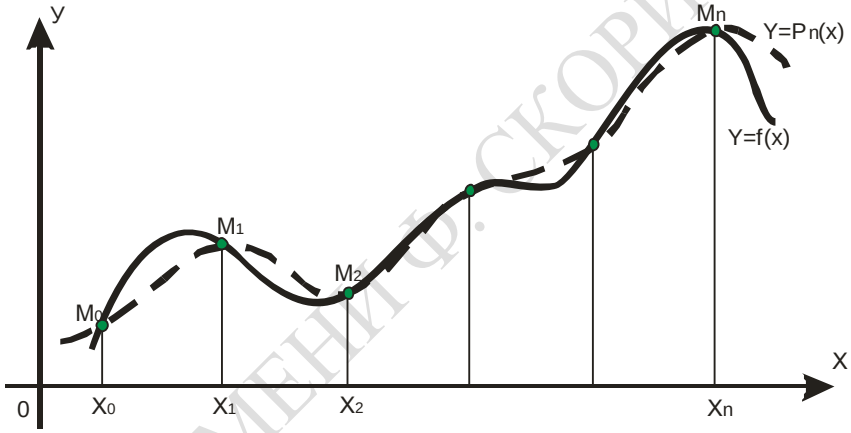


Рис.1.1 Интерполяционный многочлен

Система уравнений, из которой определяются коэффициенты a_i из (1.3), будет

$$P_n(x_i) = a_0 x_i^{\,n} + a_1 x_i^{\,n-1} + a_2 x_i^{\,n-2} + \ldots + a_{n-1} x_i + a_n = f(x_i) . \qquad (1.4)$$

Ее определитель является определителем Вандермонда, и он отличен от нуля для различных между собой значениях x_i.

Интерполирование полиномами вида (1.3) называется *алгебраическим*.

2. Для интерполирования периодических функций с периодом 2π применяется система тригонометрических функций: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots$. Линейная комбинация пер-

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

вых $2n+1$ функций является тригонометрическим многочленом степени n

$$\varphi_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,. \qquad (1.5)$$

Интерполирование с помощью полиномов (1.5) называется *тригонометрическим*.

Пусть для функции $f(x)$ построена интерполирующая функция $\varphi(x)$. Тогда, если определяется значение $f(x)$ в точке $\bar{x}$, лежащей внутри отрезка $[a,b]$ интерполирования, то такое восстановление функции называется **интерполяцией**. Если же точка $\bar{x}$ лежит вне отрезка $[a,b]$, то такое восстановление функции называется **экстраполяцией**.

3 Конечные разности и их свойства

Конечные разности в вычислительной математике имеют значение, аналогичное дифференциалам в анализе бесконечно малых величин.

Пусть даны равноотстоящие друг от друга узлы $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0,1,2,...)$ и известны соответствующие значения функции $y_k = f(x_k) = f(x_0 + kh)$. Здесь $h = \Delta x = x_k - x_{k-1}$ – некоторое фиксированное значение аргумента.

Конечными разностями *нулевого* порядка называются величины y_k равные значениям функции $f(x_k)$ в узлах x_k. Конечными разностями *первого* порядка называются величины

$$\begin{gathered}\Delta y_0 = y_1 - y_0 \equiv f(x_0 + h) - f(x_0), \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1,\\ \Delta y_2 = y_3 - y_2, ..., \ \Delta y_k = y_{k+1} - y_k\,.\end{gathered} \qquad (1.6)$$

Конечные разности *второго* порядка определяются равенствами по отношению к разностям первого порядка

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, ...,$$
$$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k \equiv y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k\,.$$

Разности *n*-го порядка определяются по формуле

$$\Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k, \quad k = 0,1,2,...\,. \qquad (1.7)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Конечные разности любого порядка легко выражаются через значения функции

$$\Delta^n y_0 = y_n - \frac{n}{1!} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} y_{n-2} + \ldots + (-1)^n y_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i y_{n-i}. \quad (1.8)$$

Доказательство проведем по индукции. Пусть эта формула верна для $n = k$. Покажем, что она будет верна и при $n = k+1$.

$$\Delta^{k+1} y_0 = \Delta^k y_1 - \Delta^k y_0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i y_{k-i+1} - \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i y_{k-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i y_{k-i+1} - \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i C_k^{i-1} y_{k-i+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i (C_k^i + C_k^{i-1}) y_{k-i+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(\frac{k!}{i!(k-i)!} + \frac{k!}{(i-1)!(k-i+1)!}\right) y_{k-i+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \left(\frac{k!}{i!(k+1-i)!}(k-i+1+i)\right) y_{k+1-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \frac{(k+1)!}{i!(k+1-i)!} y_{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i C_{k+1}^i y_{k+1-i}.$$

Аналогично доказывается формула

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1!} \Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \ldots + \Delta^n y_0 = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \Delta^{in} y_0 = (1+\Delta)^n y_0. \quad (1.9)$$

Из определения конечных разностей вытекают следующие свойства

1. если $f(x) = u(x) + v(x)$, то $\Delta f(x) = \Delta u(x) + \Delta v(x)$;
2. если $f(x) = c\,u(x)$, $c = const$, то $\Delta f(x) = c\,\Delta u(x)$;
3. конечные разности n –го порядка от многочлена степени n постоянны $\Delta^n P_n(x) = n! a_0 h^n = const$, а $\Delta^{n+1} P_n(x) = 0$;
4. $\Delta^m (\Delta^n f(x)) = \Delta^{m+n} f(x)$.

Таблицу конечных разностей обычно располагают следующим образом:

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Таблица 1.1 Конечные разности

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
x_0	f_0						
		Δf_0					
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$				
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$			
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$		
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$		$\Delta^5 f_0$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		$\Delta^4 f_1$		$\Delta^6 f_0$
		Δf_3		$\Delta^3 f_2$		$\Delta^5 f_1$	
x_4	f_4		$\Delta^2 f_3$		$\Delta^4 f_2$		
		Δf_4		$\Delta^3 f_3$			
x_5	f_5		$\Delta^2 f_4$				
		Δf_5					
x_6	f_6						

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лекция 2 Интерполяционные формулы Ньютона

1 Теорема о существовании интерполяционного многочлена.
2 Первая интерполяционная формула Ньютона.
3 Вторая интерполяционная формула Ньютона.

1 Теорема о существовании интерполяционного многочлена

Пусть на отрезке $[a,b]$ в $n+1$ узле $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0,1,2,..,n)$ заданы значения ограниченной функции $f(x)$: $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),...,\ y_n = f(x_n)$. Поставим задачу нахождения полинома $P_n(x)$ степени не выше n такого, чтобы выполнялось условие

$$f(x_i) = P_n(x_i),\ \ i = 0,1,...,n\,. \qquad (1.10)$$

Теорема 1. Существует и притом единственный многочлен степени не выше n, для которого выполняется условие (1.10).

Доказательство. Пусть многочлен $P_n(x)$ имеет вид (1.3). Используя (1.10), для определения коэффициентов a_i, получим систему (1.4) линейных алгебраических уравнений, которую запишем в виде

$$\begin{aligned} a_0 x_0^{\,n} + a_1 x_0^{\,n-1} + a_2 x_0^{\,n-2} + \ldots + a_{n-1} x_0 + a_n &= f(x_0), \\ a_0 x_1^{\,n} + a_1 x_1^{\,n-1} + a_2 x_1^{\,n-2} + \ldots + a_{n-1} x_1 + a_n &= f(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 x_n^{\,n} + a_1 x_n^{\,n-1} + a_2 x_n^{\,n-2} + \ldots + a_{n-1} x_n + a_n &= f(x_n). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Определитель системы (1.11) является определителем Вандермонда и имеет вид

$$D = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j) \neq 0 .$$

Следовательно, для системы различных между собой узлов система (1.11) имеет единственное решение. Теорема доказана.

2 Первая интерполяционная формула Ньютона

Очевидно, что условие (1.10) эквивалентно условию

$$\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0, \; m = 1,2,\ldots,n . \tag{1.12}$$

Будем искать интерполяционный полином в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1}). \tag{1.13}$$

Из (1.13) при $x = x_0$ сразу получим $P_n(x_0) = y_0 = a_0$. Найдем первую конечную разность

$$\Delta P_n(x) = a_1 h + 2a_2(x - x_0)h + \ldots + na_n(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-2})h .$$

Применяя (1.12), для коэффициента a_1 получим выражение $a_1 = \dfrac{\Delta y_0}{1!h}$. Аналогично, учитывая (1.12), для второй конечной разности справедлива формула $\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = 2\cdot 1\cdot a_2 \cdot h^2$ и, следовательно, $a_2 = \dfrac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Продолжая наши рассуждения, запишем формулу для любого a_i: $a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! h^i}$. Подставляя в (1.13) выражения для коэффициентов a_i через конечные разности, получим **первую интерполяционную формулу Ньютона**

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h}(x - x_0) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1}). \quad (1.14)$$

При $h \to 0$ справедливы следующие пределы

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^k y_0}{h^k} = \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)_{x=x_0} = y^{(k)}(x_0), \qquad \lim_{h\to 0}(x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1}) = (x - x_0)^n.$$

Отсюда следует, что при $h \to 0$ интерполяционный полином (1.14) принимает вид полинома Тейлора

$$P_n(x) = y(x_0) + y^{(1)}(x_0)(x - x_0) + \frac{y^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Для практических целей формулу Ньютона (1.14) удобнее записывать в несколько ином виде. Введем переменную $q = \frac{x - x_0}{h}$. Тогда $x - x_0 = qh$. Таким образом, для полинома $P_n(x)$ получим выражение

$$P_n(x(q)) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (1.15)$$

Формулу (1.15) выгодно использовать для интерполирования в окрестности начального значения x_0. Поэтому ее часто называют формулой для **интерполирования вперед**. В этой формуле из таблицы конечных разностей используются $\Delta^k f_0$ верхней диагонали.

Остаточный член в формуле (1.15) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где ξ – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и точку x. При наличии дополнитель-

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ного узла x_{n+1} на практике пользуются более удобной приближенной формулой

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1)...(q-n).$$

При $n=1$ из (1.15) получается формула *линейного* интерполирования

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

При $n=2$ из (1.15) имеет место формула *параболического* или квадратического интерполирования

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

3 Вторая интерполяционная формула Ньютона

Первая интерполяционная формула Ньютона практически неудобна для интерполирования функций в конце таблицы. Поэтому когда точка интерполирования лежит вблизи точки x_n удобно пользоваться **второй интерполяционной формулой Ньютона**, которая имеет вид

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_n}{1!h}(x-x_n) + ... + \frac{\Delta^n y_n}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\cdot....\cdot(x-x_1). \quad (1.16)$$

Вводя новую переменную $q = \dfrac{x-x_0}{h}$, эту формулу перепишем в виде

$$P_n(x(q)) = y_n + q\Delta y_{n-1} + ... + \frac{q(q+1)(q+2)...(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (1.17)$$

В формуле (1.17) из таблицы конечных разностей используются $\Delta^k f_i$ нижней диагонали.

Остаточный член формулы (1.17) имеет вид

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)...(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где точка ξ имеет тот же смысл, что и ранее.

Отметим, что формулы Ньютона используются и для экстраполирования функций. Если $\bar{x} < x_0$, то *для экстраполирования назад используют первую интерполяционную формулу Ньютона*. Если $\bar{x} > x_0$,

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

то *для экстраполирования вперед используют вторую интерполяционную формулу Ньютона*. Следует заметить, что операция экстраполирования менее точна, чем операция интерполирования в узком смысле.

Лекция 3 Интерполирование внутри таблицы

1 Первая и вторая интерполяционные формулы Гаусса.
2 Интерполяционная формула Ньютона-Стирлинга.
3 Интерполяционная формула Ньютона-Бесселя.

1 Первая и вторая интерполяционные формулы Гаусса

Основным недостатком интерполяционных формул Ньютона является то, что они используют лишь односторонние значения функции. На практике часто оказывается полезным использовать формулы, в которых присутствуют как последующие, так и предыдущие значения функции по отношению к ее начальному значению y_0.

Рассмотрим $2n+1$ равноотстоящих узлов $x_{-n}, x_{-n+1},..., x_{-1}, x_0, x_1, x_2,..., x_n$, в которых заданы значения некоторой функции $y_i = f(x_i),\ \ i = -n,..., n$. Требуется найти полином степени не выше $2n$, такой, чтобы выполнялось условие

$$P_{2n}(x_i) = y_i = f(x_i),\ \ i = 0, \pm 1, \pm 2,..., \pm n\,. \qquad (1.18)$$

Будем искать полином в виде

$$P_{2n}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + ... + a_{2n}(x - x_{-n+1}) \cdot ... \cdot (x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_n)\,. \qquad (1.19)$$

Поступая по аналогии с выводом первой интерполяционной формулы Ньютона, для коэффициентов a_i получим следующие выражения

$$a_0 = y_0,\ \ a_1 = \frac{\Delta y_0}{1!h},\ \ a_2 = \frac{\Delta^2 y_{-1}}{2!h^2},\ \ a_3 = \frac{\Delta^3 y_{-1}}{3!h^3},\ \ a_4 = \frac{\Delta^4 y_{-2}}{4!h^4},...,$$

$$a_{2n-1} = \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n+1}}{(2n-1)!h^{2n-1}},\ \ a_{2n} = \frac{\Delta^{2n} y_{-n}}{(2n)!h^{2n}}\,. \qquad (1.20)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Введем новую переменную $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ и, подставляя преобразованные выражения для коэффициентов (1.20) в соотношение (1.19), получим **первую интерполяционную формулу Гаусса** (для интерполирования вперёд)

$$P_{2n}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} +$$
$$+ \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots + \frac{(q+n-1)\ldots(q+1)q(q-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\cdot$$
$$\cdot \Delta^{2n-1} y_{-n+1} + \frac{(q+n-1)\ldots(q+1)q(q-1)\ldots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}. \qquad (1.21)$$

Разности Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$, $\Delta^3 y_{-1}$, $\Delta^4 y_{-2}$, $\Delta^5 y_{-2}$, $\Delta^6 y_{-3}$,..., используемые в этой формуле, образуют нижнюю ломаную линию в таблице разностей 1.2.

Если полином $P_{2n}(x)$ искать в виде

$$P_{2n}(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_{-1})(x - x_0) + a_3(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \ldots + a_4(x - x_{-2})(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1) + a_{2n-1}(x - x_{-n+1})\cdot\ldots\cdot(x - x_0)\cdot$$
$$\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1}) + a_{2n}(x - x_{-n})\cdot\ldots\cdot(x - x_{-1})(x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1}),$$

то аналогично (1.21) можно получить **вторую интерполяционную формулу Гаусса** (для интерполирования назад)

$$P_{2n}(x) = y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} +$$
$$+ \frac{(q+1)q(q-1)(q-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots + \frac{(q+n-1)\ldots(q+1)q(q-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!}\cdot$$
$$\cdot \Delta^{2n-1} y_{-n} + \frac{(q+n-1)\ldots(q+1)q(q-1)\ldots(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}. \qquad (1.22)$$

Разности Δy_{-1}, $\Delta^2 y_{-1}$, $\Delta^3 y_{-2}$, $\Delta^4 y_{-2}$, $\Delta^5 y_{-3}$, $\Delta^6 y_{-3}$,..., используемые в этой формуле, образуют верхнюю ломаную линию в таблице разностей 1.2.

Формулы Гаусса применяются для интерполирования в середине таблицы вблизи x0. При этом первая формула Гаусса (1.21) применяется при x>x0, а вторая (1.22) – при x<x0.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Таблица 1.2 Диагональная таблица разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
		Δy_{-4}					
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$				
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$				
		Δy_3					
x_4	y_4						

2 Интерполяционная формула Ньютона-Стирлинга

Среднее арифметическое первой (1.21) и второй (1.22) формул Гаусса дает **интерполяционную формулу Ньютона-Стирлинга**

$$P_{2n}(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} q + \frac{q^2}{2!} \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q^2-1)q}{3!} \frac{\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}}{2} +$$

$$+ \frac{q^2(q^2-1)}{4!} \Delta^4 y_{-2} + \ldots + \frac{(q+n-1)\ldots(q+1)q(q-1)\ldots(q-n+1)}{(2n-1)!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n+1} + \Delta^{2n-1} y_{-n}}{2} + \frac{q^2(q^2-1)\ldots(q^2-(n-1)^2)}{(2n)!} \Delta^{2n} y_{-n} .$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Остаточный член интерполяционной формулы Ньютона-Стирлинга имеет вид $$R_{2n}(x) = h^{2n+1}\frac{q^2(q^2-1)...(q^2-n^2)}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(\xi),$$

где точка ξ принадлежит отрезку, содержащему узлы $x_0 - nh$, $x_0 + nh$ и точку x.

3 Интерполяционная формула Ньютона-Бесселя

Кроме формулы Ньютона-Стирлинга для $2n+2$ равноотстоящих узлов $x_{-n}, x_{-n+1},..., x_{-1}, x_0, x_1, x_2,..., x_{n+1}$ часто используют **интерполяционную формулу Ньютона-Бесселя**, которая имеет вид

$$P_{2n+1}(x) = \frac{y_0+y_1}{2} + (q-\frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\frac{\Delta^2 y_{-1}+\Delta^2 y_0}{2} +$$

$$+\frac{(q-\frac{1}{2})q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!}\frac{\Delta^4 y_{-2}+\Delta^4 y_{-1}}{2} +$$

$$+...+\frac{q(q-1)...(q-n)(q+n-1)}{(2n)!}\frac{\Delta^{2n} y_{-n}+\Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} +$$

$$+\frac{(q-\frac{1}{2})q(q-1)(q+1)...(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n}.$$

Остаточный член интерполяционной формулы Ньютона-Бесселя следующий

$$R_{2n+2}(x) = h^{2n+2}\frac{q(q-1)...(q-n)(q+n-1)}{(2n+2)!}f^{(2n+2)}(\xi),$$

где точка ξ принадлежит отрезку, содержащему узлы $x_0 - nh$, $x_0 + nh + h$ и точку x.

Формулы с центральными разностями следует использовать, когда интерполирование проводится в середине таблицы. Если при этом $|q| \le 0.25$, то целесообразно применять интерполяционную формулу Ньютона-Стирлинга, а при $0.25 \le |q| \le 0.75$ – интерполяционную формулу Ньютона-Бесселя.

Следует отметить, что все приведенные выше формулы являются различными формами записи интерполяционного многочлена и поэто-

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

му любая из них может быть использована для интерполирования функции. Однако с вычислительной точки зрения они не равноценны. Каждая форма записи организована таким образом, что для соответствующего случая расположения точки интерполирования $\bar{x}$, в первую очередь вычисляются слагаемые, влияние которых на результат наиболее существенен.

Замечание. При интерполировании функций, заданных таблицей с постоянным шагом h аргумента, рекомендуется руководствоваться следующими правилами:

1. Составляя таблицу разностей, определяют максимальный порядок разностей, которые ведут себя правильно. Это означает следующее. Обычно значения функции в таблице приближенные. Если их предельная абсолютная погрешность может достигать половины единицы последнего разряда, то погрешность в разностях первого порядка может достигать уже единицы последнего разряда, в разностях второго порядка – двух единиц последнего разряда и т.д.

Для гладких функций обычно разности убывают с порядком, при некотором порядке становятся почти постоянными, и, следовательно, разности следующего порядка будут малы, но из-за неточности значений функции в дальнейшем с увеличением порядка разности начинают расти, имея беспорядочные знаки. Они-то уже и будут неправильными и их нельзя использовать при интерполировании.

2. Определив наивысший порядок разностей, которые можно использовать при интерполировании, выбирают интерполяционную формулу. Если значение x находится близко к началу отрезка $[a,b]$, то при интерполировании нужно использовать формулу Ньютона для интерполирования вперед, а при x близких к концу отрезка – формулу Ньютона для интерполирования назад, так как только эти формулы допускают использование правильных разностей до максимального порядка. Если же значения x, для которого нужно вычислить значение функции, находится на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, то нужно применять формулы Стирлинга или Бесселя, применяя за начальный узел в них узел x_i или x_{i+1} в зависимости от того, который из них ближе к x. При этом применяется формула Стирлинга, если $|q| \le 0.25$ и формула Бесселя при $0.25 \le |q| \le 0.75$. Кроме того, при использовании формулы Стирлинга необходимо учитывать последнюю правильную разность нечетного порядка, а при использовании формулы Бесселя – последнюю правильную разность четного порядка.

Лекция 4 Интерполирование функций для неравноотстоящих узлов

1 Разностные отношения и их свойства.
2 Интерполяционный многочлен Лагранжа.
3 Погрешность формулы Лагранжа.

1 Разностные отношения и их свойства

В том случае, когда значения аргумента являются неравноотстоящими для исследования и вычисления функции используются разностные отношения (разделенные разности). Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы произвольные попарно различные узлы интерполирования $x_0, x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n$, в которых известны значения некоторой функции $f(x)$: $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),..., y_n = f(x_n)$.

Разностными отношениями первого порядка называются величины

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},\quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$,..., f(x_k, x_{k+1}) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}. \qquad (1.23)$$

По разностным отношениям первого порядка составляются разностные отношения **второго порядка**

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0},$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1},.... \qquad (1.24)$$

Разностные отношения любого порядка $n\ (n = 1,2,3,...)$ определяются при помощи разностных отношений предыдущего порядка $n-1$ по формуле

$$f(x_0, x_1,..., x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n) - f(x_0, x_1,..., x_{n-1})}{x_n - x_0}. \qquad (1.26)$$

Используя определение, можно показать, что разностное отношение является симметрической функцией своих аргументов так, что выполняется равенство

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$f(x_0, x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, x_n) = f(x_0, x_1, ..., x_{i+1}, x_i, ..., x_{n-1}, x_n). \quad (1.27)$$

Лемма 1. Если $P_n(x)$ полином степени n, то его конечная разность $n+1$ порядка равна нулю для любой системы попарно различных между собой чисел $x, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$

$$P_n(x, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) \equiv 0. \quad (1.28)$$

Доказательство. Так как полином $P_n(x) - P_n(x_0)$ имеет корень в точке x_0, по определению, получим

$$P_n(x, x_0) = \frac{P_n(x_0) - P_n(x)}{x_0 - x} = P_{n-1}(x).$$

С учетом (1.24) полином $P_n(x_0, x_1) - P_n(x, x_0)$ обращается в нуль в точке x_1 и вторая конечная разность будет полиномом степени $n-2$

$$P_n(x, x_0, x_1) = \frac{P_n(x_0, x_1) - P_n(x, x_0)}{x_1 - x} = P_{n-2}(x).$$

Продолжая аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что

$$P_n(x, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) = P(x_0) = const,$$

и, следовательно, для разностного отношения $n+1$ порядка справедливо равенство (1.28). Лемма доказана.

Теперь получим выражения разностных отношений всех порядков через значения функции. Из определения разностного отношения первого порядка имеем

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}. \quad (1.29)$$

Для разностного отношения второго порядка получим

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{1}{x_2 - x_0}\{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)\} =$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_0}\left\{\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} - \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}\right\} =$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} . \quad (1.30)$$

Докажем, что

$$f(x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)}, \quad (1.31)$$

где $\omega(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$, а $\omega'(x_i)$ значение производной от $\omega(x)$ в точке x_i.

Доказательство проведем по индукции. Пусть формула верна для $n = k$. Тогда

$$f(x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1}) = \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} - \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} \right) : (x_{k+1} - x_0) =$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)...(x_0 - x_k)(x_0 - x_{k+1})} + \sum_{i=1}^{k} \frac{f(x_i)(x_i - x_0 - x_i + x_{k+1})}{\omega'(x_i)(x_{k+1} - x_0)} +$$

$$+ \frac{f(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_0)(x_{k+1} - x_1)...(x_{k+1} - x_k)} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)} .$$

Приведем еще выражение любого значения $f(x_n)$ функции через начальное значение $f(x_0)$ и разностные отношения $f(x_0, x_1)$, $f(x_0, x_1, x_2)$, ... для начальной точки x_0. Из определения $f(x_0, x_1)$ вытекает равенство

$$f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f(x_0, x_1) . \quad (1.32)$$

На основании соотношений (1.32) и (1.30) будем иметь

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) f(x_1, x_2) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f(x_0, x_1) +$$

$$+ (x_2 - x_1)\left[f(x_1, x_2) + (x_2 - x_0) f(x_0, x_1, x_2) \right] =$$

$$= f(x_0) + (x_2 - x_0) f(x_0, x_1) + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) f(x_0, x_1, x_2) .$$

Используя индукцию, получим

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$f(x_n) = f(x_0) + (x_n - x_0) f(x_0, x_1) + (x_n - x_0)(x_n - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \ldots +$$
$$+ (x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-1}) f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) . \qquad (1.33)$$

Отметим некоторые **свойства** разностных отношений

1. Свойство аддитивности. Если $f(x) = u(x) + v(x)$, то $f(x_0, x_1) = u(x_0, x_1) + v(x_0, x_1)$.
2. Свойство подобия. Если $f(x) = cu(x)$, где $c = const$, то $f(x_0, x_1) = cu(x_0, x_1)$.
3. Свойство симметрии. Разностное отношение $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ есть симметричная функция своих аргументов (см. (1.27)).
4. Если $f(x)$ есть многочлен степени n, то разностное отношение n-го порядка $f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ не зависит от $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и равняется коэффициенту при старшей степени x в многочлене $f(x)$. Все разностные отношения порядка большего n равны нулю (см. лемму 1).

Установим связь между разностными отношениями и конечными разностями. Предположим, что значения аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_n$ являются равноотстоящими $x_0, x_1 = x_0 + h, \ldots, x_n = x_0 + nh$. Тогда получим

$$f(x_0, x_1) = f(x_0, x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{\Delta y_0}{1! h} . \qquad (1.34)$$

Для разностного отношения второго порядка имеем

$$f(x_0, x_1, x_2) = f(x_0, x_0 + h, , x_0 + 2h) =$$
$$= \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2h}\left(\frac{\Delta y_1}{1! h} - \frac{\Delta y_0}{1! h}\right) = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2} .$$

И для n-го разностного отношения имеет место равенство

$$f(x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + nh) = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} . \qquad (1.35)$$

2 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Рассмотренные в лекциях 1-3 формулы, пригодны лишь для случая равноотстоящих узлов. Построим формулу для произвольного расположения узлов интерполирования.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы произвольные попарно различные узлы интерполирования $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$, в которых известны значения некоторой функции $f(x)$: $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), ...,\ y_n = f(x_n)$. Построим полином $L_n(x)$, для которого выполняется равенство

$$L_n(x_i) = f(x_i),\ \ i = 0,1,...,n. \tag{1.36}$$

Решим сначала вспомогательную задачу и построим полином $P_{n,i}(x)$ степени n, удовлетворяющий следующему условию

$$P_{n,i}(x_j) = \begin{cases} 0, & при\ \ i \neq j \\ 1, & при\ \ i = j. \end{cases} \tag{1.37}$$

Из условия (1.37) следует, что полином $P_{n,i}(x)$ имеет n корней в узлах $x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{n-1}, x_n$. Следовательно, он может быть записан в виде

$$P_{n,i}(x) = k_i(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n).$$

Так как $P_{n,i}(x_i) = 1$, то для коэффициентов k_i получаем выражение

$$k_i = \left((x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)\right)^{-1}.$$

Очевидно, что тогда полином $L_n(x)$, удовлетворяющий (1.36), можно записать в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_{n,i}(x) y_i\ . \tag{1.38}$$

Формула (1.38) называется **интерполяционной формулой Лагранжа**. Обычно формулу Лагранжа записывают в другом виде. Рассмотрим полином $\omega(x)$ степени $n+1$

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})...(x - x_n).$$

Для первой производной справедливо выражение

$$\omega'(x) = \sum_{j=0}^{n} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i).$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

С учетом введенных обозначений полином Лагранжа записывается в виде

$$L_n(x) = \omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-x_i)\omega'(x_i)}\,. \qquad (1.39)$$

В отношении вычислений формула Лагранжа удобна при интерполировании **многих функций в одной точке** $\bar{x}$, так как значения множителей $k_i(x)$ можно вычислить однажды и для всех функций. Формула Лагранжа имеет и существенный недостаток. Так при прибавлении одного или нескольких узлов (например, когда точность мала) все вычисления необходимо производить заново. В формуле не только добавляются новые члены, но необходимо пересчитывать и все ранее найденные члены суммы, так как в них появляются новые множители.

3 Погрешность формулы Лагранжа

Проводя интерполирование по формуле (1.39), мы допускаем некоторую погрешность $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$, которая является нулевой в общем случае только в узлах интерполирования. Будем считать, что на отрезке интерполирования $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет все производные вплоть до $n+1$ порядка включительно. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Psi(x) = f(x) - L_n(x) - k\omega(x)\,.$$

Очевидно, что $\Psi(x)$ имеет $n+1$ корней в узлах $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$. Выберем произвольную точку $\bar{x} \in [a,b]$ и подберем постоянную k так, чтобы выполнялось равенство

$$\Psi(\bar{x}) = f(\bar{x}) - L_n(\bar{x}) - k\omega(\bar{x}) = 0\,.$$

Тогда отсюда определяется значение k: $k = \dfrac{f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})}{\omega(\bar{x})}$. При таком выборе k функция $\omega(x)$ имеет $n+2$ корня на отрезке интерполирования $[a,b]$ и обращается в ноль на концах отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_i, \bar{x}], [\bar{x}, x_{i+1}], ..., [x_{n-1}, x_n]$. Следовательно, по теореме Ролля $\omega'(x)$ имеет $n+1$ корень на $[a,b]$, $\omega''(x)$ имеет на $[a,b]$ n корней и так далее, $\omega^{(n+1)}(x)$ имеет, по крайней мере, один корень на $[a,b]$ в некоторой точке ξ. Значит $\omega^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Подставляя k из последнего выражения в предыдущее, получим выражение для погрешности интерполирования

$$R_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(\bar{x}) \qquad (1.40)$$

на отрезке $[a,b]$.

Если известна постоянная $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$, то для погрешности интерполирования (1.40) можно воспользоваться оценкой

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega(x)\right|. \qquad (1.41)$$

Лекция 5 Интерполяционные формулы Ньютона для неравноотстоящих узлов

1 Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона.
2 Минимизация остатка интерполирования.
3 Оценка погрешности. Пример.

1 Первая и вторая интерполяционные формулы Ньютона

Покажем, что, используя понятие разностных отношений, формулу Лагранжа можно записать в виде аналогичном первой и второй интерполяционным формулам Ньютона для равноотстоящих узлов. Пусть $L_n(x)$ полином Лагранжа, для которого выполняется условие

$$L_n(x_i) = f(x_i),\ \ i = 0,1,\ldots,n. \qquad (1.42)$$

Тогда $L_n(x,x_0) = \dfrac{L_n(x_0) - L_n(x)}{x_0 - x}$ и $L_n(x) = L_n(x_0) + L_n(x,x_0)(x - x_0)$.

По определению, для второго разностного отношения имеем

$$L_n(x,x_0,x_1) = \frac{L_n(x_0,x_1) - L_n(x,x_0)}{x_1 - x}.$$

Откуда $L_n(x,x_0) = L_n(x_0,x_1) + L_n(x,x_0,x_1)(x - x_1)$. Последовательно выражая разностные отношения m-го порядка через отношения $m+1$-го порядка по формуле

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$L_n(x, x_0,..., x_{m-1}) = L_n(x_0, x_1,..., x_m) + L_n(x, x_0,..., x_m)(x - x_m),$$

окончательно для полинома $L_n(x)$ получим представление

$$\begin{aligned} L_n(x) = L_n(x_0) + L_n(x_0, x_1)(x - x_0) + L_n(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \\ + ... + L_n(x_0, x_1,..., x_i)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1}) + ... + \\ + L_n(x_0, x_1,..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) + \\ + L_n(x, x_0, x_1,..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n). \end{aligned}$$

Учитывая (1.42) и то, что $L_n(x, x_0,..., x_m) = 0$, получим **первую интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов**

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + ... + \\ + f(x_0, x_1, x_2,..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Аналогичным образом можно построить и **вторую интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих узлов**, которая имеет вид

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \\ + ... + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2},..., x_0)(x - x_n)(x - x_{n-1})...(x - x_1). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Кроме формул (1.40) и (1.41) для оценки погрешности получим еще одну исходя из формулы Ньютона. Добавим к узлам $x_0, x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n$ еще один узел x, то есть точку, в которой вычисляется значение функции $f(x)$. Тогда по формуле выражающей значения функции в узле через начальные разностные отношения, получим

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + ... + \\ + f(x_0, x_1, x_2,..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) + \\ + f(x_0, x_1,..., x_n, x)(x - x_0)...(x - x_{n-1})(x - x_n). \end{aligned}$$

Заметим, что в правой части сумма всех слагаемых без последнего интерполяционной формулой Ньютона (1.43). Тогда

$$f(x) = P_n(x) + f(x_0, x_1,..., x_n, x)(x - x_0)...(x - x_{n-1})(x - x_n),$$

или

$$R(x) = f(x) - P_n(x) = \omega(x) f(x_0, x_1,..., x_n, x). \quad (1.45)$$

Сравнивая формулы (1.40) и (1.45) получим, что

ГГУ имени Ф. Скорины

$$f(x_0, x_1, ..., x_n, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

2 Минимизация остатка интерполирования

Пусть функция $f(x)$ приближается на отрезке $[a,b]$ с помощью интерполяционного многочлена степени n с узлами интерполяции $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in [a,b]$. Рассмотрим выражение для погрешности в виде (1.40)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x). \qquad (1.46)$$

Поставим перед собой задачу путем выбора узлов интерполирования минимизировать погрешность на отрезке $[a,b]$ для функции $f(x)$. Если считать, функция $f^{(n+1)}(x)$ мало меняется на отрезке $[a,b]$, то нам нужно на этом отрезке минимизировать величину $\omega(x)$. Эта задача вплотную примыкает к задаче, решенной русским математиком П.Л.Чебышевым:

Среди всех многочленов степени n с коэффициентом равным единице при старшей степени найти многочлен, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1,1]$.

Многочленом Чебышева, определенным на отрезке $[-1,1]$, называется многочлен

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x), \ n \geq 0.$$

Учитывая, что

$$\cos(n+1)\varphi = \cos n\varphi \cos\varphi - \sin n\varphi \sin\varphi = 2\cos n\varphi \cos\varphi -$$
$$-(\cos n\varphi \cos\varphi + \sin n\varphi \sin\varphi) = 2\cos n\varphi \cos\varphi - \cos(n-1)\varphi,$$

и, считая $\varphi = \arccos x$, получим следующую рекуррентную формулу

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \ n = 1,2,... . \qquad (1.47)$$

Приведем несколько частных выражений

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, ...$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Из соотношения (1.47) вытекают следующие **свойства** многочленов Чебышева

1. При четном n многочлен содержит только четные степени x, а при нечетном n – только нечетные степени x.
2. Старший коэффициент многочлена Чебышева $T_n(x)$ при $n \geq 1$ равен 2^{n-1}.
3. Многочлен $T_n(x)$ имеет n действительных корней в интервале $(-1,1)$ в точках $x_i = \cos\dfrac{\pi(2i+1)}{2n}$, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$.
4. Многочлен $T_n(x)$ принимает максимальное по модулю значение в точках $x_m = \cos\dfrac{\pi m}{n}$, $m = 0,1,2,\ldots,n$, которые называются точками **чебышевского альтернанса**. При этом справедливо равенство $T_n(x_m) = (-1)^m$.

Теорема 2. Среди всех многочленов степени n со старшим коэффициентом равным единице наименьшее значение максимума модуля на отрезке $[-1,1]$ имеет многочлен

$$\overline{T}_n(x) = 2^{1-n}T_n(x),\ \ n = 1,2,3,\ldots .$$

Доказательство проведем методом от противного. Пусть существует многочлен $P_n(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$ такой, что справедливо неравенство

$$\max_{[-1,1]}\left|P_n(x)\right| \leq \max_{[-1,1]}\left|\overline{T}_n(x)\right| = 2^{1-n}. \qquad (1.48)$$

Тогда $R_{n-1}(x) = \overline{T}_n(x) - P_n(x)$ является многочленом степени $n-1$. Так как $T_n(x_m) = (-1)^m$, то $R_{n-1}(x_m) > 0$ в точках $x_0, x_2, x_4,\ldots,$ и $R_{n-1}(x_m) < 0$ в точках $x_1, x_3, x_5,\ldots$. Следовательно, $R_{n-1}(x)$ меняет знак в n точках интервалов $[x_0, x_1],[x_1, x_2],\ldots,[x_{n-1}, x_n]$. Но многочлен степени $n-1$ не может иметь более $n-1$ корней. Поэтому соотношение (1.47) невозможно и для всякого многочлена $P_n(x)$ должно выполняться неравенство

$$\max_{[-1,1]}\left|\overline{T}_n(x)\right| = 2^{1-n} \leq \max_{[-1,1]}\left|P_n(x)\right| .$$

Теорема доказана.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Используем доказанную теорему для минимизации отклонения многочлена $\omega(x)$ от нуля на отрезке $[a,b]$. Отрезок $[a,b]$ заменой переменных $t=\dfrac{2x}{b-a}-\dfrac{b+a}{b-a}$ переводится в отрезок $[-1,1]$. Поэтому, чтобы многочлен $\omega(x)$ наименее уклонялся от нуля, на отрезке $[a,b]$ в качестве узлов интерполирования следует взять точки $x_k=\dfrac{t_k(b-a)+b+a}{2}$, где $t_k=\cos\dfrac{(2k+1)}{2(n+1)}\pi$ – корни многочлена Чебышева степени $n+1$. Тогда $x_k-x=\dfrac{(b-a)(t_k-t)}{2}$ и для величины отклонения $\omega(x)$ от нуля справедлива формула

$$\omega(x)=\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\omega(t)=\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}\overline{T}_{n+1}(x)\le\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}.$$

При указанном выборе узлов интерполирования из (1.46) для погрешности формулы Лагранжа получим оценку

$$|R_n(x)|\le\frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}\frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \qquad (1.49)$$

3 Оценка погрешности. Пример

Пример. Оценить, с какой погрешностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\ln 100.5$, если известны значения $\ln 100,\ \ln 101,\ \ln 102,\ \ln 103$.

В данном случае

$$f(x)=\ln x,\ \ n=3,\ \ a=100,\ \ b=103,\ \ f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}.$$

Вычислим значения величин, входящих в формулы (1.46), (1.41) и (1.49).

$$\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|=\frac{6}{100^4},\quad \omega(100.5)=0.5\cdot0.5\cdot1.5\cdot2.5=\frac{15}{16}.$$

По формуле (1.41) будем иметь

$$\left|R_n(x)\right|=|\ln 100.5-L_3(100.5)|\le\frac{6\cdot15}{100^4\cdot4!\cdot16}=2.344\cdot10^{-9}.$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

По формуле (1.49) результат будет следующий

$$\left|R_n(x)\right| = |\ln 100.5 - L_3(100.5)| \le \frac{6\cdot 3^4}{100^4\cdot 4!\cdot 2^7} = 1.582\cdot 10^{-9}.$$

Из сравнения полученных результатов видно, что формула (1.49) дает более точное значение по отношению к (1.46), (1.41).

Лекция 6 Обратное интерполирование

1 Постановка задачи.
2 Формулы для равноотстоящих и неравноотстоящих узлов.
3 Интерполирование с кратными узлами.

1 Постановка задачи

Часто на практике возникает задача об отыскании по заданному значению функции значения аргумента. Эта задача решается методом **обратного интерполирования**.

Если заданная функция монотонна, то обратное интерполирование проще всего осуществить путем замены функции аргументом и обратно, и последующего интерполирования.

Если заданная функция не монотонна, то этим приемом воспользоваться нельзя. Тогда не меняя ролями функцию и аргумент, записываем ту или иную интерполяционную формулу, используя известные значения аргумента и считая функцию известной, решаем полученное уравнение относительно аргумента.

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы узлы интерполирования $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ и известны соответствующие значения $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), ...,\ y_n = f(x_n)$. Теперь необходимо по заданному значению функции $\bar{y}$ определить аргумент $\bar{x}$, соответствующий этому значению. Для произвольной функции задача обратного интерполирования не может быть решена однозначно. Решение будет однозначным, если функция $f(x)$ монотонна на минимальном отрезке, содержащем узлы интерполирования.

2 Формулы для равноотстоящих и неравноотстоящих узлов

Рассмотрим **два случая**.

Если узлы интерполирования **равноотстоящие**, то для решения поставленной задачи можно использовать метод **последовательных**

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

приближений, который заключается в следующем. Пусть функция $f(x)$ монотонна и значение $\bar{y}$ содержится между y_0 и y_1. Запишем первую интерполяционную формулу Ньютона (1.15)

$$y = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 .$$

Перепишем ее в виде

$$q = \varphi(q) = \frac{y - y_0}{\Delta y_0} - \frac{q(q-1)}{2!\,\Delta y_0}\Delta^2 y_0 - \ldots - \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!\,\Delta y_0}\Delta^n y_0 . \quad (1.50)$$

Для отыскания q можно использовать итерационный процесс

$$q_m = \varphi(q_{m-1}),\ m = 1,2,3,\ldots . \quad (1.51)$$

В качестве нулевого приближения можно взять $q_0 = \dfrac{y - y_0}{\Delta y_0}$. Для достаточно гладких функций при малом шаге h итерационный процесс (1.51) сходится. Если $\lim\limits_{m\to\infty} q_m = q$, то значение искомого аргумента $\bar{x}$ определяется из формулы $\bar{x} = x_0 + qh$.

В случае **неравноотстоящих** узлов значение аргумента можно определить по формуле Лагранжа для обратной функции

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\bar{y} - y_0)(\bar{y} - y_1)\ldots(\bar{y} - y_{i-1})(\bar{y} - y_{i+1})\ldots(\bar{y} - y_n)}{(y_i - y_0)(y_i - y_1)\ldots(y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1})\ldots(y_i - y_n)} x_i . \quad (1.52)$$

3 Интерполирование с кратными узлами

Пусть на отрезке $[a,b]$ заданы m узлов. В каждом узле x_i, $i = 1,2,\ldots,m$ известны значения функции $f(x_i)$ и ее производных $f^{(1)}(x_i), f^{(2)}(x_i),\ldots, f^{(\alpha_i - 1)}(x_i)$. Будем считать, что $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n+1$. Необходимо найти многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что выполняется условие

$$P_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k),\ i = 0,1,\ldots,\alpha_k - 1;\ k = 1,2,\ldots,m . \quad (1.53)$$

Покажем, что система (1.53) имеет единственное решение. Для этого рассмотрим однородную систему

ПГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$P_n^{(i)}(x_k) = 0 . \qquad (1.54)$$

Из (1.54) вытекает, что многочлен $P_n(x)$ имеет корни в узлах x_k кратности α_k. Следовательно, его можно записать в виде

$$P_n(x) = l(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{\alpha_m} .$$

Справа в этом выражении стоит многочлен степени $n+1$ и он может совпадать с многочленом степени n только в том случае, если $P_n(x) \equiv 0$. Последнее означает, что однородная система (1.54) имеет лишь тривиальное решение и, следовательно, система (1.53) имеет единственное решение.

Многочлен $P_n(x)$, который удовлетворяет равенствам (1.53), называют **многочленом Эрмита**. Он имеет вид

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=0}^{\alpha_k - 1} f^{(i)}(x_k) \frac{A_{n+1}(x)}{i!(x - x_k)^{\alpha_k}} \sum_{j=0}^{\alpha_k - i - 1} \frac{1}{j!} \left(\frac{(x - x_k)^{\alpha_k}}{A_{n+1}(x)} \right)^{j}_{x = x_k} (x - x_k)^{i+j} , \qquad (1.55)$$

где $A_{n+1}(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{\alpha_m}$.

Когда все узлы имеют кратность равную двум, многочлен Эрмита можно записать в более простой форме

$$H_{2m-1}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\omega^2(x)}{(x - x_k)^2 (\omega^{(1)}(x_k))^2} \cdot$$
$$\cdot \left((1 - \frac{\omega^{(2)}(x_k)}{\omega^{(1)}(x_k)}(x - x_k)) f(x_k) + (x - x_k) f^{(1)}(x_k) \right).$$

Если $f(x)$ $n+1$ раз непрерывно дифференцируемая функция, то аналогично тому, как это было сделано для интерполяционного полинома Лагранжа, можно показать, что для погрешности интерполирования с кратными узлами справедлива формула

$$R_n(f) = f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} A_{n+1}(x) . \qquad (1.56)$$

Простейшим примером многочлена Эрмита, построенного для одного узла кратности α_k, является отрезок ряда Тейлора

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$P_{2k-1}(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f^{(1)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f^{(2)}(x_0) +$$

$$+ \ldots + \frac{(x-x_0)^{\alpha_k - 1}}{(\alpha_k - 1)!} f^{(\alpha_k - 1)}(x_0).$$

Лекция 7 Интерполирование функций многих переменных

1 О проблеме интерполирования функций многих переменных.
2 Интерполяционная формула Ньютона.

1 О проблеме интерполирования функций многих переменных

Интерполирование функций многих переменных значительно сложнее, чем для одной переменной. Ограничимся случаем двух переменных. Пусть на плоскости (x, y) даны $n+1$ точка $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Будем искать многочлен $P(x, y)$ относительно (x, y) возможно низшей степени, который в этих точках принимал соответственно значения $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Если искомый многочлен записать в виде

$$P(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2,$$

то, подставляя данные координаты точек, и приравнивая левую часть соответствующему значению z_i, получим систему $n+1$ линейных независимых алгебраических уравнений относительно $1+2+3+\ldots+m+1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ неизвестных a_{ij}. Если не накладывать на $P(x, y)$ никаких дополнительных условий, то $n+1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$. То есть мы не можем решать задачу при любом количестве узлов интерполирования – это *во-первых*.

Рассмотрим определитель получившейся системы. Например, при $n = 2$ и $n = 5$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0^2 & x_0y_0 & y_0^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 \\ 1 & x_5 & y_5 & x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 \end{vmatrix}.$$

Первый определитель обращается в нуль, если все три точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ лежат на одной прямой; второй равен нулю, если все шесть точек лежат на одной кривой второго порядка. То есть, узлы интерполирования не могут быть расположены произвольно – это *во-вторых*, а проверка того, что определители не равны нулю довольно затруднительна.

Третье принципиальное затруднение возникает при оценке остаточных членов, так как теорема Ролля в этом случае неприменима. Отметим так же и то, что более громоздкими становятся рассуждения, связанные с большим числом переменных.

2 Интерполяционная формула Ньютона

Приведем интерполяционную формулу Ньютона для случая двух переменных. Возьмем $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ узлов, расположенных следующим образом

$$\begin{array}{lllll} (x_0, y_0) & (x_1, y_0) & \dots & (x_{n-1}, y_0) & (x_n, y_0) \\ (x_0, y_1) & (x_1, y_1) & \dots & (x_{n-1}, y_1) & \\ \dots & \dots & & & \\ (x_0, y_{n-1}) & (x_1, y_{n-1}) & & & \\ (x_0, y_n)\,. & & & & \end{array}$$

Причем, $x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Значения x_i и y_i могут быть произвольными, так, что взаимное расположение узлов может быть довольно общим. Обобщение интерполяционной формулы Ньютона (1.43) для неравных промежутков на случай интерполирования функций двух переменных имеет вид

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} (x - x_0)\dots(x - x_{i-1}) \cdot$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\cdot(y-y_0)\ldots(y-y_{j-1})\,f(x_0,x_1,..,x_i;y_0,y_1,..,y_j)\,. \qquad (1.57)$$

Лекция 8 Сходимость интерполяционного процесса

1 Понятия и определения.
2 Теорема о сходимости.
3 Пример на отсутствии сходимости.

1 Понятия и определения

При практическом использовании интерполирования не всегда удается произвести оценку остаточных членов. Высшие производные, входящие в эти остаточные члены, не всегда доступны. Поэтому уверенности в том, что, выбрав достаточно большое количество узлов, мы достаточно хорошо приблизимся к интерполируемой функции, была бы очень полезна в практическом интерполировании. В связи с этим возникает задача о сходимости интерполяционного процесса.

Пусть задана треугольная матрица X

$$\begin{pmatrix} x_0^{(0)} & & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ x_0^{(n)} & x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \ldots & x_n^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \qquad (1.58)$$

Будем считать, что все элементы этой матрицы принадлежат отрезку $[a,b]$. Для некоторой, заданной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ строится последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа $P_n(x),\ n=1,2,\ldots$, причем для построения $P_n(x)$ в качестве узлов интерполирования используются все элементы n-ой строки матрицы (1.58).

Интерполяционный процесс называется **сходящимся**, если

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x), \quad x\in[a,b]\,. \qquad (1.59)$$

Этот процесс равномерно сходится, если сходимость в (1.59) равномерная. В проблеме сходимости основным является вопрос о том, как

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

между собой должны быть связаны свойства функции $f(x)$ и таблицы X, чтобы в принятой мере приближения имела место сходимость $P_n(x)$ к $f(x)$. *Практическая полезность*: в ней выясняются условия, при которых возможно сколь угодно точное вычисление $f(x)$, если число узлов взято достаточно большим, хотя пока не дается никакого правила для нахождения числа узлов n, при котором погрешность становится меньше заданной границы.

На первый взгляд кажется, что если элементы матрицы с повышением номера строки все плотнее и плотнее заполняют отрезок $[a,b]$, то должна быть равномерная сходимость $P_n(x)$ к $f(x)$ хотя бы для непрерывных функций. Однако это не так. Как было показано Фабером, для любой заданной матрицы узлов X найдется такая непрерывная функция $f(x)$, что построенные для нее интерполяционные многочлены Лагранжа по этим узлам не сходятся равномерно на отрезке $[a,b]$ к функции $f(x)$. Поэтому выделение класса функций, для которых имеется равномерная сходимость на тех или иных матрицах узлов X уделяется большое внимание. Здесь приведем доказательство теоремы о сходимости, относящейся к целым функциям.

2 Теорема о сходимости

Функция $f(x)$ называется **целой**, если ее можно представить в виде степенного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

сходящегося при всех значениях x.

Теорема 3. Пусть $f(x)$ – целая функция. Тогда последовательность построенных для нее интерполяционных многочленов $P_n(x)$ по любой треугольной матрице (1.58) с элементами, принадлежащими отрезку $[a,b]$, равномерно на отрезке $[a,b]$ сходится к функции $f(x)$.

Доказательство. Так как сходящиеся степенные ряды можно дифференцировать, то функция $f(x)$ имеет производные любого порядка. Следовательно, для любого n можем воспользоваться оценкой остаточного члена

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)|, \qquad (1.60)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

где $M_{n+1} = \max\limits_{x\in[a,b]} | f^{(n+1)}(x) |$, $\omega_n(x) = (x - x_0^{(n)})(x - x_1^{(n)})...(x - x_n^{(n)})$.

Заменяя каждую разность $(x - x_i^{(n)})$, на большую $(b - a)$ в выражении $\omega_n(x)$ погрешность (1.60) примет вид

$$| R_n(x) | =< \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Покажем, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$. Найдем $f^{(n+1)}(x)$.

$$f^{(n+1)}(x) = (n+1)!a_{n+1} + (n+2)(n+1)...2\cdot 1\cdot a_{n+2}(x - x_0) +$$
$$+ ... + (n+k)(n+k-1)...k\cdot a_{n+k}(x - x_0)^{k-1} + ...$$

Отсюда

$$| f^{(n+1)}(x) | \le (n+1)! \, | a_{n+1} | + (n+2)(n+1)...2\cdot 1\cdot | a_{n+2} | \, | (x - x_0) | + ... +$$
$$+ (n+k)(n+k-1)...k\cdot | a_{n+k} | \, | (x - x_0) |^{k-1} + ... \le$$

$$\le (n+1)^{n+1} | a_{n+1} | + (n+2)^{n+1} | a_{n+2} | \, | (x - x_0) | + ... +$$
$$+ (n+k)^{n+1} | a_{n+k} | \, | (x - x_0) |^{k-1} + ...$$

Так как функция $\varphi_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^n$ возрастающая при $x > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x, \text{ то } \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x.$$

Тогда $\left(\frac{n+k}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{k-1}{n+1}\right)^{n+1} < e^{k-1}$.

Таким образом,

$$\frac{| f^{(n+1)}(x) |}{(n+1)^{n+1}} \le | a_{n+1} | + | a_{n+2} | (e | x - x_0 |) + ... + | a_{n+k} | (e | x - x_0 |)^{k-1} + ...$$

Умножим обе части последнего неравенства на произвольное, но фиксированное число S^{n+1}, большее нуля. Получим

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} S^{n+1} \le |a_{n+1}| S^{n+1} + |a_{n+2}| S^{n+1}(e|x-x_0|) +$$

$$+ \ldots + |a_{n+k}| S^{n+1}(e|x-x_0|)^{k-1} + \ldots .$$

Обозначим через R наибольшее из двух чисел: S и $\max\limits_{x\in[a,b]}(e|x-x_0|)$. Тогда последнее неравенство перепишется в виде

$$\frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)^{n+1}} S^{n+1} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| R^k .$$

Так как это неравенство верно для любого $x \in [a,b]$, то

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} S^{n+1} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| R^k . \qquad (1.61)$$

Так как ряд $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$ абсолютно сходящийся при любых x, то и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| R^k$ сходится. Следовательно, его остаток $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |a_k| R^k$ и тем более величина $\frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} S^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Далее

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} .$$

Из разложения

$$e^{n+1} = 1 + (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2!} + \ldots + \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots ,$$

следует, что $e^{n+1} > \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Поэтому

$$\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \left(e(b-a)\right)^{n+1} .$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Теперь, полагая $S = e(b-a)$ и учитывая (1.61), получаем

$$\lim_{n \leftarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = 0$$

и, следовательно, $\lim_{n \leftarrow \infty} |R_n(x)| = 0$. Теорема доказана.

3 Пример на отсутствии сходимости

Требование, чтобы $f(x)$ была целой, является существенным, на что показывает следующий пример.

Рассмотрим на отрезке [-1,1] функцию $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & при \ x \geq 0 \\ 0, & при \ x < 0 \end{cases}$.

Эта функция непрерывна вместе со своими производными на всей числовой прямой. Если выбрать узлы интерполирования только на отрезке [-1,0], то $P_n(x) \equiv 0$ и не стремится к $f(x)$ ни при каком положительном значении x.

Тема 2 ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

1 Постановка задачи.
2 Дифференцирование для равноотстоящих узлов.
3 Дифференцирование для неравноотстоящих узлов.
4 Погрешность формул численного дифференцирования.

1 Постановка задачи

Пусть на отрезке $[a,b]$ рассматривается функция $f(x)$, имеющая непрерывную производную порядка $n+1$. Возьмем на $[a,b]$ $n+1$ различный узел (для удобства) $x_0 < x_1 < ... < x_n$ и известны значения функции в них $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1),..., y_n = f(x_n)$. Требуется найти значение k-ой производной от функции $f(x)$ в любой точке $x \in [a,b]$. Построим интерполяционный многочлен $P_n(x)$ для функции $f(x)$ степени n с погрешностью $R(x)$. Тогда запишем $f(x) = P_n(x) + R(x)$. Для производной порядка k имеем

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$f^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) + R^{(k)}(x)$. Если погрешность мала, то пренебрегая ею, получим формулу для приближенного вычисления производной $f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x)$. Пользоваться этой формулой целесообразно при небольших порядках k, когда $k \le n$, так как все производные от $P_n(x)$ порядка выше n тождественно равны нулю.

Получим некоторые явные формулы для численного вычисления производных при некоторых видах $P_n^{(k)}(x)$.

2 Дифференцирование для равноотстоящих узлов

Если узлы равноотстоящие, то для вычисления производной удобно пользоваться первой интерполяционной формулой Ньютона

$$P_n(x(q)) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 .$$

Учитывая, что $\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dq}\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dP}{dq}$, получим

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 +$$
$$+\frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots +$$
$$+\frac{q(q-1)\ldots(q-n+2)+\ldots+(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0) ,$$

$$P_n^{(2)}(x) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots) . \quad (2.1)$$

Аналогично вычисляются производные высших порядков. Если производная вычисляется в узловой точке, то формулы упрощаются. Например, если $x = x_0$, то

$$P_n^{(1)}(x_0) = \frac{1}{h}(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \ldots) ,$$
$$P_n^{(2)}(x_0) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\Delta^4 y_0 + \ldots) . \quad (2.2)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Так как $R_n(x) = f(x) - P_n(x) = h^{n+1}\dfrac{q(q-1)...(q-n)f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, то, считая, что $f(x) \in C^{n+2}_{[a,b]}$, получим

$$R_n^{(1)}(x) = \frac{h^n}{(n+1)!}\cdot$$

$$\cdot\left(f^{(n+1)}(\xi)\frac{d}{dq}\big(q(q-1)...(q-n)\big) + q(q-1)...(q-n)\frac{d}{dq}f^{(n+1)}(\xi)\right).$$

В узлах же интерполирования последняя формула примет вид

$$R_n^{(1)}(x_i) = (-1)^{n-i}\frac{h^n i!(n-i)!}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \qquad (2.3)$$

При шаге $h << 1$ можно считать, что $f^{(n+1)}(\xi) \approx \dfrac{\Delta^{n+1}f_0}{h^{n+1}}$. Тогда оценка (2.3) примет вид

$$R_n^{(1)}(x_i) \approx (-1)^{n-i}\frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}\Delta^{n+1}f_0.$$

3 Дифференцирование для неравноотстоящих узлов

Для случая неравноотстоящих узлов удобно пользоваться формулами Лагранжа или Ньютона для неравноотстоящих узлов. Формула Лагранжа имеет вид (1.39)

$$L_n(x) = \omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}.$$

Тогда первая производная запишется в форме

$$L_n^{(1)}(x) = \omega^{(1)}(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} - \omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)^2\omega'(x_i)}. \qquad (2.4)$$

Учитывая, что

$$\omega^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^{n}(x-x_0)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n) = \omega(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{x-x_i},$$

формулу (2.4) можно переписать в виде

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$L_n^{(1)}(x) = \omega(x)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-x_k}\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} - \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x-x_i)^2\omega'(x_i)}\right).$$

На практике более удобно пользоваться формулой Ньютона (1.43)

$$\begin{aligned} P_n(x) = {} & f(x_0) + f(x_0, x_1)(x-x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x-x_0)(x-x_1) + \\ & + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \\ & + \ldots + f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1}) + \\ & + \ldots + f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) . \end{aligned}$$

Для построения формулы численного дифференцирования введем следующие обозначения $\alpha_0 = x - x_0$, $\alpha_1 = x - x_1$, ... , $\alpha_i = x - x_i$. Тогда первая производная запишется

$$\begin{aligned} P_n^{(1)}(x) = {} & f(x_0, x_1) + f(x_0, x_1, x_2)(\alpha_0 + \alpha_1) + \\ & + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(\alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_0\alpha_2) + \ldots + \\ & + f(x_0, x_1, \ldots, x_i)\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{i-1} + \ldots + \\ & + f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{n-1}) . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Вторая производная примет вид

$$\frac{1}{2!}f^{(2)}(x) \approx \frac{1}{2!}P_n^{(2)}(x) = f(x_0, x_1, x_2) + f(x_0, x_1, x_2, x_3)(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_0) + \ldots . \tag{2.6}$$

Аналогичным образом можно вычислить производные более высокого порядка.

4 Погрешность формул численного дифференцирования

Рассмотрим сначала случай, когда точка $\bar{x}$ не принадлежит минимальному отрезку $[a, b]$, содержащему узлы интерполирования. Введем вспомогательную функцию $\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - k\omega(x)$. Функция $\varphi(x)$ имеет $n+1$ нулей в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ по построению. На основании теоремы Ролля $\varphi^{(1)}(x)$ будет иметь n, $\varphi^{(2)}(x)$ – $n-1$ и $\varphi^{(k)}(x)$ будет иметь $n-k+1$ нулей внутри отрезка $[a, b]$. Выберем теперь k таким, чтобы $\bar{x}$ также являлась корнем $\varphi^{(k)}(x)$. Так как

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$\bar{x} \notin [a,b]$, то это всегда можно сделать, полагая $k = \dfrac{f^{(k)}(\bar{x}) - L_n^{(k)}(\bar{x})}{\omega^{(k)}(\bar{x})}$.

Тогда $\varphi^{(k)}(x)$ будет иметь $n-k+2$ нулей и, следовательно, $\varphi^{(n+1)}(x)$ обращается в нуль, по крайней мере, в одной точке ξ. Получим $\varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0$. Подставляя выражение для k в последнее равенство, получим выражение для погрешности дифференцирования

$$R_n^{(k)}(f) = f^{(k)}(\bar{x}) - L_n^{(k)}(\bar{x}) = \frac{\omega^{(k)}(\bar{x})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (2.7)$$

Пусть $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ и $\bar{x} \in [x_0, x_n]$. Разность $f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x)$ обращается на отрезке $[x_0, x_n]$ в нуль в точках $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-k}$. Будем считать, что $\bar{x} \neq \varepsilon_i$, и рассмотрим функцию

$$\Psi(x) = f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) - c(x-\varepsilon_0)(x-\varepsilon_1)\ldots(x-\varepsilon_{n-k}) =$$
$$= f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) - c\tilde{\omega}(x).$$

Если $\bar{x} \neq \varepsilon_i$, то константу c можно подобрать так, чтобы $\Psi(\bar{x}) = 0$. Используя последнее условие, получим $c = \dfrac{f^{(k)}(\bar{x}) - L_n^{(k)}(\bar{x})}{\tilde{\omega}(x)}$. При указанном выборе c функция $\Psi^{(1)}(x)$ будет иметь $n-k+1$ нулей и $\Psi^{(n-k+1)}(x)$, по крайней мере, обращается в нуль в одной точке ξ. То есть $\Psi^{(n-k+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - c(n-k+1)! = 0$. Подставляя выражение для c в последнее равенство, получим

$$R_n^{(k)}(f) = f^{(k)}(x) - L_n^{(k)}(x) = \frac{\tilde{\omega}(x)}{(n-k+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (2.8)$$

Заметим, что при использовании формул численного дифференцирования может произойти существенная потеря точности. Поясним это на простом примере.

Пусть $f'(x)$ вычисляется по формуле $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \dfrac{h}{2} f''(\xi)$. Если $\max\limits_{[x_0, x_n]} |f''(x)| < M_2$, то

ГГУ имени Ф. Скорины

погрешность формулы будет $|r_1| \le M_2 \frac{h}{2}$. Допустим, что значения функции $f(x_0)$ и $f(x_1)$ вычисляются с погрешностью $|\varepsilon_i| \le E$. В этом случае появится дополнительная погрешность $r_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{h}$ и $|r_2| \le \frac{2E}{h}$.

Величина общей погрешности удовлетворяет неравенству

$$|r| \le |r_1| + |r_2| \le g(h) = \frac{M_2 h}{2} + \frac{2E}{h}.$$

Определим минимум $g(h)$: $g'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{2E}{h^2}$. Отсюда определим $h_0 = 2\sqrt{\frac{E}{M_2}}$ и $g(h_0) = 2\sqrt{EM_2}$. Если $E \ge const\ 2^{-t}$, где t разрядность сетки ЭВМ, то из оценки следует, что $f'(x)$ в лучшем случае вычисляется с половиной верных разрядов.

Тема 3 ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ СПЛАЙНАМИ

Лекция 1 Кубические сплайны

1 Определение интерполяционного сплайна.
2 Построение кубического сплайна.

1 Определение интерполяционного сплайна

Аналитические приближения требуют довольно много хороших свойств функции, в частности существование производных высокого порядка, что не всегда имеет место на практике. К тому же, как было раньше замечено, далекие от точки интерполирования узлы мало влияют на значение функции в этой точке. Поэтому естественно поступить следующим образом: разбить весь отрезок интерполирования $[a,b]$ на участки $[x_i, x_{i+1}]$ и на каждом из этих участков вычислять свою интерполяционную функцию, определенным образом «сшивая» их в узлах. В том случае, когда эти функции являются многочленами, **интерполирование** называется **кусочно-полиномиальным**.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n];\ x_0=a, x_n=b.$$

Обозначим это разбиение через Δ. Назовем **сплайном** $S_m^{\Delta}(f,x)$ **порядка *m*** функцию, являющуюся многочленом степени m на каждом из отрезков $[x_{i-1},x_i]$

$$S_m^{\Delta}(f,x)=P_{im}(x)=a_{i0}+a_{i1}x+...+a_{im}x^m \quad \text{при} \quad x\in[x_{i-1},x_i]$$

и удовлетворяющую условиям непрерывности производных до порядка $m-1$ во внутренних точках $x_1,x_2,...,x_{n-1}$

$$P_{im}^k(x_i)=P_{i+1,m}^k(x_i),\quad k=0,1,...,m-1;\ i=1,2,...,n-1,$$

и условиям совпадения значений сплайна и функции во всех узлах $x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n$

$$P_{im}(x_i)=y_i,\ i=0,1,...,n.$$

В этой задаче необходимо определить $m+1$ коэффициент для каждого из n уравнений, то есть, всего $n(m+1)$ коэффициентов a_{ij}, $i=1,2,...,n;\ j=0,1,...,m$. Условия непрерывности дают $(n-1)m$ уравнений, условия совпадения – $n+1$ уравнение: всего имеем $n(m+1)-m+1$ уравнений. Остальные $m-1$ уравнений выбираются исходя из некоторых дополнительных условий.

И так, **сплайном** называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на заданном отрезке $[a,b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_{i-1},x_i]$ является некоторым алгебраическим многочленом. Максимальная по всем отрезкам степень многочленов называется **степенью сплайна**, а разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной производной на $[a,b]$ называется **дефектом**. Сплайн, который принимает в узлах те же значения, что и функция $f(x)$ называется **интерполяционным**. На практике широко используются сплайны третьей степени – $S_3(x)$. Такие сплайны называются **кубическими**.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2 Построение кубического сплайна

Для кубического сплайна число коэффициентов равно $4n$, а общее число условий – $4n-2$. Два недостающих условия выберем позже.

Рассмотрим промежуток $[x_i, x_{i+1}]$ и пусть $h_i = x_{i+1} - x_i$, $w = \dfrac{x - x_i}{h_i}$, $\overline{w} = 1 - w$. Когда x пробегает этот интервал, то w изменяется от 0 до 1, а $\overline{w}$ от 1 до 0. Будем искать представление сплайна на этом интервале в виде

$$P_i(x) = wy_{i+1} + \overline{w}y_i + h_i^2\left((w^3 - w)\sigma_{i+1} + (\overline{w}^3 - \overline{w})\sigma_i\right), \qquad (3.1)$$

где σ_i и σ_{i+1} – некоторые константы, которые еще предстоит определить. Первые два члена этого выражения соответствуют обычной линейной интерполяции, а взятый в скобки член является кубической поправкой, которая обеспечивает дополнительную гладкость. Заметим, что поправочный член обращается в нуль на концах интервала, так что

$$P_i(x_i) = y_i, \; P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}.$$

Отсюда видно, что условия совпадения уже выполнены. Из этого равенства путем замены i на $i+1$ получаем $P_{i+1}(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Отсюда и из второго равенства получаем непрерывность в узлах сплайна. Таким образом, условия совпадения и непрерывность сплайна заложены в самом выборе формулы.

Дифференцируем равенство (3.1) трижды как сложную функцию от x, учитывая, что $w' = \dfrac{1}{h_i}$ и $\overline{w}' = \dfrac{1}{-h_i}$, получим следующие выражения для производных

$$P_i'(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + h_i\left((3w^2 - 1)\sigma_{i+1} - (3\overline{w}^2 - 1)\sigma_i\right), \qquad (3.2)$$

$$P_i''(x) = 6\left(w\sigma_{i+1} + \overline{w}\sigma_i\right), \quad P_i'''(x) = \frac{6(\sigma_{i+1} - \sigma_i)}{h_i}. \qquad (3.3)$$

Из первого равенства в (3.3) имеем $P_i''(x_i) = 6\sigma_i$ и $P_i''(x_{i+1}) = 6\sigma_{i+1}$. Отсюда получаем непрерывность второй производной в узлах. Равен-

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ство $\sigma_i = \dfrac{P_i''(x_i)}{6}$ поясняет смысл коэффициента σ_i, но не позволяет вычислить его значение, так как $P_i''(x_i)$ не задано.

Введем обозначение: $d_i = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$. Тогда имеют место следующие равенства для односторонних производных

$$P_i'(x_i+) = d_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i), \quad P_i'(x_{i+1}-) = d_i + h_i(2\sigma_{i+1} + \sigma_i). \quad (3.4)$$

Приходится временно писать односторонние производные, так как функция $P_i(x)$ определена только на $[x_i, x_{i+1}]$. Заменяя во втором равенстве в (3.4) i на $i-1$ получаем

$$P_{i-1}'(x_i-) = d_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}).$$

По условию $P_i'(x_i+) = P_{i-1}'(x_i-)$ или

$$d_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) = d_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}),$$

и

$$h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} = d_i - d_{i-1}, \; i = 1,2,\ldots,n-1. \quad (3.5)$$

Это система из $n-1$ линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов σ_i, $i = 0,1,2,\ldots,n$. Нужно указать еще два условия, чтобы однозначно определить сплайн. Среди многих различных способов выбора этих условий возьмем следующий.

Пусть $c_0(x)$ и $c_n(x)$ единственные кубические кривые, которые проходят соответственно через четыре первые и четыре последние из заданных точек. В качестве условий возьмем следующие совпадения третьих производных

$$P_0'''(x_0) = c_0''' \quad \text{и} \quad P_{n-1}'''(x_0) = c_n'''.$$

Так как кубический многочлен интерполируется точно на четырех точках, то $c_0(x)$ и $c_n(x)$ являются интерполяционными многочленами. Из представления их в форме Ньютона легко получить

$$c_0'''(x) = 6c_0(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad \text{и} \quad c_n'''(x) = 6c_n(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n).$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Обозначим для краткости записи $d_0^3 = 6c_0(x_0, x_1, x_2, x_3)$ и $d_{n-3}^3 = 6c_n(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$.

Итак, потребуем, чтобы $\dfrac{\sigma_1 - \sigma_0}{h_0} = d_0^3$ и $\dfrac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{h_{n-1}} = d_{n-3}^3$. Для симметрии, умножим последние равенства соответственно на h_0^2 и $-h_{n-1}^2$, что дает

$$-h_0\sigma_0 + h_0\sigma_1 = h_0^2 d_0^3, \qquad h_{n-1}\sigma_{n-1} - h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2 d_{n-1}^3.$$

Для сплайна с этими граничными условиями коэффициенты σ_i удовлетворяют следующей системе из $n+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестным

$$\begin{pmatrix} -h_0 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n=2}+h_{n-1}) & h_{n=2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n=2} & -h_{n=2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0^2 d_0^3 \\ d_1 - d_0 \\ \dots \\ d_{n-1} - d_{n-2} \\ -h_{n-1}^2 d_{n-3}^3 \end{pmatrix}.$$

Решая ее методом Гаусса, приведем исходную матрицу к верхней треугольной форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1} & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \dots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

где диагональные элементы α_i вычисляются по формулам

$$\alpha_0 = -h_0; \quad \alpha_i = 2(h_{i-1} + h_i) - \frac{h_{i-1}^2}{\alpha_{i-1}}, \ i = 1,2,\dots,n-1;$$

$$\alpha_n = -h_{n-1} - \frac{h_{n-1}^2}{\alpha_{n-1}}, \tag{3.6}$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

а правые части β_i определяются из соотношений

$$\beta_0 = h_0^2 d_0^3; \quad \beta_i = (d_i - d_{i-1}) - \frac{h_{i-1}\beta_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, \ i = 1,2,\ldots,n-1;$$

$$\beta_n = -h_{n-1}^2 d_{n-3}^3 - \frac{h_{n-1}\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}}. \qquad (3.7)$$

Коэффициенты σ_i определяются при обратном ходе метода Гаусса

$$\sigma_n = \frac{\beta_n}{\alpha_n}, \quad \sigma_i = \frac{\beta_i - h_i\sigma_{i+1}}{\alpha_i}, \ i = n-1, n-2,\ldots,1,0. \qquad (3.8)$$

Лекция 2 Способы задания кубических сплайнов

1 О способах задания сплайнов.
2 Типы граничных условий.
3 О погрешности приближения сплайнами.

1 О способах задания сплайнов

Не вдаваясь в подробности вывода формул, приведем несколько способов задания сплайнов.

1. Положим, что $k_i = S_3'(x_i)$. Тогда определяя наклоны k_i по формулам $k_i = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$, $i = 1,2,\ldots,n-1$, $k_0 = \dfrac{4f_1 - f_2 - 3f_0}{2h}$, $k_n = \dfrac{3f_n + f_{n-2} - 4f_{n-1}}{2h}$, где $h = \dfrac{b-a}{n}$, кубический сплайн можно записать в виде

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1}-x)^2(2(x-x_i)+h)}{h^3} f_i + \frac{(x-x_i)^2(2(x_{i+1}-x)+h)}{h^3} f_{i+1} + \\ + \frac{(x_{i+1}-x)^2(x-x_i)}{h^2} k_i + \frac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})}{h^2} k_{i+1}. \qquad (3.9)$$

2. Если известны значения производной f_i', то полагаем $k_i = f_i'$. Затем сплайн записывается в форме (3.9).

Первый и второй способы являются локальными и гарантируют непрерывность первой производной сплайна $S_3'(x)$ в узлах x_i.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3. Будем строить сплайн $S_3(x)$ так, чтобы выполнялись условия

а) $S_3(x) \in C^2(a,b)$;

в) на каждом из отрезков сплайн является многочленом третьей степени;

с) в узлах выполняются равенства $S_3(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n$.

Будем искать сплайн на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ в виде

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3. \qquad (3.10)$$

Из условия с) следует, что

$$a_i = S_i(x_i), \quad b_i = S_i'(x_i), \quad c_i = S_i''(x_i), \quad d_i = S_i'''(x_i).$$

Условия с) обеспечивают равенства $a_0 = f_0$, $a_i = f_i$. Из условия непрерывности а) функции получим $S_i(x_i) = S_{i+1}(x_i)$, что приводит к уравнению

$$f_i - f_{i-1} = h_i b_i - \frac{h_i^2}{2} c_i + \frac{h_i^3}{6} d_i, \; i = 1,2,\ldots,n. \qquad (3.11)$$

Из условия непрерывности первой производной $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$ имеем

$$c_i h_i - \frac{d_i}{2} h_i^2 = b_i - b_{i-1}, \; i = 2,3,\ldots,n. \qquad (3.12)$$

Из условия непрерывности второй производной $S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$ вытекает

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1}, \; i = 2,3,\ldots,n. \qquad (3.13)$$

Следовательно, имеем систему (3.11) – (3.13) из $3n-2$ уравнений относительно $3n$ неизвестных. Дополняя эту систему условиями на границе, получим систему из $3n$ уравнений.

2 Типы граничных условий

Рассмотрим различные типы граничных условий.

1. Пусть заданы значения f_0'' и f_n''. Из уравнений (3.11) – (3.13) получается система

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\begin{cases} c_0 = f_0'' \\ h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), \ i = 1,2,\ldots,n \\ c_n = f_n'' \end{cases} \quad (3.14)$$

Эта система имеет диагональное преобладание и может быть эффективна решена методом трехточечной прогонки. Затем определяются остальные неизвестные

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}.$$

2. Если на границе заданы значения первых производных b_0 и b_n, то систему (3.11) – (3.13) можно привести к виду

$$\begin{gathered} \frac{2}{h_i}b_{i-1} + 4\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}\right)b_i + \frac{2}{h_i}b_{i+1} = 6\left(\frac{h_i}{h_{i+1}}(f_{i+1} - f_i) + \frac{h_{i+1}}{h_i}(f_i - f_{i-1})\right), \\ i = 1,2,\ldots,n-1; \\ b_0 = f_0', \quad b_n = f_n'. \end{gathered} \quad (3.15)$$

Эта система также эффективно может быть решена методом прогонки. Если эти граничные условия использовать при решении системы (3.14), то ее нужно дополнить уравнениями

$$\begin{gathered} \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{2}{h_1}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0'\right), \\ \frac{1}{3}c_{n-1} + \frac{2}{3}c_n = \frac{2}{h_n}\left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\right). \end{gathered} \quad (3.16)$$

3. Если на границе заданы значения только функции f_0 и f_n, то можно решить систему (3.15) с дополнительными условиями

$$\begin{gathered} b_0 = \frac{1}{6h}(-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3), \\ b_n = \frac{1}{6h}(11f_n - 18f_{n-1} + 9f_{n-2} - 2f_{n-3}). \end{gathered} \quad (3.17)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

4. Пусть $f(x)$ периодическая функция с периодом $b-a$, тогда следует считать, что $f_0 = f_n,\ S_3'(a) = S_3'(b),\ S_3''(a) = S_3''(b)$. Если использовать систему (3.15), то ее нужно дополнить условиями

$$b_0 = b_n,$$
$$\frac{f_1 - f_0}{h_1^2} - \frac{f_{n-1} - f_0}{h_n^2} = \frac{1}{3h_1}(2b_0 + b_1) + \frac{1}{3h_n}(2b_0 + b_{n-1}) . \qquad (3.18)$$

Для равномерной сетки из (3.18) получим уравнение

$$\frac{3(f_1 - f_{n-1})}{h} = b_1 + 4b_0 + b_{n-1} .$$

Если использовать систему (3.14), то ее можно дополнить краевыми условиями

$$c_0 = c_n,$$
$$c_1 h_1 + 2(h_n + h_1)c_n + c_{n-1}h_n = 6\left(\frac{f_1 - f_n}{h_1} - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\right). \qquad (3.19)$$

Для равномерной сетки из (3.19) получим уравнение

$$c_1 + 4c_n + c_{n-1} = \frac{6}{h^2}(f_1 - 2f_n + f_{n+1}) .$$

После решения системы (3.14) или (3.15) кубический сплайн можно сразу записать в явном виде (3.9) или в виде

$$S_3(x) = c_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + c_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + (f_{i-1} - \frac{c_{i-1}h_i^2}{6})\frac{x_i - x}{h_i} +$$
$$+ (f_i - \frac{c_i h_i^2}{6})\frac{x - x_{i-1}}{h_i} . \qquad (3.20)$$

3 О погрешности приближения сплайнами

Следующая теорема дает ответ о погрешности приближения сплайнами.

Теорема 4. Если $f(x) \in C_{k+1}[a,b],\ 0 \le k \le 3$, то интерполяционный сплайн $S_3(x)$, построенный способами 2 или 3, удовлетворяет неравенству

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\max_{[x_i, x_{i+1}]} | f^{(m)}(x) - S_3(x) | \le ch^{k+1-m} \max_{[a,b]} | f^{(k+1)}(x) |,$$

где $i = 0,1,\ldots,n-1$, $m = 0,1,\ldots,k$, c – не зависящая от h, i, f постоянная. Если $f(x) \in C_4[a,b]$, то можно получить $c = 1$. Если сплайн $S_3(x)$ построен по способу 1, то данная теорема справедлива при $0 \le k \le 2$.

Тема 4 СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Лекция 1 Точечная квадратичная аппроксимация функций

1 Постановка задачи.
2 Теорема об элементе наилучшего среднеквадратичного приближения.
3 Точечная квадратичная аппроксимация.

1 Постановка задачи

Пусть R пространство функций $f(x)$ интегрируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$. **Скалярным произведением** функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ называется выражение $(f,\varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx$. **Нормой элемента** f называется число $\|f\|^2 = \int_a^b f^2(x)dx$. Если $(f,\varphi) = 0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ **ортогональны**. Пространство с такими свойствами обозначается $L_2[a,b]$.

При аппроксимации функции $f(x)$ из некоторого класса R функциями $\varphi(x)$ из некоторого более узкого класса H в качестве критерия точности приближения часто принимается величина среднеквадратичного отклонения $S^2 = \int_a^b R(x)\big(f(x) - \varphi(x)\big)^2 dx$ или $S^2 = \sum_{i=0}^{n} R(x_i)\big(f(x_i) - \varphi(x_i)\big)^2$, где $R(x)$ – неотрицательная весовая функция. Указанный критерий близости $f(x)$ и $\varphi(x)$ естественен, когда требуется лишь «интегральная» близость функций. Кроме того,

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

практика показывает, что приближающие функции, построенные по методу среднеквадратичного приближения, гораздо лучше описывают реальную функцию $f(x)$, чем интерполяционные многочлены.

Пусть подпространство H состоит из линейных комбинаций $n+1$ линейно независимой функции $\varphi_0, \varphi_2, ..., \varphi_n$

$$\varphi = c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + ... + c_n\varphi_n .$$

Это подпространство называется **подпространством обобщенных многочленов** по системе функций $\{\varphi(x_i)\}$.

2 Теорема об элементе наилучшего среднеквадратичного приближения

Теорема 5. Для того чтобы элемент $\overline{\varphi}(x) \in H$ был элементом наилучшего среднеквадратичного приближения, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $(f - \overline{\varphi}, \varphi) = 0$ для любого элемента $\varphi \in H$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует такой элемент φ_1, что $(f - \overline{\varphi}, \varphi_1) = a \neq 0$. Без нарушения общности можно считать, что $\|\varphi_1\| = 1$. Возьмем элемент $\varphi_2 = \overline{\varphi} + a\varphi_1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\|f - \varphi_2\|^2 &= (f - \varphi_2, f - \varphi_2) = (f - \overline{\varphi} - a\varphi_1, f - \overline{\varphi} - a\varphi_1) = \\
&= (f - \overline{\varphi}, f - \overline{\varphi}) - a(\varphi_1, f - \overline{\varphi}) - a(f - \overline{\varphi}, \varphi_1) + a^2(\varphi_1, \varphi_1) = \\
&= \|f - \overline{\varphi}\|^2 - 2a^2 + a^2 = \|f - \overline{\varphi}\|^2 - a^2 .
\end{aligned}$$

Отсюда следует $\|f - \varphi_2\|^2 < \|f - \overline{\varphi}\|^2$, что невозможно, так как $\overline{\varphi}$ является элементом наилучшего приближения.

Достаточность. Пусть $\varphi(x) \in H$. Тогда

$$\|f - \varphi\|^2 = (f - \overline{\varphi} + \overline{\varphi} - \varphi, f - \overline{\varphi} + \overline{\varphi} - \varphi) =$$

$$= \|f - \overline{\varphi}\|^2 + (\overline{\varphi} - \varphi, f - \overline{\varphi}) + (f - \overline{\varphi}, \overline{\varphi} - \varphi) + \|\overline{\varphi} - \varphi\|^2 = \|f - \overline{\varphi}\|^2 + \|\overline{\varphi} - \varphi\|^2 .$$

Если $\varphi \neq \overline{\varphi}$, то получим $\|f - \varphi\|^2 > \|f - \overline{\varphi}\|^2$ для произвольного $\varphi \in H$, то есть $\overline{\varphi}$ – элемент наилучшего среднеквадратичного приближения в подпространстве H. Теорема доказана.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3 Точечная квадратичная аппроксимация

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана система точек $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$. При точечном квадратичном аппроксимировании за меру отклонения полинома $P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$ от функции $y = f(x)$ на данном множестве точек берут величину

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left(P_m(x_i) - f(x_i)\right)^2, \tag{4.1}$$

которая называется **квадратичным отклонением**.

Полином $P_m(x)$ следует строить таким образом, чтобы величина этого отклонения была минимальной. Если $m = n$, то в качестве $P_m(x)$ можно взять интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, так как для него величина среднеквадратичного отклонения равна нулю

$$S^2 = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - L_n(x_i))^2 = 0.$$

Если $m < n$, то для минимизации S необходимо решить систему

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \ i = 0,1,...,m.$$

Перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^2 - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^2 - y_i) \cdot x_i^k = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + ... + a_m x_i^2 - y_i) \cdot x_i^m = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Обозначим

$$s_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k, \ k = 0,1,...,2m; \qquad t_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i, \ k = 0,1,...,m.$$

Тогда систему (4.2) можно записать в виде

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\begin{cases} a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \ldots + a_m s_m = t_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 s_k + a_1 s_{k+1} + a_2 s_{k+2} + \ldots + a_m s_{k+m} = t_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 s_m + a_1 s_{m+1} + a_2 s_{m+2} + \ldots + a_m s_{2m} = t_m \ . \end{cases} \qquad (4.3)$$

Если среди точек x_i нет совпадающих, то определитель системы (4.3) отличен от нуля. Полином с коэффициентами a_i, определенными из (4.3), будет обладать минимальным отклонением. Вычислим, например, определитель системы (4.3), когда $m = 1$. Тогда $\det = s_0 s_2 - s_1^2$. Учитывая неравенство Коши-Буняковского $\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)(n+1)$, для попарно различных узлов x_i, получим $\det = (n+1)\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 > 0$. Отметим, что матрица системы (4.3) положительно определена, и для ее решения можно использовать метод Зейделя или метод простой итерации.

Лекция 2 Метод ортогональных полиномов

1 Метод ортогональных полиномов.
2 Интегральная квадратичная аппроксимация функций.
3 Примеры ортогональных систем.

1 Метод ортогональных полиномов

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются **ортогональными** на множестве $X = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$, если $\sum_X \varphi(x_i)\psi(x_i) = 0$. Система функций $\{\varphi(x_i)\}$ ортогональна на множестве X, если все функции этой системы попарно ортогональны.

Рассмотрим систему ортогональных полиномов $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_m(x)$ на множестве X, таких, что $\sum_{i=0}^{n} P_j(x_i) \cdot P_k(x_i) = 0$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

для всех $j \neq k$, и пусть $s_j = \sum_{i=0}^{n} P_j^2(x_i) > 0$. Так как полиномы $P_j(x)$ линейно независимы, то произвольный многочлен $Q_m(x)$ можно представить в виде

$$Q_m(x) = b_0 P_0(x) + b_1 P_1(x) + \ldots + b_m P_m(x). \qquad (4.4)$$

Коэффициенты b_i в разложении (4.4) определяются следующим образом. Умножим (4.4) на $P_k(x)$, $k \leq m$ и просуммируем полученное выражение по множеству X, получим

$$\sum_{i=0}^{n} Q_m(x_i) \cdot P_k(x_i) = \sum_{r}^{m} b_r \sum_{i=0}^{n} P_r(x_i) \cdot P_k(x_i) = b_k \sum_{i=0}^{n} P_k^2(x_i).$$

Откуда $b_k = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} Q_m(x_i) \cdot P_k(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} P_k^2(x_i)}$.

Вернемся к задаче, поставленной в лекции 1 (тема 4). Полином $Q_m(x)$ доставляющий минимум квадратичному отклонению S на множестве X, будем искать в виде (4.4). Тогда

$$S = \sum_{i=0}^{n} (b_0 P_0(x_i) + b_1 P_1(x_i) + \ldots + b_m P_m(x_i) - y_i)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \{ \sum_{j=0}^{m} b_j^2 P_j^2(x_i) + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=k+1}^{m} b_j b_k P_j(x_i) P_k(x_i) - 2 \sum_{j=0}^{m} b_j P_j(x_i) y_j + y_i^2 \} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} (b_j^2 s_j - 2 b_j c_j) + \sum_{i=0}^{n} y_i^2,$$

где $s_j = \sum_{i=0}^{n} P_j^2(x_i)$, $c_j = \sum_{i=0}^{n} P_j(x_i) y_i$.

Выделим в последнем выражении полный квадрат

$$S = \sum_{j=0}^{m} s_j (b_j - \frac{c_i}{s_j})^2 - \sum_{j=0}^{m} \frac{c_j^2}{s_j} + \sum_{i=0}^{n} y_i^2.$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Ясно, что минимальное значение S принимает тогда, когда

$$\sum_{j=0}^{m} s_j (b_j - \frac{c_i}{s_j})^2 = 0 \text{ или } b_j = \frac{c_j}{s_j} = \frac{\sum_{i=0}^{n} P_j(x_i) y_i}{\sum_{i=0}^{n} P_j^2(x_i)} .$$

Таким образом, искомый полином $Q_m(x)$ имеет вид

$$Q_m(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{c_j}{s_j} P_j(x) . \tag{4.5}$$

Величину квадратичного отклонения полинома $Q_m(x)$ можно вычислить по формуле

$$S = \sum_{j=0}^{n} y_i^2 - \sum_{j=0}^{m} \frac{c_j^2}{s_j} . \tag{4.6}$$

2 Интегральная квадратичная аппроксимация функций

Функцию $f(x) \in L_2$ можно приближать с помощью обобщенного полинома $P(x)$ вида

$$P(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x) , \tag{4.7}$$

так, чтобы величина $J_m(c_0, c_1, \ldots, c_m) = \int_a^b [P(x) - f(x)]^2 dx$ принимала минимальное значение.

Система интегрируемых функций $\{\varphi_i(x)\}$ называется **ортогональной** на отрезке $[a,b]$, если $(\varphi_i, \varphi_k) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx = 0$ для всех $i \neq k$. Величина $\|\varphi_m\| = (\varphi_m, \varphi_m)^{\frac{1}{2}}$ называется **евклидовой нормой** функции $\varphi_m(x)$. Если $\|\varphi_m\| = 1$ для любого m, то система функций $\{\varphi_i(x)\}$ называется **ортонормированной**.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Пусть в (4.7) система $\{\varphi_i(x)\}$ ортогональна. Определим коэффициенты разложения c_i из условия $\frac{\partial J_m}{\partial c_j}$, $j = 0,1,...,m$. Дифференцируя J_m, получим систему

$$\frac{1}{2}\frac{\partial J_m}{\partial c_j} = \sum_{i=0}^{m} c_i(\varphi_i, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0, \quad j = 0,1,...,m. \qquad (4.8)$$

Учитывая ортогональность системы $\{\varphi_i(x)\}$, вычислим коэффициенты c_i

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} = \frac{(f, \varphi_i)}{\|\varphi_i\|^2}.$$

Если система $\{\varphi_i(x)\}$ ортонормированна, то $c_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx$. Коэффициенты c_i называются **коэффициентами Фурье** функции $f(x)$ относительно заданной ортогональной системы $\{\varphi_i(x)\}$ $i = 0,1,...,m$. Покажем, что коэффициенты Фурье доставляют минимум функции J_m. Составим второй дифференциал

$$d^2 J_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{\partial^2 J_m}{\partial c_i^2} dc_i^2 + 2\sum_{j<i} \frac{\partial^2 J_m}{\partial c_j \partial c_i} dc_j dc_i .$$

Так как $\frac{\partial^2 J_m}{\partial c_j \partial c_i} = 2(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, получим

$$d^2 J_m = \sum_{i=0}^{m} \frac{\partial^2 J_m}{\partial c_i^2} dc_i^2 = 2\sum_{i=0}^{m} \|\varphi_i\|^2 dc_i^2 .$$

Если $\sum_{i=0}^{m} dc_i^2 \neq 0$, то $d^2 J_m > 0$ и, следовательно, коэффициенты c_i доставляют минимум J_m.

Таким образом, обобщенный полином $P(x)$ с коэффициентами Фурье имеет наименьшее квадратичное отклонение от функции $f(x)$ по сравнению с другими обобщенными полиномами того же порядка. Вычислим величину этого отклонения.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$J_m = \int_a^b [f(x) - \sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x)]^2 dx = \int_a^b [f^2(x) - 2\sum_{i=0}^{m} c_i \varphi_i(x) f(x) + \sum_{i=0}^{m} c_i^2 \varphi_i^2(x)] dx =$$

$$= \int_a^b [f^2(x) - \sum_{i=0}^{m} c_i^2 \int_a^b \varphi_i^2(x) dx .$$

Отсюда получаем $J_m = \|f\|^2 - \sum_{i=0}^{m} c_i^2 \|\varphi_i(x)\|^2 \geq 0$.

3 Примеры ортогональных систем

1. Тригонометрическая система $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin nx, \cos nx, \ldots$ ортогональна на любом отрезке длиной 2π. Пусть $f(x)$ – непрерывная 2π периодическая функция. Рассмотрим тригонометрический многочлен

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) . \qquad (4.9)$$

Чтобы квадратичное отклонение $P(x)$ от $f(x)$ было минимальным, коэффициенты a_0, a_k, b_k должны быть коэффициентами Фурье относительно тригонометрической системы

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx .$$

Если функция $f(x)$ имеет сложный вид, то для приближенного вычисления коэффициентов Фурье можно использовать формулу трапеций.

Для приближения на интервале $(-l, l)$ периодической функции с периодом $2l$ удобно использовать ортогональную систему функций $\left\{\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi kx}{l}, \sin\frac{\pi kx}{l}\right\}$. Обобщенным многочленом наилучшего приближения будет тригонометрический ряд Фурье

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos\frac{\pi kx}{l} + b_k \sin\frac{\pi kx}{l}) , \qquad (4.10)$$

где $a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\frac{\pi kx}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{\pi kx}{l} dx$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Если же функция $f(x)$ задана на интервале $(0,l)$, то коэффициенты в (4.10) имеют вид

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx, \quad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx.$$

2. Ортогональными на отрезке [-1,1] являются полиномы Лежандра $L_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$. Можно показать, что $\|L_n(x)\|^2 = \frac{2}{2n+1}$. Полиномы Лежандра удобно вычислять по рекуррентной формуле $(n+1)L_{n+1}(x) - x(2n+1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$.

Многочленом наилучшего среднеквадратичного приближения на отрезке [-1,1] будет $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x)$,

здесь

$$c_k = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)L_k(x)dx. \qquad (4.11)$$

3. Систему многочленов, ортогональных на множестве точек $\{0,1,2,3,...,n\}$ образуют многочлены $P_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^n C_m^k C_{m+k}^k}{n^{(k)}}x^{(k)}$,

где $x^{(k)} = x(x-1)\cdot...\cdot(x-k+1)$, $n^{(k)} = n(n-1)\cdot...\cdot(n-k+1)$. Многочлены $P_{m,n}(x)$ определяются рекуррентным соотношением

$$(x-\frac{n}{2})P_{m,n}(x) + \frac{(m+1)(n-m)}{2(2m+1)}P_{m+1,n}(x) + \frac{m(n+m+1)}{2(2m+1)}P_{m-1,n}(x) = 0,\ m \ge 1.$$

Так как путем линейной замены $q = \frac{x-x_0}{h}$, где $h = x_{i+1} - x_i$ всякая произвольная система равноотстоящих точек $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$ приводится к системе $0,1,2,3,\ldots,n$, то многочлены $P_{m,n}(x)$ можно использовать для среднеквадратичной аппроксимации функции на произвольной системе равноотстоящих точек.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лекция 3 Метод наименьших квадратов

1 Метод наименьших квадратов.
2 Обработка результатов наблюдений.
3 Пример применения метода наименьших квадратов.

1 Метод наименьших квадратов

Пусть даны узлы $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ не обязательно различные и известны значения функции $f(x)$ в этих узлах $y_0, y_1, ..., y_{n-1}, y_n$. Заметим, что при $x_i = x_j$ равенство $y_i = y_j$ необязательно. Это может быть в том случае, когда y_i являются экспериментальными данными, то есть получаются в результате многократных измерений одной и той же величины в одной точке. Необходимо подобрать такую функцию $\varphi(x)$ степени $m \le n$ для которой величина

$$S^2 = \inf_{\varphi \in H[a,b]} \|f - \varphi\| = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \varphi(x_i))^2$$

имела бы наименьшее значение. Таким образом, имеем частный случай среднеквадратичного приближения, который называется **методом наименьших квадратов.**

Пусть функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_m(x)$ образуют линейно независимую систему. Тогда, если многочлен

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + ... + c_m\varphi_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j \varphi_j(x) \qquad (4.12)$$

является многочленом наилучшего приближения для $f(x) \in H$, то, согласно теореме 5, должно быть

$$\sum_{j=0}^{m} c_j (\varphi_j(x), \varphi_k(x)) = \sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = (f, \varphi_k), \quad k = 0,1,...,m. \quad (4.13)$$

Необходимо определить коэффициенты c_j. Введем обозначения

$$s_{jk} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i), \quad r_k = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_k(x_i), \quad j,k = 0,1,...,m. \quad (4.14)$$

Тогда система (4.13) примет вид

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\begin{cases} c_0 s_{00} + c_1 s_{10} + \ldots + c_m s_{m0} = r_0 \\ c_0 s_{01} + c_1 s_{11} + \ldots + c_m s_{m1} = r_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 s_{0m} + c_1 s_{1m} + \ldots + c_m s_{mm} = r_m \ . \end{cases} \tag{4.15}$$

Определитель этой системы как определитель Грамма системы линейно независимых элементов $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ положителен, а значит, коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_m$ находятся единственным образом.

Рассмотрим приближения по методу наименьших квадратов алгебраическими многочленами. В качестве линейно независимой системы $\{\varphi_k(x)\}$ возьмем функции: $1, x, x^2, \ldots, x^m$. Тогда

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m \tag{4.16}$$

и коэффициенты из (4.14) вычисляются следующим образом

$$\begin{gathered} s_{00} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1; \ \ s_{10} = \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} x_i \ ; \\ r_0 = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ . \end{gathered} \tag{4.17}$$

Остальные коэффициенты вычисляются аналогично. Теперь система (4.15) для определения коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_m$ будет иметь вид

$$\begin{cases} c_0(n+1) + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + \ldots + c_m \sum_{i=0}^{n} x_i^m = \sum_{i=0}^{n} y_i \\ c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + \sum_{i=0}^{n} x_i^3 \ldots + c_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^m + c_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + \sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2} + \ldots + c_m \sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^m \ . \end{cases} \tag{4.18}$$

2 Обработка результатов наблюдений

Пусть в результате наблюдений получена таблица значений функции $f(x)$ для значений аргумента $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Будем предполагать, что значения аргумента найдены точно, а значения функции $f(x_i)$ содержат случайные ошибки. С целью уменьшения случайных

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ошибок и получения более плавного течения функции $f(x)$ применяют процесс **сглаживания**, состоящий в том, что наблюдаемые значения $f(x_i)$ заменяют значениями $\bar{f}(x_i)$, полученными в процессе вычислений, зависящих от выбранного способа сглаживания.

Рассмотрим способ сглаживания, основанный на методе наименьших квадратов, предполагая, что значения $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$ равноотстоящие. Для того чтобы найти сглаженное значение $\bar{f}(x_i)$, выбирают $k+1$ значений аргумента из заданных $n+1$ значений, так чтобы x_i по возможности находилось посередине. По наблюдаемым значениям функции в этих точках методом наименьших квадратов строят многочлен степени $m \le k$, приближающий функцию $f(x)$, и за значение $\bar{f}(x_i)$ принимают значение этого многочлена в точке x_i.

Для практического использования можно заранее найти выражение $\bar{f}(x_i)$ через наблюдаемые значения $f(x_i)$ при заданных m и k. Часто выбирают k четным, а m – нечетным. В этом случае точка x_i будет являться средней из точек, по которым строится приближающий многочлен. Приведем несколько таких выражений, где вместо $f(x_i)$ будем писать f_i

$m = 1; \quad k = 2; \qquad \bar{f}(x_i) = \frac{1}{3}(f_{i-1} + f_i + f_{i+1})$

$k = 4; \qquad \bar{f}(x_i) = \frac{1}{5}(f_{i-2} + f_{i-1} + f_i + f_{i+1} + f_{i+2})$

$k = 6;$

$\bar{f}(x_i) = \frac{1}{7}(f_{i-3} + f_{i-2} + f_{i-1} + f_i + f_{i+1} + f_{i+2} + f_{i+3})$

$m = 3 \quad k = 4;$

$\bar{f}(x_i) = \frac{1}{35}(-3f_{i-2} + 12f_{i-1} + 17f_i + 12f_{i+1} - 3f_{i+2})$

$k = 6;$

$\bar{f}(x_i) = \frac{1}{21}(-2f_{i-3} + 3f_{i-2} + 6f_{i-1} + 7f_i + 6f_{i+1} + 3f_{i+2} - 2f_{i+3})$

$k = 8;$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\bar{f}(x_i) = \frac{1}{231}(-21 f_{i-4} + 14 f_{i-3} + 3 f_{i-2} + 54 f_{i-1} + 59 f_i + 54 f_{i+1} +$$
$$+ 39 f_{i+2} + 14 f_{i+3} - 21 f_{i+4}) .$$

3 Пример применения метода наименьших квадратов

Пример. Для функции $\sin \pi x$ на отрезке $[-1,1]$ найти среди многочленов степени не выше 3 многочлен, дающий наилучшее приближение по методу наименьших квадратов, если используются значения функции в точках x_i: -1; -0.5; 0; 0.5; 1.

Решение. В нашем случае $m = 3$ и $n = 4$. Многочлен ищем в виде (4.16) $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_m x^m$. Для нахождения коэффициентов $c_0, c_1, c_2, ..., c_m$ составляем систему (4.18), в которой коэффициенты рассчитываются по формулам (4.17)

$$s_{00} = 5; \quad s_{01} = s_{10} = 0; \quad s_{02} = s_{11} = s_{20} = 2{,}5$$
$$s_{03} = s_{12} = s_{21} = s_{30} = 0; \quad s_{13} = s_{22} = s_{31} = 2{,}125$$
$$s_{23} = s_{32} = 0; \quad s_{33} = 2{,}03125;$$
$$r_0 = 0; \quad r_1 = 1; \quad r_2 = 0; \quad r_3 = 0{,}25 .$$

Таким образом, система (4.18) принимает вид

$$\begin{cases} 5c_0 + 2.5c_2 = 0 \\ 2.5c_1 + 2.125c_3 = 1 \\ 2.5c_0 + 2.125c_2 = 0 \\ 2.125c_1 + 2.03125c_3 = 0.25 . \end{cases}$$

Решением ее являются $c_0 = c_2 = 0, \quad c_1 = \frac{8}{3}, \quad c_3 = -\frac{8}{3}$. И искомый многочлен принимает следующий вид

$$\varphi(x) = \frac{8}{3}(x - x^3) .$$

Замечание. Метод наименьших квадратов имеет два существенных недостатка:

1. Для отыскания коэффициентов многочлена приходиться решать систему из $m+1$ уравнений, что при больших m достаточно затруднительно.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2. Если выбрали m и построили многочлен наилучшего приближения, и, оказалось, что точность приближения недостаточна то, увеличив m, придется заново повторять все вычисления.

Тема 5 ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

Лекция 1 Интерполяционные квадратурные правила

1 О форме, придаваемой интегралу при вычислениях.
2 Квадратурная сумма и связанные с ней задачи.
3 Общая квадратурная формула.
4 Теорема о точности квадратурной формулы.

1 О форме, придаваемой интегралу при вычислениях

Пусть $[a,b]$ – любой отрезок числовой оси, и рассматривается интеграл $\int_a^b F(x)dx$. Ставится задача: найти его приближённое значение по n значениям $F(x_i)$ функции F в точках x_i $(i=1,2,...,n)$. Формулы для вычисления интегралов называют **квадратурными**.

Многие правила приближённых квадратур основаны на замене интегрируемой функции F на всём отрезке $[a,b]$ или на его частях на более простую функцию φ, близкую к F, легко интегрируемую точно и принимающую в узлах x_i те же значения $F(x_i)$, что и F. В качестве такой функции берут алгебраический или тригонометрический многочлен, либо дробно-рациональную функцию.

Когда отрезок интегрирования конечный и интегрируемая функция F имеет высокую гладкость, то можно рассчитывать хорошо приблизить её многочленом невысокой степени. Если же сама функция F или её производные невысоких порядков имеют особенности или даже обращаются в ∞, то это затруднит приближение F или сделает его вообще невозможным. В этом случае мы должны будем заранее освободиться от таких особенностей путём их выделения. Делается это при помощи разложения F на два сомножителя $F(x)=p(x)f(x)$, где $p(x)$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

имеет такие же особенности, как и $F(x)$, а $f(x)$ – есть достаточно гладкая функция, и интеграл рассматривается в форме $\int_a^b p(x)f(x)dx$.

Такое же представление применяется и при вычислении несобственных интегралов вида $\int_a^\infty F(x)dx$. Причём, F целесообразно разложить на множители $F(x) = p(x)f(x)$, из которых первый $p(x)$ характеризует закон убывания F при $x \to \infty$, а $f(x)$ – является гладкой функцией, допускающей хорошее приближение алгебраическими многочленами или рациональными функциями.

Функция $p(x)$ называется **весовой функцией** или **весом**. При построении определённого квадратурного правила она считается фиксированной.

2 Квадратурная сумма и связанные с ней задачи

Будем строить приближённые формулы вычислений вида

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),\ x_k \in [a,b]. \qquad (5.1)$$

Числа A_k называются **квадратурными коэффициентами**, x_k – **квадратурными узлами**, а правая часть формулы – **квадратурной суммой**.

Формула (5.1) содержит $2n+1$ параметров: $n,\ A_k,\ x_k$ $(k = 1,2,...,n)$. Их следует выбирать так, чтобы (5.1) давала, возможно, лучший результат при интегрировании избранного класса функций f. Роль n – очевидна: чем больше n, тем больше слагаемых в квадратурной сумме, и тем большей точности можно достичь путём выбора A_k и x_k. Поэтому при построении формулы число n считают фиксированным и рассматривают задачу о выборе A_k и x_k. В различных квадратурных методах одно из множеств: либо множество коэффициентов A_k, либо множество узлов x_k также может быть зафиксированным. Правом выбора их обычно пользуются для следующих целей.

1. Увеличение степени точности

Говорят, что квадратурная формула (5.1) имеет степень точности m, если она является точной для функций $g_i(x)$ $(i = 1,2,...,m)$, т.е.

$$\int_a^b p(x)g_i(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k g_i(x_k)$$

и не является точной для $g_{m+1}(x)$.

Можно стремиться к тому, чтобы при помощи выбора параметров A_k и x_k сделать степень точности формулы (5.1) наивысшей возможной. Такие формулы впервые были рассмотрены Гауссом и их часто называют формулами **наивысшей степени точности**.

2. Минимизация погрешности

Остаточный член формулы (5.1) имеет вид

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \qquad (5.2)$$

За величину, характеризующую точность формулы на множестве F функций f может быть принята

$$\sup_f |R_n(f)| = M(A_1,...,A_1; x_1,...,x_n).$$

Путём выбора узлов x_k и коэффициентов A_k можно добиться, чтобы величина M имела бы наименьшее значение.

3. Упрощение вычислений

Можно при помощи выбора параметров A_k и x_k стремиться сделать, возможно, более простыми вычисления по формуле (5.1), например, взять равноотстоящими узлы, или взять равные коэффициенты.

3 Общая квадратурная формула

Предположим, что узлы x_k $(k = 1,2,...,n)$ выбраны, и мы можем при построении квадратурной формулы (5.1) выбирать лишь коэффициенты A_k. Выполним интерполирование $f(x)$ по её значениям в узлах x_k при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа степени $n-1$

$$f(x) = L_n(x) + r(x),$$

где $L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \quad \omega(x) = (x-x_1)...(x-x_n)$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Тогда

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \int_a^b p(x)L_n(x)dx + \int_a^b p(x)r(x)dx. \qquad (5.3)$$

Будем считать, что

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \int_a^b p(x)L_n(x)dx = \int_a^b p(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}f(x_k)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\int_a^b \frac{p(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k).$$

Таким образом, интерполяционная квадратурная формула принимает вид

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \quad A_k = \int_a^b p(x)\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx. \qquad (5.4)$$

Ее погрешность (5.2) определяется следующим образом

$$R_n(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b p(x)r(x)dx. \qquad (5.5)$$

4 Теорема о точности квадратурной формулы

Интерполяционная формула (5.4) характеризуется следующей теоремой о степени точности.

Теорема 6. Для того чтобы квадратурная формула (5.4) была точной для алгебраических многочленов степени $n-1$, необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной.

Доказательство. Необходимость. Возьмём функцию $f(x) = \dfrac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} = \omega_k(x)$. Это есть многочлен степени $n-1$, и если формула (5.4) верна для любых многочленов степени $n-1$, то она должна быть точной и для $\omega_k(x)$. Поэтому верны равенства

$$\int_a^b p(x)\omega_k(x)dx = \int_a^b p(x)\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx = \sum_{i=1}^{n} A_i\omega_k(x_i) = A_k,$$

так как, $\omega_k(x_i) = 0,\ i \neq k,\quad \omega_k(x_k) = 1$, и формула (5.4) действительно является интерполяционной, так как её коэффициенты имеют значения, указанные в (5.4).

ГГУ имени Ф. Скорины

Достаточность. Пусть f – любой многочлен степени $n-1$. Убедимся в том, что для него равенство (5.4) будет выполняться точно. Интерполируем f по значениям в узлах x_k $(k=1,2,...,n)$. Интерполирование будет точным

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}f(x_k).$$

Кроме того, если A_k имеют значения, указанные в (5.4), то верны равенства

$$\int_a^b p(x)f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\int_a^b\frac{p(x)\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx=\sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k),$$

и равенство (5.4) для $f(x)$ выполняется точно. Теорема доказана.

Теперь остановимся на оценке погрешности. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка n на $[a,b]$, то на отрезке, содержащем точки $x_1,x_2,...,x_n,x$, существует точка ξ такая, что

$$r(x)=\frac{\omega(x)}{n!}f^{(n)}(\xi).$$

Тогда для (5.4) $R_n(f)$ имеет место следующее выражение

$$R_n(f)=\frac{1}{n!}\int_a^b p(x)\omega(x)f^{(n)}(\xi)dx.$$

Если же $|f^{(n)}(x)|<M_n$, $x\in[a,b]$, то имеем оценку погрешности квадратуры

$$|R_n(f)|\le\frac{1}{n!}M_n\int_a^b|p(x)\omega(x)|dx. \qquad (5.5)$$

Лекция 2 Квадратурные формулы для равноотстоящих узлов

1 Формулы Ньютона-Котеса.
2 Простейшие формулы Ньютона-Котеса.

1 Формулы Ньютона-Котеса

В вычислениях часто узлы x_k берутся равноотстоящими. Построим интерполяционные квадратурные формулы, считая, что на отрезке

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$[a,b]$ задано $n+1$ равноотстоящих узлов x_k, таких, что $x_0 = a$, $x_k = x_{k-1} + h$, $x_n = b$ и $h = \dfrac{b-a}{n}$. Введем новую переменную $q = \dfrac{x - x_0}{h}$. Тогда многочлен Лагранжа примет вид

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} q(q-1)...(q-n)}{k!(n-k)!(q-k)} f(x_k).$$

Подставим это выражение в (5.3), получим

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} h}{k!(n-k)!} \int_0^n p(a+qh) \frac{q(q-1)...(q-n)}{q-k} dq\, f(x_k) + R_n(f).$$

Полученную формулу перепишем в виде

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^{n} B_k^n f(x_k), \tag{5.6}$$

где

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k} h}{nk!(n-k)!} \int_0^n p(a+qh) \frac{q(q-1)...(q-n)}{q-k} dq. \tag{5.7}$$

Квадратурные правила (5.6) называют **формулами Ньютона-Котеса**, а коэффициенты (5.7) – **коэффициентами Ньютона-Котеса**.

Для постоянной весовой функции $p(x) \equiv 1$ формула Ньютона-Котеса имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^{n} B_k^n f(x_k), \tag{5.8}$$

а коэффициенты B_k^n определяются по формулам

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k} h}{nk!(n-k)!} \int_0^n \frac{q(q-1)...(q-n)}{q-k} dq. \tag{5.9}$$

Нетрудно видеть, что для коэффициентов B_k^n справедливы соотношения $\sum_{k=0}^{n} B_k^n = 1$ и $B_k^n = B_{n-k}^n$, например, последнее легко показывается с помощью замены $q = -t + n$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Коэффициенты B_k^n вычислены до $n = 20$. Однако для больших значений n формулы Ньютона-Котеса не применяются, так как с ростом n все значительнее сказывается неустранимая и вычислительная погрешность. В следующей таблице приведем некоторые значения коэффициентов B_k^n .

Таблица 5.1 Значение коэффициентов

n \ k	0	1	2	3	4	Знаменатель
1	1					2
2	1	4				6
3	1	3				8
4	7	32	12			90
5	19	75	50			288
6	41	216	27	272		840
7	751	3577	1323	2989		17280
8	989	5888	-928	10496	-4540	28350

Например, $B_2^5 = \dfrac{50}{288}$.

Замечание. Формула (5.9) имеет степень точности n, если число узлов её $n+1$ – является чётным, и степень $n+1$, если число узлов её $n+1$ – является нечётным.

2 Простейшие формулы Ньютона-Котеса

Для повышения точности интегрирования отрезок $[a,b]$ часто делят на несколько частей, затем применяют избранную квадратурную формулу к каждой отдельной части и результаты складывают. Этот метод является общим, и им можно пользоваться при применении всякой квадратурной формулы. Для многих формул интерполяционных квадратур погрешность $R_n(f)$ зависит от величин отрезка интегрирования следующим образом

$$R_n(f) = (b-a)^k C(a,b), \tag{5.10}$$

где $C(a,b)$ – медленно изменяющаяся функция от a до b и $k \in N$. Такая зависимость показывает, что если мы уменьшим отрезок интегрирования в m раз, то $R_n(f)$ при этом уменьшится приблизительно в m^k раз. Для вычисления интеграла по всему отрезку $[a,b]$ разделим

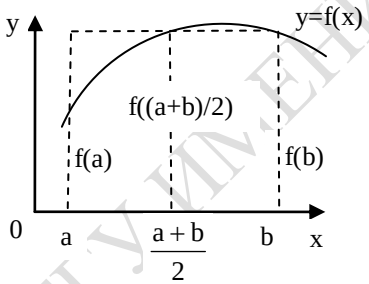
ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

его на m равных частей и вычислим при помощи выбранной формулы интегралы по всем частичным отрезкам. В каждом случае погрешность будет приблизительно в m^k раз меньше, чем (5.10). При сложении всех таких интегралов получится результат, погрешность которого будет приблизительно в m^{k-1} раз меньше, чем погрешность (5.10), когда формула применяется для вычисления интеграла по всему отрезку $[a,b]$. Если $k>1$, то произойдёт уменьшение погрешности тем больше, чем больше k. Описанный способ увеличения точности применим сейчас к простейшим формулам Ньютона-Котеса.

Формула прямоугольников

В случае $n=0$ функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ заменяется интерполяционным многочленом нулевого порядка, построенным по значениям $f(x)$ в средней точке $x=\frac{a+b}{2}$, т.е. функцией на отрезке $P(x)=f(\frac{a+b}{2})$ $[a,b]$. Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+R(f)\,. \qquad (5.11)$$



То есть, площадь криволинейной трапеции заменяется площадью **прямоугольника**.

Если $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет производную второго порядка, то по теореме Тейлора получим

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+(x-\frac{a+b}{2})f'(\frac{a+b}{2})+\frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{2}f''(\xi(x))\,.$$

Интегрируя последнее выражение, получим

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2 f''(\xi(x))dx\,,$$

откуда следует, что

ГГУ им. Ф. Скорины

$$R(f)=\frac{1}{2}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2 f''(\xi(x))dx.$$

Применяя теорему о среднем значении, получим

$$R(f)=\frac{\mu}{2}\int_a^b (x-\frac{a+b}{2})^2 dx=\frac{(b-a)^3}{24}\mu,$$

где $\inf\limits_x f''(x)\le\mu\le\sup\limits_x f''(x)$ или же, погрешность можно записать в виде $R(f)=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\eta)$, где $a\le\eta\le b$.

Далее, разобьём отрезок $[a,b]$ на n равных частей длины $h=\frac{b-a}{n}$ и, применяя формулу (5.11) к каждому отрезку, просуммируем результаты по всем отрезкам, получим окончательную формулу **прямоугольников**

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{n}\left[f(a+\frac{h}{2})+f(a+\frac{3h}{2})+...+f(a+\frac{(2n-1)h}{2})\right]+R, \quad (5.12)$$

где погрешность окончательно определяется формулой

$$R(f)=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\eta). \quad (5.13)$$

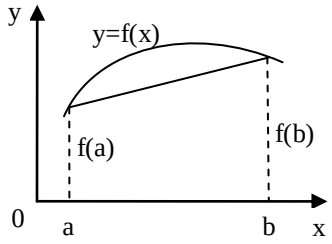
Формула трапеций

Пусть $n=1$, тогда линейное интерполирование выполняется по двум значениям $f(a)$ и $f(b)$, принимаемым функцией $f(x)$ на концах a и b. Квадратурная формула (5.8), с учетом коэффициентов из таблицы, будет иметь вид

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \quad (5.14)$$

Это формула **трапеций**.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ



Погрешность ее, в виду $\omega(x)=(x-a)(x-b)$ и $p(x)\equiv 1$ определяется по формуле

$$R_n(f)=\frac{1}{n!}\int_a^b p(x)\omega(x)f^{(n)}(\xi)dx=\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f^{(2)}(\xi)dx.$$

Если $f''(x)$ – непрерывная функция на $[a,b]$, и так как множитель $(x-a)(x-b)$ сохраняет знак на $[a,b]$, то по теореме о среднем, существует на $[a,b]$ такая точка η, что

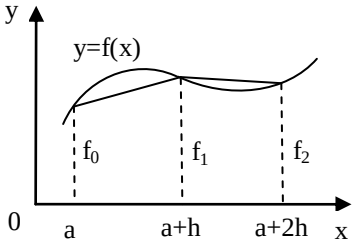
$$R_2(f)=f''(\eta)\int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2!}dx=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta),\ \ \eta\in[a,b]. \quad (5.15)$$

Для увеличения точности формулы трапеций (5.14), разделим отрезок $[a,b]$ на n равных частей длины $h=\dfrac{b-a}{n}$. Рассмотрим частичный отрезок $[a+kh, a+(k+1)h]$. Для него получим

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)dx=\frac{h}{2}(f_k+f_{k+1})+R_k,\quad f_k=f(a+kh),$$

и согласно (5.15)

$$R_k=-\frac{h^3}{12}f''(\eta_k),\quad a+kh\le\eta_k\le a+(k+1)h.$$



Сумма интегралов по всем частичным отрезкам даёт **общую квадратурную формулу трапеций**

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + ... + f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n] + R, \qquad (5.16)$$

где

$$R = R_0 + R_1 + ... + R_{n-1} = -\frac{h^3}{12}[f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + ... + f''(\eta_{n-1})] =$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + ... + f''(\eta_{n-1})}{n}, \quad a + kh \le \eta_k \le a + (k+1)h .$$

Величина $\frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + ... + f''(\eta_{n-1})}{n}$ есть среднее арифметическое из значений второй производной. Считая ее непрерывной функцией на $[a,b]$, мы можем выбрать такую точку $\xi \in [a,b]$, что

$$\frac{f''(\eta_0) + f''(\eta_1) + ... + f''(\eta_{n-1})}{n} = f''(\xi),$$

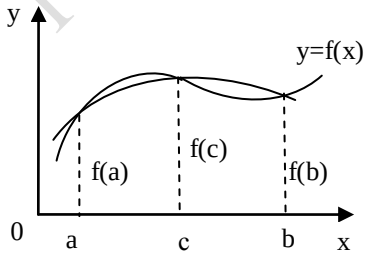
а значит,

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi), \quad \xi \in [a,b]. \qquad (5.17)$$

Формула парабол

Пусть $n = 2$ и интерполируется функция $f(x)$ по трём точкам a, $\frac{a+b}{2} = c$, b в которых известны её значения. Интерполирующий многочлен имеет вторую степень и его графиком является парабола. Квадратурная формула парабол имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)]. \qquad (5.18)$$



Это формула **парабол**. Она называется также формулой **Симпсона**. Формула точна для функции $f(x) = (x-c)^3$, так как левая и правая части формулы (5.18) тождественно равны нулю, а значит, она точна и для любого многочлена третьей степени.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Для нахождения погрешности формулы (5.18) рассмотрим многочлен $P_3(x)$ третьей степени, удовлетворяющий условиям

$$P_3(a) = f(a), \quad P_3(c) = f(c), \quad P_3'(c) = f'(c), \quad P_3(b) = f(b).$$

Многочлен $P_3(x)$ интерполирует $f(x)$ по двум однократным узлам a и b и одному двукратному узлу c

$$f(x) = P_3(x) + r(x).$$

Так как для $P_3(x)$ формула Симпсона является точной, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P_3(x)dx + \int_a^b r(x)dx = \frac{b-a}{6}[P_3(a) + 4P_3(c) + P_3(b)] + \int_a^b r(x)dx =$$

$$= \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f(c) + f(b)] + \int_a^b r(x)dx.$$

Погрешность формулы Симпсона имеет вид

$$R(f) = \int_a^b r(x)dx.$$

Если считать, что $f(x)$ имеет на отрезке $[a,b]$ непрерывную производную четвёртого порядка, то из представления остаточного члена $r(x)$ интерполирования с кратными узлами, имеем

$$r(x) = \frac{1}{4!}(x-a)(x-c)^2(x-b)f^{(4)}(\xi), \quad a \le x, \xi \le b.$$

Поэтому

$$R(f) = \frac{1}{24}\int_a^b (x-a)(x-c)^2(x-b)f^{(4)}(\xi)dx.$$

Так как множитель $(x-a)(x-c)^2(x-b)$ не изменяет знак на отрезке $[a,b]$ и $f^{(4)}(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a,b]$, то по теореме о среднем существует такая точка η, что

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\eta)}{24}\int_a^b (x-a)(x-c)^2(x-b)dx = -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta). \quad (5.19)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Далее, разделим $[a,b]$ на чётное число n равных частей длины $h=\dfrac{b-a}{n}$ и возьмём сдвоенный частичный отрезок $[a+(k-1)h, a+(k+1)h]$. Тогда, учитывая, что $f_k = f(a+kh)$, имеем

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_{k-1}+4f_k+f_{k+1})+R_k \ .$$

Просуммировав по всем сдвоенным отрезкам $[a,a+2h]$, $[a+2h,a+4h],\ldots$, получим,

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3n}[f_0+f_n+2(f_2+f_4+\ldots+f_{n-2})+4(f_1+f_3+\ldots+f_{n-1})]+R(f),$$

и

$$R(f) = -\frac{1}{90}h^5[f^{(4)}(\eta_1)+f^{(4)}(\eta_3)+\ldots+f^{(4)}(\eta_{n-1})].$$

Если функция $f^{(4)}(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка ξ, что

$$\frac{2}{n}[f^{(4)}(\eta_1)+f^{(4)}(\eta_3)+\ldots+f^{(4)}(\eta_{n-1})] = f^{(4)}(\xi)$$

и для погрешности $R(f)$ получим выражение

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{(4)}(\xi), \quad a\le\xi\le b. \qquad (5.20)$$

Формула «трёх восьмых»

При $n=3$ для построения формулы Ньютона-Котеса интерполирование функции $f(x)$ выполняется по её значениям в четырёх точках $a,\ a+\dfrac{H}{3},\ a+\dfrac{2H}{3},\ b\quad (H=b-a)$. Формула «**трёх восьмых**» или формула **Ньютона** будет следующей

$$\int_a^b f(x)dx \approx H[\frac{1}{8}f(a)+\frac{3}{8}f(a+\frac{H}{3})+\frac{3}{8}f(a+\frac{2H}{3})+\frac{1}{8}f(b)]. \qquad (5.21)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Её степень точности равна трём.

Проделав рассуждения немного сложнее, чем в случае формулы Симпсона, получим следующий вид погрешности

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\eta), \quad a \le \eta \le b . \tag{5.22}$$

Далее, пусть n кратно трём. Разделим отрезок $[a,b]$ на n равных частей длины $h = \frac{b-a}{n}$. Возьмём отрезок длины $3h$: $[a+kh, a+(k+3)h]$ и к нему применим формулу (5.21)

$$\int_{a+kh}^{a+(k+3)h} f(x)dx = \frac{3h}{8}\{ f(a+kh) + 3 f(a+(k+1)h) + 3 f(a+(k+2)h) + \\ + f(a+(k+3)h)\} + R_{k+1}(f) ,$$

и

$$R(f) = -\frac{(3h)^5}{6480} f^{(4)}(\eta_{k+1}) .$$

Просуммировав по всем тройным отрезкам, получим следующую общую формулу «трёх восьмых»

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{3h}{8}\{ f_0 + f_n + 2(f_3 + f_6 + \ldots + f_{n-3}) + \\ + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + \ldots + f_{n-2} + f_{n-1})\} + R(f) , \tag{5.23}$$

где $f_k = f(a+kh)$ и погрешность

$$R(f) = R_1(f) + R_2(f) + \ldots + R_{\frac{n}{3}}(f) = -\frac{(3h)^5}{6480}[f^{(4)}(\eta_1) + \ldots + f^{(4)}(\eta_{\frac{n}{3}})] =$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{80n^4}\frac{3}{n}[f^{(4)}(\eta_1) + \ldots + f^{(4)}(\eta_{\frac{n}{3}})] = -\frac{(b-a)^5}{80n^4} f(\xi), \quad a \le \xi \le b .$$

Заметим, что в случае, когда число узлов кратно 6, лучше применять формулу Симпсона, чем формулу «трёх восьмых», так как в первом случае погрешность меньше (определяется путём сравнения).

ГГУ имени Ф. Скорины

Лекция 3 Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности

1 Постановка задачи.
2 Квадратурная формула Гаусса.
3 Остаточный член формулы Гаусса.

1 Постановка задачи

Будем строить квадратурные формулы интерполяционного типа, имеющие при заданном числе узлов n наивысшую алгебраическую степень точности, т.е. будем находить узлы и коэффициенты квадратурных формул из условия, что их остаточные члены обращаются в нуль для всех многочленов максимально высокой степени.

Итак, имеем задачу: на отрезке $[a,b]$ выбрать узлы x_i, $i=1,2,..,n$ и определить коэффициенты A_i таким образом, чтобы квадратурное правило

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \qquad (5.24)$$

было точным для всех многочленов наивысшей возможной степени m. При построении квадратурной формулы будем считать, что весовая функция $p(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int_a^b |p(x)x^i|dx < q, \quad i>0, \quad и \quad \int_a^b |p(x)|dx > 0 .$$

В правиле (5.24) $2n$ неизвестных A_i, x_i, $i=1,2,..,n$, поэтому следует ожидать, что при надлежащем выборе узлов и квадратурных коэффициентов оно будет точным для всех многочленов степени $m=2n-1$.

Теорема 7. Для того чтобы квадратурное правило (5.24) было точным для всех многочленов степени не выше $2n-1$, необходимо и достаточно выполнение условий

1. Правило (5.24) должно быть интерполяционным, то есть, коэффициенты вычисляться по формулам:

$$A_k = \int_a^b p(x)\frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}dx . \qquad (5.25)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2. Многочлен $\omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$ должен быть ортогонален на отрезке $[a,b]$ по весу $p(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени меньше n

$$\int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx=0. \qquad (5.26)$$

Доказательство. Необходимость первого условия следует из теоремы 6. Покажем необходимость второго условия. Пусть $Q(x)$ произвольный многочлен степени меньше n. Возьмем $f(x)=\omega(x)Q(x)$. Этот многочлен степени не больше $2n-1$ и правило для него должно быть точным. Но так как $f(x_i)=0$ для всех значений i, то, следовательно, равенство (5.26) выполняется.

Достаточность. Пусть $f(x)$ произвольный многочлен степени не больше $2n-1$. Представим его в виде $f(x)=\omega(x)Q(x)+r(x)$, где $Q(x)$ и $r(x)$ многочлены степени меньше n. Ясно, что $f(x_i)=r(x_i)$. Тогда

$$\int_a^b p(x)f(x)dx=\int_a^b p(x)\omega(x)Q(x)dx+\int_a^b p(x)r(x)dx=\sum_{i=1}^n A_i r(x_i)=\sum_{i=1}^n A_i f(x_i).$$

Теорема доказана.

Итак, задача о построении квадратурного правила (5.24) сводится к задаче об отыскании многочлена $\omega(x)$, который обладает свойством 2 (равенство (5.26)). Покажем, что такой многочлен существует, все его корни действительны, различны и принадлежат отрезку $[a,b]$.

Теорема 8. Если весовая функция $p(x)$ не меняет знак на отрезке $[a,b]$, то существует и притом единственный многочлен $\omega(x)$ ортогональный на $[a,b]$ по весу $p(x)$ ко всякому многочлену степени меньше n.

Доказательство. Будем искать многочлен в виде $\omega(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$. Из условия ортогональности для определения коэффициентов a_i получим систему n уравнений

$$\int_a^b p(x)\left[x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n\right]x^i dx=0, \quad i=0,1,...,n-1.$$

ГГУ имени Ф. Скорины

Достаточно показать, что соответствующая однородная система имеет лишь нулевое решение

$$\int_a^b p(x)\left[a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\right]x^i dx = 0, \quad i = 0,1,\ldots,n-1 .$$

Умножим последовательно каждое уравнение на $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ и просуммируем. В результате получим уравнение

$$\int_a^b p(x)\left[a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\right]^2 dx = 0 .$$

В силу того, что $p(x)$ не меняет знак на $[a,b]$, то последнее равенство возможно лишь тогда, когда все $a_i = 0$. Теорема доказана.

Теорема 9. Если $p(x)$ не меняет знак на отрезке $[a,b]$ и многочлен $\omega(x)$ ортогонален на $[a,b]$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени меньше n, то все корни $\omega(x)$ действительны, различны и лежат внутри $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ – корни, которые лежат внутри $[a,b]$ и имеет нечетную кратность. Допустим, что $m < n$. Построим многочлен $\rho(x) = (x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m)$. Для него должно выполняться равенство

$$\int_a^b p(x)\omega(x)\rho(x)dx = 0 .$$

С другой стороны, многочлен $\omega(x)\rho(x)$ содержит только четные степени и поэтому

$$\int_a^b p(x)\omega(x)\rho(x)dx \neq 0 .$$

Значит, $m = n$. Теорема доказана.

Таким образом, квадратурное правило наивысшей алгебраической степени точности (5.24) существует при любом n и является единственным. Можно показать, что ни при каком выборе узлов x_i и коэффициентов A_i, $i = 1,2,\ldots,n$ квадратурное правило не будет точным

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

для всех многочленов степени $2n$. Если $p(x) \geq 0$ и квадратурное правило является точным для всех многочленов степени $2n-2$, то все квадратурные коэффициенты $A_i > 0$. Действительно, если $f(x) = \left[\dfrac{\omega(x)}{x - x_i}\right]^2$, то $\int\limits_a^b p(x) f(x) dx = A_i \left[\omega'(x_i)\right]^2$. Откуда получаем

$$A_i = \int\limits_a^b p(x) \left[\frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}\right]^2 dx > 0 .$$

2 Квадратурная формула Гаусса

Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности для случая $p(x) \equiv 1$ впервые построил Гаусс. Поэтому и для любого $p(x)$ подобные формулы называют **формулами Гаусса**.

Построим квадратурное правило, когда $p(x) = 1$. Введем обозначения

$$\int\limits_0^x \omega(x) dx = \varphi_1(x), \quad \int\limits_0^x \varphi_1(x) dx = \varphi_2(x), \ldots, \int\limits_0^x \varphi_{n-1}(x) dx = \varphi_n(x) .$$

Рассмотрим интеграл $\int\limits_a^b \omega(x) q(x) dx$, где $q(x)$ многочлен степени не выше $n-1$. Применяя формулу интегрирования по частям, учитывая (5.26), получим

$$0 = \int\limits_a^b \omega(x) q(x) dx = \int\limits_0^x \omega(x) dx q(x) \Big|_a^b - \int\limits_a^b \varphi_1(x) q(x) dx = \ldots$$

$$= \left[\varphi_1(x) q(x) - \varphi_2(x) q^{(1)}(x) + \varphi_3(x) q^{(2)}(x) - \ldots + (-1)^{n-1} \varphi_n(x) q^{(n-1)}(x)\right]\Big|_a^b .$$

При $x = a$ правая часть уравнения обращается в нуль, так как $\varphi_i(a) = 0$. Поэтому в силу произвольности $q(x)$ справедливы равенства

$$\varphi_1(b) = \varphi_2(b) = \ldots = \varphi_n(b) = 0 .$$

Следовательно, $\varphi_n(x)$ имеет корни кратности n при $x = a$ и $x = b$ и может быть записана в виде

ГГУ имени Ф. Скорины

$$\varphi_n(x) = C(x-a)^n (x-b)^n,$$

где C – постоянная.

Отсюда для $\omega(x)$ получим

$$\omega(x) = C \cdot \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n (x-b)^n].$$

Постоянная C подбирается из условия, что коэффициент при x^n в $\omega(x)$ равен 1. Чтобы определить величину этого коэффициента, вычислим

$$\frac{d^n}{dx^n} x^{2n} = 2n(2n-1)(2n-2)...(n+1)x^n = \frac{(2n)!}{n!} x^n.$$

Следовательно, $C = \dfrac{n!}{(2n)!}$.

Итак, получаем

$$\omega(x) = \frac{n!}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n (x-b)^n]. \qquad (5.27)$$

Последовательное применение теоремы Ролля показывает, что все корни уравнения $\omega(x) = 0$, действительны, различны и принадлежат интервалу $[a,b]$. Таким образом, их действительно можно использовать в качестве узлов интерполяции и полученная при этом формула численного интегрирования будет удовлетворять поставленным условиям.

3 Остаточный член формулы Гаусса

Пусть $f(x)$ – произвольная, достаточное количество раз дифференцируемая функция. Построим интерполяционный многочлен Эрмита $H(x)$, такой что $H(x_i) = f(x_i)$ и $H'(x_i) = f'(x_i)$, причём $x_1, x_2, ..., x_n$ – корни уравнения $\omega(x) = 0$.

Тогда

$$f(x) = H(x) + (x-x_1)^2 (x-x_2)^2 ...(x-x_n)^2 f(x;\ x_1, x_1;\ x_2, x_2; ...; x_n, x_n).$$

Многочлен $H(x)$ имеет степень $2n-1$. Проинтегрируем с весом $p(x)$ левую и правую части последнего выражения

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int_a^b f(x)p(x) = \int_a^b p(x)H(x)dx +$$

$$+\int_a^b p(x)\omega^2(x) f(x;\ x_1, x_1;\ x_2, x_2;...; x_n, x_n)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i H(x_i) + \int_a^b p(x)\omega^2(x)\ \ f(x;\ x_1, x_1;\ x_2, x_2;...; x_n, x_n)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) + \int_a^b p(x)\omega^2(x) \times f(x;\ x_1, x_1;\ x_2, x_2;...; x_n, x_n)dx .$$

Таким образом, остаточный член будет иметь вид

$$R(f) = \int_a^b p(x)\omega^2(x)\ \ f(x;\ x_1, x_1;\ x_2, x_2;...; x_n, x_n)dx .$$

Так как $p(x)\omega^2(x)$ не меняет знака на отрезке $[a,b]$, узлы $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$ и $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывную производную порядка n, то на отрезке $[a,b]$ существует такая точка ξ, для которой верно равенство $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$. Следовательно, погрешность $R(f)$ будет

$$R(f) = f(\xi; x_1, x_1; ...x_n, x_n)\int_a^b p(x)\omega^2(x)dx = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_a^b p(x)\omega^2(x)dx ,$$

где ξ, $\eta \in [a,b]$.

При $p(x) \equiv 1$ выражение для $R(f)$ можно упростить, интегрируя по частям

$$\int_a^b \omega(x)\cdot\omega(x)dx = -\int_a^b \varphi_1(x)\omega'(x)dx = \int_a^b \varphi_2(x)\omega''(x)dx = ...$$

$$= (-1)^n \int_a^b \varphi_n(x)\omega^{(n)}(x)dx = (-1)^n n!\int_a^b \varphi_n(x)dx .$$

Применяя снова последовательное интегрирование по частям, получим

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx = \frac{n!}{(2n)!}\int_a^b (x-a)^n (x-b)^n dx =$$

$$= -\frac{n!n}{(2n)!}\int_a^b \frac{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}{n+1} dx = \ldots$$

$$= (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_a^b \frac{(x-a)^{2n}}{(n+1)\ldots 2n} dx = \frac{(-1)^n (n!)^3 (b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2 (2n+1)}.$$

Итак, при $p(x) \equiv 1$ погрешность $R(f)$ принимает вид

$$R(f) = (-1)^n n!(-1)^n = \frac{(n!)^3 (b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2 (2n+1)} \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} =$$

$$= \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3 (2n+1)} f^{(2n)}(\xi). \qquad (5.28)$$

Лекция 4 Коэффициенты формул Гаусса.

1 Коэффициенты формул Гаусса.
2 Некоторые составные формулы.
3 Квадратурные формулы с равными коэффициентами.

1 Коэффициенты формул Гаусса

Найдём теперь выражения для коэффициентов при $f(x_i)$ в формуле (5.24). Для этого рассмотрим функцию

$$\psi_k(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_k}.$$

Квадрат этой функции является многочленом степени $2n-2$. Следовательно,

$$\int_a^b p(x)\psi_k{}^2(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i \psi_k{}^2(x_i) = A_k \psi_k{}^2(x_k).$$

Отсюда,

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$A_k = \frac{\int_a^b p(x)\psi_k^2(x)dx}{\psi_k^2(x_k)} = \frac{\int_a^b p(x)\psi_k^2(x)dx}{\omega'^2(x_k)}. \qquad (5.29)$$

Заметим, что все коэффициенты A_k – положительные.

При $p(x) \equiv 1$ получим более удобные выражения для коэффициентов A_k, путём интегрирования по частям

$$\int_a^b \psi_k{}^2(x)dx = \int_a^b \frac{\omega^2(x)}{(x-x_k)^2}dx = \left[-\frac{\omega^2(x)}{(x-x_k)^2}\right]\Bigg|_a^b + 2\int_a^b \frac{\omega(x)\,\omega'(x)}{x-x_k}dx =$$

$$= \frac{\omega^2(a)}{a-x_k} - \frac{\omega^2(b)}{b-x_k} + 2\int_a^b \frac{\omega(x)\,\omega'(x)}{x-x_k}dx.$$

Подсчитаем значения $\omega^2(a)$ и $\omega^2(b)$. По формуле Лейбница из (5.27) имеем

$$\omega(x) = \frac{n!}{(2n)!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}[(x-a)^n(x-b)^n] =$$

$$= \frac{n!}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k}{dx^k}[(x-a)^n]\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}[(x-b)^n].$$

Отсюда,

$$\omega(a) = \frac{n!}{(2n)!}n!(a-b)^n = (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}(b-a)^n,$$

$$\omega(b) = \frac{(n!)^2}{(2n)!}(b-a)^n.$$

Функция $\dfrac{\omega(x)\,\omega'(x)}{x-x_k}$ является многочленом степени $2n-2$. Поэтому

$$2\int_a^b \frac{\omega(x)\,\omega'(x)}{x-x_k}dx = 2\sum_{i=1}^{n} A_i\frac{\omega(x_i)\,\omega'(x_i)}{x_i-x_k} = 2A_k\omega'^2(x_k).$$

Из (5.29) следует

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$A_k\omega'^2(x_k)=\left[(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2\frac{(b-a)^{2n}}{a-x_k}-\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2\frac{(b-a)^{2n}}{b-x_k}+2A_k\omega'^2(x_k).$$

Таким образом, коэффициенты A_k при известных значениях x_k могут быть вычислены по формуле

$$A_k=\frac{(n!)^4(b-a)^{2n+1}}{[(2n)!]^2(x_k-a)(b-x_k)\omega'^2(x_k)}. \qquad (5.30)$$

Нетрудно показать, что все корни $\omega(x)$ расположены симметрично относительно средней точки $\frac{a+b}{2}$, так, что для всякой точки x_k найдется симметричная ей точка x_{n-k+1} и, следовательно, $A_k=A_{n-k+1}$, то есть коэффициенты при $f(x_k)$ и $f(x_{n-k+1})$ совпадают.

Корни x_k и коэффициенты A_k можно вычислить для фиксированного отрезка $[-1,1]$. Любой отрезок $[a,b]$ путем замены $x=\frac{1}{2}[(b-a)t+b+a]$ приводится к отрезку $[-1,1]$. Запишем квадратурное правило (5.24) для отрезка $[-1,1]$

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k)+\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)}f^{(2n)}(\xi). \qquad (5.31)$$

Тогда для общего отрезка $[a,b]$ получим

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx&=\int_{-1}^{1}f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)\frac{b-a}{2}dt=\\&=\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}A_k f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t_k\right)+\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1}R(f).\end{aligned} \qquad (5.32)$$

Выпишем значение узлов x_k, коэффициентов A_k и погрешностей $R(f)$ для нескольких первых значений n

$n=1,\qquad x_1=0,\quad A_1=2,\quad R_1(f)=\frac{1}{3}f''(\xi);$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$n=2,\qquad x_2=-x_1=0.5773502692\ ,\quad A_1=A_2=1,\quad R_2(f)=\dfrac{1}{135}f^{(4)}(\xi);$

$n=3,\qquad x_2=0,\ \ x_3=-x_1=0.7745966692\ ,\quad A_2=\dfrac{8}{9},\ \ A_1=A_3=\dfrac{5}{9},$

$$R_2(f)=\frac{1}{15750}f^{(6)}(\xi);$$

$n=4,\qquad x_3=-x_2=0.3399810436\ ,\ \ x_4=-x_1=0.8611363116\ ,$

$A_2=A_3=0.6521451549\ ,\ A_1=A_4=0.3478548451\ ,\ R_2(f)=\dfrac{1}{3472875}f^{(8)}(\xi)\ .$

Из приведенных значений видно, что с ростом n знаменатель в выражении для погрешности растет очень быстро. Поэтому для $n=4$ квадратурная формула Гаусса имеет высокую точность.

Отметим, что $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=1,\quad A_i>0$ для любого i и, следовательно, с ростом n коэффициенты A_i остаются ограниченными величинами. Это обстоятельство выгодно отличает квадратуры Гаусса от формул Ньютона-Котеса.

2 Некоторые составные формулы

На практике с целью повышения точности счета можно использовать составные формулы для небольших значений n. Если $h=\dfrac{b-a}{m}$ и формуле для вычисления интеграла на частичном промежутке положить

$$\int\limits_{a+kh}^{a+(k+1)h}f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1}f(a+(k+\frac{1}{2})h+\frac{1}{2}ht)\frac{h}{2}dt=$$

$$=h\sum_{i=1}^{n}A_i f(a+(k+\frac{1}{2})h+\frac{1}{2}ht_i)+\frac{h^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)}f^{(2n)}(\xi_i)\ ,$$

то получим

$$\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=h\sum_{i=1}^{n}A_i\sum_{k=0}^{m-1}f(a+(k+\frac{1}{2})h+\frac{ht_i}{2})+\frac{h^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3(2n+1)}\ . \quad (5.33)$$

Для $n=2$ формула (5.33) примет вид

ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{m-1}\left[f(a+h(k+\frac{1+t_1}{2})) + f(a+h(k+\frac{1-t_1}{2}))\right] +$$

$$+\frac{h^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [a,b], \quad t_1 = 0.5773502692 \ .$$

Использование составной формулы Гаусса, например, при $n=3$ целесообразно для $m>30$, так как в этом случае при одинаковом объеме вычислений она значительно точнее общей формулы Симпсона.

3 Квадратурные формулы с равными коэффициентами

Рассмотрим формулу квадратуры с одинаковыми коэффициентами

$$\int_a^b p(x) f(x)dx \approx c_n \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \ . \qquad (5.34)$$

Которая называется формулой **Чебышева.** Эта формула содержит $n+1$ параметр c_n, x_k $(k=1,2,...,n)$ и их желательно выбирать так, чтобы квадратурная формула выполнялась точно для всех многочленов степени n. Для этого достаточно, чтобы она выполнялась точно для x от нулевой до n-ой, т.е.

$$\int_a^b p(x)x^i dx = c_n \sum_{k=1}^{n} x_k^i \ , \ i=0,1,...,n \ . \qquad (5.35)$$

Предположим, что произведение $p(x)x^i$, ($i=0,1,...,n$) абсолютно интегрируемо на $[a,b]$, и пусть $I_0 = \int_a^b p(x)dx \neq 0$.

Выясним возможность решения системы (5.35) относительно c_n и x_k. Пусть $i=0$, получим $\int_a^b p(x)dx = c_n n$. Откуда $c_n = \frac{1}{n}\int_a^b p(x)dx$. Полагая последовательно $i=1,2,...,n$, получим систему уравнений для нахождения x_k

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = c_n^{-1}\int\limits_a^b p(x)xdx = c_n^{-1}\mu_1 \\ s_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = c_n^{-1}\int\limits_a^b p(x)x^2dx = c_n^{-1}\mu_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ s_n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n = c_n^{-1}\int\limits_a^b p(x)x^ndx = c_n^{-1}\mu_n \end{array}\right\}. \qquad (5.36)$$

Рассмотрим многочлен $\omega(x)$, для которого x_k являются корнями $\omega(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$.

Из алгебры многочленов известны соотношения между коэффициентами многочлена $a_1,\ldots,a_n$ и суммами степеней корней

$$\left.\begin{array}{c} s_1 + a_1 = 0 \\ s_2 + a_1s_1 + 2a_2 = 0 \\ s_3 + a_1s_2 + a_2s_1 + 3a_3 = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ s_n + a_1s_{n-1} + a_2s_{n-2} + \ldots + na_n = 0 \end{array}\right\}. \qquad (5.37)$$

Значения s_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) известны, с их помощью мы можем единственным образом найти коэффициенты a_i многочлена $\omega(x)$. После этого решая уравнение $\omega(x) = 0$, найдём узлы x_k квадратурной формулы (5.34).

Однако заметим, что корни многочлена $\omega(x)$ могут оказаться комплексными или выходить за границы отрезка $[a, b]$. Вышеизложенное позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 10. Если $\int\limits_a^b p(x)dx \neq 0$, то квадратурная формула вида (5.34) с действительными или комплексными узлами x_k, точная для любых алгебраических многочленов степени n, может быть построена, и при этом единственным образом, при всяких $n = 1, 2, \ldots$.

Отметим, что если среди узлов x_k есть комплексные, то квадратурная формула (5.34) может быть полезной лишь для интегрирования функций $f(x)$, аналитических в области, содержащей внутри себя от-

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

резок $[a,b]$ и все узлы x_k. Поэтому для формул Чебышева особое значение имеет случай, когда узлы x_k действительные и принадлежащие отрезку $[a,b]$.

Пусть $p(x)\equiv 1$ и отрезок интегрирования приведён к $[-1,1]$ (отрезок $[a,b]$ заменой $x=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}t$ и сводится к отрезку $[-1,1]$). Тогда $\int\limits_{-1}^{+1} f(x)dx \approx c_n \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$. Коэффициент c_n определяется из равенства $c_n=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} dx=\frac{2}{n}$. Так как $\int\limits_{-1}^{1} x^i dx=\left.\frac{x^{i+1}}{i+1}\right|_{-1}^{1}=\frac{1-(-1)^{i+1}}{i+1}$, уравнения (5.36) дадут для сумм степеней узлов x_k значения

$$s_1=\frac{n}{2}\int\limits_{-1}^{1} xdx=0,\ s_2=\frac{n}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^2dx=\frac{n}{3},\ \ldots,\ s_n=\frac{n}{2}\frac{1}{n+1}\left[1-(-1)^{n+1}\right].$$

Поэтому система (5.37) уравнений для коэффициентов a_k многочлена $\omega(x)$ имеет вид

$$\left.\begin{array}{c} a_1=0 \\ \frac{n}{3}+2a_2=0 \\ a_3=0 \\ \frac{n}{5}+\frac{n}{3}a_2+4a_4=0 \\ a_5=0 \\ \frac{n}{7}+\frac{n}{5}a_2+\frac{n}{3}a_4+6a_6=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}.$$

При $n=1$, $\omega(x)=x$, так как $x_1=0$ и $c_1=2$, поэтому

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2f(0),\ \left(R_1(f)=\frac{1}{3}f''(\xi)\right).$$

Это есть формула прямоугольника с высотой, равной $f(0)$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

При $n=2$, $\omega(x)=x^2-\frac{1}{3}$, следовательно, $x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$, и, $c_2=1$, поэтому

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ (R_2(f)=\frac{1}{135}f^{(4)}(\xi)).$$

Эта формула совпадает с формулой Гаусса для двух узлов. Приведём таблицу узлов формулы Чебышева для $n=1(1)9$ с пятью значащими цифрами

$n=1: x_1=0$;
$n=2: x_2=-x_1=-0{,}57735$;
$n=3: x_3=-x_1=0{,}70711;\ x_2=0$;
$n=4: x_4=-x_1=0{,}79465;\ x_3=-x_2=0{,}18759$;
$n=5: x_5=-x_1=0{,}83250;\ x_4=-x_2=0{,}37454;\ x_3=0$;
$n=6: x_5=-x_1=0{,}83250;\ x_4=-x_2=0{,}37454;\ x_3=0$;
$n=7: x_7=-x_1=0{,}88386;\ x_6=-x_2=0{,}52966;\ x_5=-x_3=0{,}32391;\ x_4=0$;
$n=9: x_9=-x_1=0{,}91159;\ x_8=-x_2=0{,}60102;\ x_7=-x_3=0{,}52876;$
$x_6=-x_4=0{,}16791;\ x_5=0$.

При $n=8$ и $n\geq 10$ среди x_k – есть комплексные.
Эти формулы удобны при работе с чертежами, когда ординаты легко считываются.

Лекция 5 Вычисление несобственных интегралов.

1 Мультипликативный способ.
2 Аддитивный способ.
3 Функции с несколькими особенностями.

1 Мультипликативный способ

Пусть необходимо вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ имеет некоторые особенности на промежутке $[a,b]$. Рассмотрим два способа выделения особенностей.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Представим подынтегральную функцию в виде $f(x)=\varphi(x)P(x)$, где $P(x)>0$ на отрезке $[a,b]$, а функция $\varphi(x)$ является гладкой функцией. Тогда, рассматривая $P(x)$ как весовую функцию, для вычисления $\int\limits_a^b f(x)dx$ можно использовать какое-либо квадратурное правило.

Например, пусть необходимо вычислить $\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^4}\right)^{-1}dx$. Возьмем в качестве $P(x)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}$ и $\varphi(x)=\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{-1}$. Используя квадратурную формулу Гаусса, получим

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^4}\right)^{-1}dx\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+x_k^2}\right)^{-1},$$

где $x_k=\cos(\frac{(2k-1)\pi}{2n})$ – корни многочлена Чебышева $T_n(x)$, который ортогонален на отрезке $[-1,1]$ по весу $P(x)=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}$ ко всякому многочлену степени меньше n.

2 Аддитивный способ

Представим подынтегральную функцию в виде $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$, где $\varphi(x)$ не имеет особенностей и является гладкой, а интеграл от $\psi(x)$ может быть найден точными методами.

Пусть необходимо вычислить

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx.$$

Считая, что $\varphi(x)=\ln\frac{\sin x}{x}$, а $\psi(x)=\ln x$, получим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln x dx=(x\ln x-x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}(\ln\frac{\pi}{2}-1).$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Интеграл от $\varphi(x)$ можно вычислить, используя известные квадратурные формулы.

Рассмотрим некоторые приемы представления подынтегральной функции в виде суммы.

Пусть $f(x)=(x-c)^{\alpha}\varphi(x),\ \alpha>-1,\ c\in[a,b]$, а $\varphi(x)$ – m кратно непрерывно дифференцируемая функция. Представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=[\varphi(c)(x-c)^{\alpha}+\frac{\varphi^{(1)}(c)}{1!}(x-c)^{\alpha+1}+\frac{\varphi^{(2)}(c)}{2!}(x-c)^{\alpha+2}+\ldots$$
$$+\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{\alpha+k}]+$$
$$+(x-c)^{\alpha}[\varphi(x)-\varphi(c)-\frac{\varphi^{(1)}(c)}{1!}(x-c)-\ldots-\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{k}],\quad k<m\,.$$

Первая скобка легко интегрируется. Вторая скобка обращается в нуль в точке $x=c$ вместе с производными до k-го порядка включительно и поэтому второе слагаемое не будет иметь особенностей.

3 Функции с несколькими особенностями

Описанным методом можно воспользоваться и тогда, когда функция имеет вид $f(x)=(x-c)^{\alpha}\ln^{p}(x-c)\varphi(x)$, где p – натуральное число. Если функция имеет несколько особенностей, например, $f(x)=(x-c_1)^{\alpha_1}(x-c_2)^{\alpha_2}(x-c_3)^{\alpha_3}\ldots(x-c_k)^{\alpha_k}\varphi(x)$, то, используя описанный выше метод, можно сначала исключить особенность в точке c_1

$$f(x)=(x-c_1)^{\alpha_1}[a_0^{(1)}+a_1^{(1)}(x-c_1)+\ldots+a_{k_1}^{(1)}(x-c_1)^{k_1}]+\psi_1(x)\,,$$

где функция $\psi_1(x)$ не имеет особенностей в точке c_1. Затем можно исключить особенность у функции $\psi_1(x)$ в точке c_2 и так далее. Исключив особенности во всех точках, получим

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=0}^{k_j}a_i^{(j)}(x-c_j)^{\alpha_j+i}+\int_a^b\psi_k(x)dx\,,$$

где $\psi_k(x)$ не имеет особенностей на отрезке $[a,b]$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Пусть $f(x)=\varphi(\psi(x))$, где $\psi(x)$ гладкая функция, принимающая в точке $x=c\in[a,b]$ значение, при котором функция $\varphi(x)$ имеет особенность. Представим функцию $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x)=[\psi(c)+\psi^{(1)}(c)(x-c)]+[\psi(x)-\psi(c)-\psi^{(1)}(c)(x-c)].$$

Тогда

$$f(x)=\varphi[\psi(c)+\psi^{(1)}(c)(x-c)]+\{\varphi[\psi(x)]-\varphi[\psi(c)+\psi^{(1)}(c)(x-c)]\}.$$

Функцию $\varphi[\psi(c)+\psi^{(1)}(c)(x-c)]$ часто оказывается возможным проинтегрировать в конечном виде. Второе слагаемое в фигурных скобках не имеет особенности в точке $x=c$ и соответствующий интеграл вычисляется методами численного интегрирования.

Лекция 6 Вычисление кратных интегралов

1 Метод повторного применения квадратурных формул.
2 Метод замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом.
3 Практическое применение.

1 Метод повторного применения квадратурных формул

Пусть необходимо приближенно вычислить кратный интеграл

$$\int_G f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n\ .$$

Рассмотрим несколько способов построения формул численного интегрирования вида

$$\int_G f(x_1,x_2,...,x_n)dx_1dx_2...dx_n=\sum_{i=1}^{N}c_i(p_i)+R(f)\ . \qquad (5.38)$$

Формулы (5.38) называются **кубатурными формулами**, а точки p_i называются **узлами кубатурной формулы**.

Для простоты изложения допустим, что область G – прямоугольник $G=\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ и нужно вычислить интеграл

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$J=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy\,.$$

Представим этот интеграл в виде $J=\int_a^b F(x)dx$, где $F(x)=\int_c^d f(x,y)dx$.

Для вычисления $J=\int_a^b F(x)dx$ воспользуемся квадратурной формулой Симпсона

$$J=\int_a^b F(x)dx=\frac{b-a}{6}\left[F(a)+4F(\frac{a+b}{2})+F(b)\right]+R_1(F(x))\,, \quad (5.39)$$

где

$$R_1(F(x))=-\frac{(b-a)^5}{16\cdot 180}F^{(4)}(\xi)=-\frac{(b-a)^5}{16\cdot 180}\int_c^d\frac{\partial^4 f(\xi,y)}{\partial x^4}dy=$$

$$=-\frac{(b-a)^5(d-c)}{16\cdot 180}\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial x^4},\quad (a<\xi<b,\ c<\eta<d)\,.$$

В свою очередь $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x)=\int_c^d f(x,y)dx=\frac{d-c}{6}\left[f(x,c)+4f(x,\frac{c+d}{2})+f(x,d)\right]+R_y(f(x,y))\,,$$

где $R_y(f(x,y))=-\frac{(d-c)^5}{16\cdot 180}\frac{\partial^4 f(x,\xi)}{\partial y^4}$. Подставляя выражение для $F(x)$ в (5.39), получим

$$J=\int_a^b F(x)dx=\frac{(b-a)(d-c)}{36}[f(a,c)+4f(a,\frac{c+d}{2})+f(a,d)+4f(\frac{a+b}{2},c)+$$

$$+16f(\frac{a+b}{2},\frac{c+d}{2})+4f(\frac{a+b}{2},d)+f(b,c)+4f(b,\frac{c+d}{2})+f(b,d)]-$$

$$-\frac{(b-a)(d-c)}{2^5\cdot 90}\cdot[(b-a)^4\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial x^4}+(d-c)^4\frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta_1)}{\partial y^4}+$$

$$+\frac{(b-a)^4(d-c)^4}{2^5\cdot 90}\frac{\partial^8 f(\xi_2,\eta_2)}{\partial x^4\partial y^4}],\quad (a<\xi_i<b,\ c<\eta_i<d)\,. \quad (5.40)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Аналогично можно вычислить и интеграл более высокой кратности, причем по разным переменным можно использовать различные квадратурные формулы.

2 Метод замены подынтегральной функции интерполяционным многочленом

Заменим в интеграле $J = \iint\limits_G f(x,y)dxdy$ функцию $f(x,y)$ интерполяционным многочленом вида

$$L(x,y) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i) L_i(x,y) \text{, где } L_i(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & при\ i = j \\ 0, & при\ \ i \neq j \end{cases}.$$

После замены подынтегральной функции получим

$$J = \iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_G L(x,y)dxdy + \iint\limits_G R(f(x,y))dxdy =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i, y_i) + \overline{R}(f(x,y)) \text{, где } c_i = \iint\limits_G L_i(x,y)dxdy.$$

Если область G – прямоугольник, на котором построена равномерная сетка $x_i = a + ih,\ \ y_j = c + jl,\quad h = \dfrac{b-a}{n},\ \ l = \dfrac{d-c}{m}$, тогда

$$L(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j) \frac{\omega_{n+1}(x)\omega_{n+1}(y)}{(x-x_i)(y-y_j)\omega'_{n+1}(x_i)\omega'_{n+1}(y_j)} + R(f(x,y)).$$

Проводя интегрирование по формуле прямоугольника, получим

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} f(x_i, y_j) + \overline{R}(f(x,y)), \qquad (5.41)$$

где

$$c_{ij} = \int_a^b \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)} dx \int_c^d \frac{\omega_{n+1}(y)}{(y-y_j)\omega'_{n+1}(y_j)} dy.$$

Следовательно, $c_{ij} = (b-a)(d-c)B_i^n B_j^m$, где B_i^n, B_j^m – коэффициенты Ньютона-Котеса.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

3 Практическое применение

На практике для вычисления кратных интегралов удобнее использовать формулы, дающие высокую точность при минимальном числе узлов, например, формулы Гаусса. Возьмем в области G четыре узла для квадратуры Гаусса

$$x_0 = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}},\ x_1 = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}},\ y_0 = \frac{c+d}{2} - \frac{d-c}{2\sqrt{3}},\ y_0 = \frac{c+d}{2} + \frac{d-c}{2\sqrt{3}}.$$

Тогда будем иметь

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy = \frac{(b-a)(d-c)}{4}[\,f(x_0,y_0) + f(x_0,y_1) + f(x_1,y_0) + f(x_1,y_1)].$$

Погрешность этой формулы определится соотношением

$$R(f(x,y)) = \frac{(b-a)(d-c)}{24^3\cdot 5}[\,(b-a)^4\frac{\partial^4 f(\xi,\eta)}{\partial x^4} + (d-c)^4\frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta_1)}{\partial y^4} -$$

$$-\frac{(b-a)^4(d-c)^4}{24^3\cdot 5}\frac{\partial^8 f(\xi_2,\eta_2)}{\partial x^4\partial y^4}\,]. \qquad (5.42)$$

Таким образом, остаток кубатурной формулы Гаусса, построенной по четырем точкам, может оказаться меньше остатка кубатурной формулы Симпсона, построенной для девяти точек.

Лекция 7 Вероятностный метод

1 Метод Монте-Карло.
2 Повышение точности метода Монте-Карло.
3 Экстраполяция по Ричардсону.

1 Метод Монте-Карло (метод статистических испытаний)

Пусть необходимо в произвольной многомерной области G вычислить интеграл

$$U(f) = \int_G f(p)dp. \qquad (5.43)$$

Допустим можно определить N случайных, попарно независимых точек $p_1, p_2, ..., p_N$, одинаково распределенных в G с плотностью рас-

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

пределения $q(p)$. Обозначим $s_j(f)=\dfrac{f(p_j)}{q(p_j)}$. Случайные величины $s_j(f)$ попарно независимы и одинаково распределены. Вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины $s_j(f)$

$$Ms_j(f)=\int_G \frac{f(p)}{q(p)}q(p)dp=U(f),$$

$$Ds_j(f)=Ms_j^2(f)-[Ms_j(f)]^2=$$

$$=\int_G (\frac{f(p)}{q(p)})^2 q(p)dp-(\int_G \frac{f(p)}{q(p)}q(p)dp)^2=U(\frac{f^2}{p})-(U(f))^2=D(f).$$

Обозначим через

$$S_N(f)=N^{-1}\sum_{j=1}^{N} s_j(f).$$

Вычислим математическое ожидание и дисперсию для $S_N(f)$

$$MS_N(f)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} Ms_j(f)=U(f),$$

$$DS_N(f)=\frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N} Ds_j(f)=\frac{D(f)}{N}.$$

Из теории вероятностей известно, что с вероятностью $1-\eta$ выполняется неравенство Чебышева

$$|S_N(f)-U(f)|\le\sqrt{\frac{D(f)}{\eta N}}. \qquad (5.44)$$

Таким образом, чем больше N, тем с большей точностью выражение $S_N(f)$ будет аппроксимировать величину интеграла (5.43).

Если взять, например, $\eta=0.01$ и $N=10^4$, то с вероятностью 0.99 будет выполняться оценка

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$|S_N(f)-U(f)|\le \frac{1}{10}\sqrt{D(f)}\,.$$

Если точки $p_1, p_2, ..., p_N$ независимы в совокупности, то оценку (5.44) можно улучшить. На основании центральной предельной теоремы, можно показать, что вероятность того, что случайная величина $(S_N(f)-U(f))\Big/\sqrt{\frac{D(f)}{N}}$ не превосходит по модулю $y>0$, при $N\to\infty$ асимптотически равна

$$P(y)=1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_y^{\infty}\exp(-\frac{t^2}{2})dt\,.$$

Следовательно, при достаточно больших N с вероятностью близкой к $P(y)$ будет выполняться неравенство

$$|S_N(f)-U(f)|\le y\sqrt{\frac{D(f)}{N}}\,. \qquad (5.45)$$

Например, если взять $y=3$ и $y=5$, то неравенство (5.45) будет выполняться с вероятностью 0.997 и 0.99999 соответственно. Величина в правой части (5.44) и (5.45) зависит от дисперсии $D(f)$. Оценим ее

$$s_j(f)-S_N(f)=s_j(f)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}s_i(f)=s_j(f)(1-\frac{1}{N})-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}s_i(f)\,.$$

Отсюда получаем

$$D(s_j(f)-S_N(f))=(1-\frac{1}{N})^2 Ds_j(f)+\frac{1}{N^2}\sum_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{N}Ds_i(f)=$$

$$=(1-\frac{1}{N})^2 D(f)+\frac{N-1}{N^2}D(f)=(1-\frac{1}{N})D(f)\,. \qquad (5.46)$$

Из (5.46) имеем

$$D(f)=\frac{N}{N-1}D(s_j(f)-S_N(f))\,.$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Так как $M(s_j(f)-S_N(f))=U(f)-U(f)=0$, то $D(s_j(f)-S_N(f))=$ $=M(s_j(f)-S_N(f))^2$, и, значит $D(f)=\frac{N}{N-1}M(s_j(f)-S_N(f))^2$. На основании закона больших чисел при достаточно больших N можно считать, что

$$M(s_j(f)-S_N(f))^2 \approx \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(s_j(f)-S_N(f))^2 .$$

Поэтому с большой вероятностью верно приближенное равенство

$$D(f)=\frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{N}(s_j(f)-S_N(f))^2 . \qquad (5.47)$$

Пусть $\mu(G)=1$ и задана вероятность $1-\eta$, с которой необходимо получить приближенное значение интеграла с точностью ε. Величину y можно определить из равенства

$$\eta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{y}^{\infty}\exp(-\frac{t^2}{2})dt .$$

Учитывая, что справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^{N}(s_j(f)-S_N(f))^2=\sum_{j=1}^{N-1}(s_j(f)-S_{N-1}(f))^2+\frac{N}{N-1}(s_N(f)-S_N(f))^2 ,$$

то вычисление интеграла можно проводить следующим образом.
Определяя последовательно точки $p_1, p_2, ..., p_N$, по рекуррентным формулам последовательно определяем значения $t_N(f),\ S_N(f),\ d_N(f),\ D_N(f)$

$$t_N=t_{N-1}+s_N(f),\ \ S_N=\frac{t_N}{N} ,$$

$$d_N=d_{N-1}+\frac{N}{N-1}(s_N-S_N)^2,\ \ D_N(f)=\frac{d_N}{N-1} . \qquad (5.48)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Точность вычисления интеграла по N точкам p_i определяем по формуле $\lambda_N = y\sqrt{\frac{D_N(f)}{N}}$. Если $\lambda_N < \varepsilon$, то вычисления прекращаются, считая, что с вероятностью $1-\eta$ выполняется неравенство $|S_N(f)-U(f)| \le \varepsilon$. Если точность ε не достигнута, то следует взять еще одну точку и повторить вычисления по формулам (5.48) и так далее. В качестве начального приближения можно положить $t_1 = s_1 = S_1,\ d_1 = D_1 = 0$.

Из формулы (5.45) следует, что метод сходится со скоростью $0(\frac{1}{\sqrt{N}})$, причем порядок не зависит от размерности интеграла и гладкости функции $f(p)$. **Недостаток метода** заключается в том, что оценки вида (5.45) выполняются лишь в предположении, что имеющиеся последовательности точек p_i являются независимыми в совокупности, хотя часто генерируемые датчиками псевдослучайных чисел последовательности можно считать лишь попарно независимыми. Особенно неблагоприятно это может сказаться на вычислении интегралов высокой кратности, так как требование независимости необходимо предъявлять к совокупностям из m чисел, где m – кратность интеграла.

Одним из важных критериев эффективности метода является величина относительной погрешности $\frac{\sqrt{D(f)}}{|U(f)|\sqrt{N}}$. Практика вычислений показывает, что величина $\frac{\sqrt{D(f)}}{|U(f)|}$ имеет тенденцию к резкому росту с увеличением размерности интегралов. Поэтому с увеличением размерности трудоемкость метода возрастает. Отметим, что риск применения метода Монте-Карло связан не с вероятностным характером оценок точности метода, а с тем, что генерируемые датчиками (программами ЭВМ) последовательности псевдослучайных чисел не обладают необходимыми статистическими свойствами.

2 Повышение точности метода Монте-Карло

Из оценки (5.45) видно, что точность метода повышается с уменьшением разброса значений функции $\frac{f(p)}{q(p)}$. Следовательно, точность

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

зависит от выбора $q(p)$. Выше предполагалось, что все узлы p_i имеют одинаковую функцию распределения $q(p_j)$. Однако на практике узлы p_i целесообразно выбирать каждый со своей функцией распределения $q_i(p)$. Для этого, например, исходный интеграл можно представить в виде суммы

$$U(f) = \int_G f(p)dp = \sum_{j=1}^{m} U_j(f), \qquad (5.49)$$

где $U_j(f) = \int_{G_j} f(p)dp$, а N взять в виде $N = N_1 + N_2 + ... + N_m$.

Каждый интеграл в (5.49) $U_j(f)$ вычисляется по методу Монте-Карло с N_j узлами и своей функцией распределения $q_j(p)$. Если область G удается разбить на подобласти G_j, в которых функция мало изменяется, то такой прием может дать существенное увеличение точности.

Пусть, например, для каждого из интегралов $U_j(f)$ узлы p_i^j, $i = 1,2,...,N_j$ имеют равномерную плотность распределения $q_j = \mu_j^{-1}$, где μ_j – мера области G_j и любые два узла распределены независимо. Тогда можно показать, что при $N_j = N\mu_j^{-1}$ выполняется неравенство

$$D(\bar{S}_N(f)) \geq D(S_N(f)),$$

где

$$D(\bar{S}_N(f)) = \sum_{j=1}^{m} D_j(f) N_j^{-1}, \;\; \bar{S}_N(f) = \sum_{j=1}^{m} S^j(f), \;\; S^j(f) = \frac{1}{N_j}\sum_{i=1}^{N_j} S_i^j(f).$$

3 Экстраполяция по Ричардсону

Пусть при вычислении интеграла J по некоторой квадратурной формуле известно, что порядок погрешности $R(f) = 0(h^m)$. Тогда для практической оценки погрешности $R(f)$ и уточнения значения интеграла можно воспользоваться методом двойного пересчета.

Пусть $R(f) = Mh^m$, где M – некоторая постоянная для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, подлежащая определению. Вычислим значение интегра-

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ла, разбивая промежуток на n_1 и n_2 частей. Будем считать, для определенности, что $n_2 > n_1$, $h_1 = \dfrac{b-a}{n_1}$, $h_2 = \dfrac{b-a}{n_2}$. Согласно предположению о структуре погрешности, имеем

$$R_{n_1}(f) = J - J_{n_1} = M(\frac{b-a}{n_1})^m, \quad R_{n_2}(f) = J - J_{n_2} = M(\frac{b-a}{n_2})^m.$$

Отсюда следует

$$J_{n_2} - J_{n_1} = M(b-a)^m \left(\frac{n_2^m - n_1^m}{n_1^m n_2^m} \right), \quad M = (J_{n_2} - J_{n_1}) \frac{n_2^m n_1^m}{(b-a)^m (n_2^m - n_1^m)}.$$

Для погрешности $R(f)$ получим приближенную формулу

$$R(f) = \frac{J_{n_2} - J_{n_1}}{(b-a)^m} \frac{n_1^m n_2^m}{n_2^m - n_1^m} h^m.$$

Если $h = \dfrac{b-a}{n_2}$, то выражение для погрешности имеет вид

$$R(f) = \frac{J_{n_2} - J_{n_1}}{n_2^m - n_1^m} n_1^m.$$

Тогда в качестве уточненного значения интеграла можно взять выражение

$$J_{n_2,n_1} = J_{n_2} + \frac{n_1^m}{n_2^m - n_1^m}(J_{n_2} - J_{n_1}). \qquad (5.50)$$

Описанный способ уточнения интеграла называется **экстраполяцией по Ричардсону.** Легко заметить, что $J_{n_2,n_1} \notin [J_{n_1}, J_{n_2}]$. На практике в качестве n_2 удобно брать $n_2 = 2n_1$. В этом случае формула (5.50) примет вид

$$J_{n_2,n_1} = J_{n_2} + \frac{n_1^m}{n_1^m (2^m - 1)}(J_{n_2} - J_{n_1}) = J_{2n_1} + \frac{1}{2^m - 1}(J_{2n_1} - J_{n_1}).$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лекция 8 Сходимость квадратурных процессов

1 Теорема о сходимости интерполяционного многочлена.
2 Замечания о применимости теоремы.
3 Сходимость интерполяционных квадратур.

1 Теорема о сходимости интерполяционного многочлена

Мы рассматривали формулы численного интегрирования вида

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k). \qquad (5.51)$$

Их получали путём замены подынтегрального выражения интерполяционным многочленом Лагранжа. Но возможны и другие способы их построения. В связи с этим рассмотрим следующий вопрос.

Функционалу $\int_a^b f(x)dx$ поставим в соответствие последовательность функционалов $L_n(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$, где $c_k^{(n)}$ выбираются из некоторой бесконечной треугольной матрицы C, а $x_k^{(n)}$ – из другой заданной треугольной матрицы X

$$C = \begin{cases} c_1^{(1)} & & & \\ c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & & \\ c_1^{(3)} & c_2^{(3)} & c_3^{(3)} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}, \quad X = \begin{cases} x_1^{(1)} & & & \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{cases}.$$

Предполагается, что все $x_k^{(n)} \in [a,b]$.

При каких условиях, наложенных на $c_k^{(n)}$ и $x_k^{(n)}$, для любой непрерывной функции $f(x)$ на $[a,b]$ будет иметь место $\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \int_a^b f(x)dx$? Сформулируем следующую теорему.

Теорема 11. Для того чтобы $L_n(f) \to \int_a^b f(x)dx$ при $n \to \infty$ для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$, необходимо и

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

достаточно чтобы это имело место для любого многочлена и чтобы $\sum_{k=1}^{n} | c_k^{(n)} | < M$ для любого n.

Доказательство. Достаточность. При этом будем ссылаться на следующую теорему Вейерштрасса: для любой непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой многочлен $P(x)$, что $| f(x) - P(x) | < \varepsilon$ при любом $x \in [a,b]$.

Рассмотрим разность

$$\int_a^b f(x)dx - L_n(f) = \int_a^b [f(x)dx - P(x)] + \left[\int_a^b P(x)dx - L_n(P) \right] - L_n(f - P). \quad (5.52)$$

В силу теоремы Вейерштрасса можно найти такой многочлен $P(x)$, что $| f(x) - P(x) | < \varepsilon$ при $x \in [a,b]$.

Пусть $P(x)$ в (5.52) и будет таким многочленом. Тогда абсолютная величина первого члена правой части не может превышать $\varepsilon(b-a)$. В силу первого условия доказываемой теоремы второе слагаемое в (5.52) при достаточно большом n может быть сделано меньше ε по абсолютной величине. Далее,

$$L_n(f - P) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} [f(x_k^{(n)}) - P(x_k^{(n)})].$$

Таким образом,

$$L_n(f - P) \le \sum_{k=1}^{n} | c_k^{(n)} | | [f(x_k^{(n)}) - P(x_k^{(n)})] | \le \varepsilon M,$$

отсюда следует

$$| \int_a^b f(x)dx - L_n(f) | \le \varepsilon(b - a + 1 + M),$$

и может быть сделано сколь угодно малой величиной. Достаточность доказана.

Необходимость. Необходимость первого условия очевидна, так как многочлены являются непрерывными функциями (т.к. если процесс сходится для любой непрерывной функции, то он должен схо-

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

диться и для всякого многочлена ввиду его непрерывности). Поэтому докажем необходимость только второго условия. Сделаем это от противного.

Пусть $\sum_{k=1}^{n} | c_k^{(n)} |$ не ограничены. Для каждого n построим функцию $\varphi_n(x)$, со следующими свойствами

1. $\varphi_n(x_k^{(n)})$ равно +1, если $c_k^{(n)} > 0$ и равно -1, если $c_k^{(n)} < 0$;
2. $\varphi_n(x)$ – непрерывная функция;
3. $|\varphi_n(x)| \le 1$.

Очевидно,

$$L_n(\varphi_n) = \sum_{k=1}^{n} | c_k^{(n)} | = M_n . \qquad (5.53)$$

Возьмём некоторую из построенных нами функций $\varphi_{n_1}(x)$. Для неё должно иметь место

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\varphi_{n_1}(x)) = \int_a^b \varphi_{n_1}(x)dx .$$

Но $|\varphi_n(x)| \le 1$. Следовательно, $\int_a^b \varphi_{n_1}(x)dx \le b-a$ и найдётся такое N_1, что при $n > N_1$ будет

$$| L_n(\varphi_{n_1}(x)) | < e(b-a) ,$$

здесь e – основание натуральных логарифмов.

Далее, найдётся такое $n_2 \ge N_1$, что $M_{n_2} > 2\cdot 2!$. Рассмотрим функцию

$$\psi_2(x) = \frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!} .$$

Она непрерывна. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} L_n\left[\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}\right] = \int_a^b \left[\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}\right]dx .$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Но

$$\left|\int_a^b \left[\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!}+\frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}\right]dx\right| \le \left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)(b-a) < (e-1)(b-a)\ .$$

Поэтому найдётся такое N_2, что при $n > N_2$ будет

$$\left|L_n\left[\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!}+\frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}\right]\right| < e(b-a)\,.$$

Найдём такое $n_3 > N_2$, что $M_{n_3} > 3\cdot 3!$ и продолжим наше построение дальше.

Пусть мы уже нашли N_m. Тогда находим $n_{m+1} > N_m$, такое, что $M_{n_{m+1}} > (m+1)\cdot(m+1)!$, и строим функцию

$$\psi_{m+1}(x) = \frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!}+\frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}+\ldots+\frac{\varphi_{n_{m+1}}(x)}{(m+1)!}\ .$$

Она непрерывна. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\psi_{m+1}) = \int_a^b \psi_{m+1}(x)dx\ .$$

Но

$$\left|\int_a^b \psi_{m+1}(x)dx\right| \le \left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+..+\frac{1}{(m+1)!}\right)(b-a) \le (e-1)(b-a)\ .$$

Находим N_{m+1} такое, что при $n > N_{m+1}$

$$\left|L_n(\psi_{m+1})\right| < e(b-a)\,,$$

и продолжим построение дальше.

Таким образом, мы получим ряд

$$\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!}+\frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}+\ldots+\frac{\varphi_{n_m}(x)}{m!}+\ldots.$$

Этот ряд будет равномерно сходиться, и, следовательно, его сумма будет непрерывной функцией. Обозначим её $f(x)$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Возьмём теперь любое натуральное число k и представим $f(x)$ в виде

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}+\frac{\varphi_{n_k}(x)}{k!}+\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}.$$

При этом

$$L_{n_k}(f)=L_{n_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right)+L_{n_k}\left(\frac{\varphi_{n_k}(x)}{k!}\right)+L_{n_k}\left(\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right). \qquad (5.54)$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Так как $n_k > N_{k-1}$, то

$$\left|L_{n_k}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right)\right| < e(b-a). \qquad (5.55)$$

Далее,

$$\left|\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right| \le \sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i!}=\frac{1}{(k+1)!}\left[1+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}+\ldots\right]\le$$

$$\le\frac{1}{(k+1)!}\left[1+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\ldots\right]\le\frac{1}{(k+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{k+2}}=$$

$$=\frac{k+2}{(k+1)!(k+1)}<\frac{k+1}{(k+1)!k}=\frac{1}{k\cdot k!}.$$

Таким образом,

$$\left|L_{n_k}\left(\sum_{i=k+1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right)\right| < \frac{1}{k\cdot k!}M_{n_k}. \qquad (5.56)$$

Функционал от среднего члена будет равен (см.(5.53))

$$L_{n_k}\left(\frac{\varphi_{n_k}(x)}{k!}\right)=\frac{M_{n_k}}{k!}. \qquad (5.57)$$

Сопоставляя соотношения (5.54), (5.55), (5.56), (5.57), получим

$$L_{n_k}(f)>\frac{M_{n_k}}{k!}-\frac{M_{n_k}}{k\cdot k!}-e(b-a).$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Но $M_{n_k} > k \cdot k!$, следовательно,

$$L_{n_k}(f) > k \cdot k!\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{k \cdot k!}\right) - e(b-a) = k - 1 - e(b-a).$$

Но последнее выражение неограниченно возрастает с возрастанием k. Поэтому $L_{n_k}(f)$ не может стремиться к $\int_a^b f(x)dx$. Пришли к противоречию. Теорема доказана.

2 Замечания о применимости теоремы

Для интерполяционно-квадратурных процессов сходимость, наверняка, имеет место для любого многочлена и первое условие теоремы можно опустить. Далее, беря $f(x) = 1$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} = \int_a^b dx = b - a.$$

Поэтому, если все $c_k^{(n)}$ положительны, то и второе условие теоремы будет выполнено. Это и имело место в формулах Гаусса. Поэтому квадратурный процесс по формулам Гаусса всегда сходится.

При изучении формул Ньютона-Котеса мы видели, что у них имеются отрицательные коэффициенты. И можно показать, что для формул Ньютона-Котеса условие $\sum_{k=1}^{n} |c_k^{(n)}| < M$ не выполнено.

3 Сходимость интерполяционных квадратур

В таких квадратурных формулах коэффициенты $c_k^{(n)}$ вычисляются по узлам $x_k^{(n)}$ при помощи равенств

$$c_k^{(n)} = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k^{(n)})\omega'(x_k^{(n)})} dx, \quad k = 1,2,\ldots,n,$$

а матрица коэффициентов C определяется по матрице узлов X.

Поэтому нужно выяснить, как должны быть связаны между собой матрица узлов X и класс F функций $f(x)$, чтобы процесс сходился?

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Рассмотрим простейшую теорему, дающую достаточное условие сходимости.

Теорема 12. Пусть отрезок $[a,b]$ конечный и весовая функция $p(x)$ абсолютно интегрируема на $[a,b]$. Если функция $f(x)$ и таблица узлов X таковы, что интерполяционный процесс сходится к $f(x)$ равномерно относительно x на отрезке $[a,b]$, то интерполяционный квадратурный процесс

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n(f)$$

сходится при $n \to \infty$ к точному значению интеграла.

Доказательство. Обозначим $r_n(x)$ погрешность интерполирования функции $f(x)$ по значениям в узлах $x_k^{(n)}$, ($k = 1,2,...,n$). Погрешность приближённой квадратуры связана с $r_n(x)$ равенством

$$R_n(f) = \int_a^b r_n(x)p(x)dx.$$

Так как по условию теоремы $r_n(x)$ равномерно на отрезке $[a,b]$ стремится к 0 при $n \to \infty$, то можно перейти к пределу под знаком интеграла, значит,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = 0.$$

Теорема доказана.

О сходимости формул Чебышева при $p(x) \equiv 0$ вопрос ставить нельзя, так как при $n \geq 10$ таких формул не существует.

Тема 6 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Лекция 1 Метод последовательных приближений.

1 Основные виды линейных интегральных уравнений.
2 Теорема Фредгольма.
3 Метод последовательных приближений.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1 Основные виды линейных интегральных уравнений

Под **интегральным уравнением** понимается уравнение, содержащее неизвестную функцию $y(x)$ под знаком определенного интеграла. Интегральное уравнение будет **линейным**, если неизвестная функция входит в него лишь в первой степени.

Уравнение вида

$$\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \tag{6.1}$$

где $K(x,s)$ – ядро и $f(x)$ – известные функции, называется **интегральным уравнением Фредгольма первого рода**.

Уравнение вида

$$y(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \tag{6.2}$$

где $K(x,s)$ – ядро и $f(x)$ – известные функции, а λ – числовой параметр, называется **интегральным уравнением Фредгольма второго рода**.

Параметр λ вводится по следующим соображениям: при некотором данном значении λ интегральное уравнение (6.2) не всегда имеет решения. Варьируя параметр λ можно добиться того, чтобы решение уравнения (6.2) существовало. Параметр λ можно также ввести в левую часть уравнения Фредгольма первого рода (6.1).

Если в уравнении (6.2) $f(x) \equiv 0$, то получается *однородное* уравнение

$$y(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds, \tag{6.3}$$

допускающее нулевое решение $y \equiv 0$. Значения параметра λ, при которых однородное интегральное уравнение (6.3) имеет ненулевые решения, называются **собственными значениями** (числами) ядра $K(x,s)$ или соответствующего уравнения (6.2), а отвечающие им ненулевые решения называются **собственными функциями**.

2 Теорема Фредгольма

На вопрос о разрешимости интегральных уравнений дает следующая **теорема Фредгольма**:

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

1) если λ не является собственным значением ядра $K(x,s)$, то соответствующее неоднородное интегральное уравнение Фредгольма (6.2) с регулярным ядром $K(x,s)$ и непрерывным свободным членом $f(x)$ имеет единственное непрерывное решение $y(x)$, $x \in [a,b]$;

2) если же λ является собственным значением, то уравнение (6.2) или не имеет решений, или же имеет их бесконечное множество.

В приложениях важную роль играют уравнения Фредгольма второго рода с **симметрическим ядром** $K(x,s)$: $K(x,s) = K(s,x)$. Симметрические ядра обладают следующими **свойствами**

1. Для всякого симметрического ядра существует, по меньшей мере, одно собственное значение.

2. Все собственные значения симметрического ядра действительны.

3. Собственные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ симметрического ядра, соответствующие различным собственным значениям λ и μ $(\lambda \neq \mu)$, ортогональны между собой на $[a,b]$

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0 .$$

В приложениях встречаются также интегральные уравнения вида

$$\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \tag{6.4}$$

и

$$y(x) - \lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \tag{6.5}$$

которые называются **интегральными уравнениями Вольтерра** соответственно первого и второго рода. Если ввести функцию

$$K^*(x,s) = \begin{cases} K(x,s), & при \;\; a \le s \le x \\ 0, & при \;\; s > x \end{cases},$$

то уравнения Вольтерра можно записать в виде соответствующих уравнений Фредгольма с ядром $K^*(x,s)$. Таким образом, теория уравнений Вольтерра сводится к теории уравнений Фредгольма, однако в некоторых случаях уравнения Вольтерра полезно изучать независимо.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

В дальнейшем будем изучать интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода поэтому, для краткости, их будем именовать просто уравнениями Фредгольма и Вольтерра. Основными задачами будут

1. Нахождение приближенного или точного решения неоднородного интегрального уравнения при заданном значении параметра λ.

2. Нахождение собственных значений и соответствующих собственных функций однородного интегрального уравнения.

3 Метод последовательных приближений

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода (6.2)

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds, \tag{6.6}$$

где $f(x)$ и $K(x,s)$ непрерывны.

Будем искать решение в форме степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x). \tag{6.7}$$

Подставляя выражение (6.7) в уравнение (6.6) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра λ, будем иметь следующие равенства

$$\begin{aligned} &\varphi_0(x) = f(x), \\ &\varphi_n(x) = \int_a^b K(x,s)\varphi_{n-1}(s) ds, \quad n = 1,2,\ldots . \end{aligned} \tag{6.8}$$

Пусть $|K(x,s)| \le M$ и $|f(x)| \le N$ в области $R\ \{a \le x \le b,\ a \le s \le b\}$. Из формул (6.8) по индукции получаем $|\varphi_n(x)| \le M^n N (b-a)^n$. Поэтому сходимость ряда (6.7) будет обеспечена, если

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}.$$

Приняв

$$y(x) \approx y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k \varphi_k(x),$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

получим приближенное решение интегрального уравнения (6.6) с погрешностью

$$\varepsilon_n = | y(x) - y_n(x) | \le \sum_{k=n+1}^{\infty} | \lambda |^k | \varphi_k(x) | \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} N[M(b-a) | \lambda |]^k = \frac{N[M(b-a) | \lambda |]^{n+1}}{1 - M(b-a) | \lambda |} .$$

Формула (6.7) дает аналитическое относительно λ решение уравнения Фредгольма (6.6) в окрестности точки $\lambda = 0$. Из формул (6.8) следует, что решение (6.7) можно записать в виде

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_a^b K_n(x,s) f(s) ds$$

или

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s,\lambda) f(s) ds , \qquad (6.9)$$

где

$$R(x,s,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x,s) . \qquad (6.10)$$

Коэффициенты $K_n(x,s)$ называются **итерированными ядрами** и могут быть последовательно найдены по формулам

$$K_1(x,s) = K(x,s),$$

$$K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t) K_{n-1}(t,s) dt, \quad n = 2,3,... .$$

Функция $R(x,s,\lambda)$ называется **резольвентой** уравнения (6.6) и при малых $| \lambda |$ определяется степенным рядом (6.10). Пользуясь аналитическим продолжением резольвенту $R(x,s,\lambda)$ можно продолжить на всю комплексную плоскость параметра λ, за исключением собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, ...$ (особые точки), которые являются полюсами резольвенты. Тогда формула (6.9) дает решение интегрального уравнения (6.6) при любом $\lambda \ne \lambda_k$, $(k = 1,2,...)$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Лекция 2 Решение интегральных уравнений

1 Метод конечных сумм.
2 Метод вырожденных ядер.
3 Приемы построения вырожденных ядер.

1 Метод конечных сумм

Метод основывается на приближенном вычислении определенного интеграла с помощью некоторой квадратурной формулы

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i F(x_i) + R[F], \quad i = 1,2,...,n. \qquad (6.11)$$

Здесь x_i – абсциссы точек отрезка $[a,b]$, A_i – числовые коэффициенты, не зависящие от выбора функции $F(x)$, $R[F]$ – остаточный член формулы. Обычно A_i известны и $\sum_{i=1}^{n} A_i = b - a$.

Например, в случае равноотстоящих точек $x_i = a + (i-1)h$, где $h = \dfrac{b-a}{n-1}$, будем иметь

1. Для формулы прямоугольников

$$A_i = h, \quad i = 1,2,...,n-1, \quad A_n = 0.$$

2. Для общей формулы трапеций

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, \quad A_2 = A_3 = ... = A_{n-1} = h.$$

3. Для общей формулы Симпсона при $n = 2m+1$

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}; \quad A_2 = A_4 = ... = A_{2m} = \frac{4h}{3}; \quad A_3 = A_5 = ... = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}.$$

Пусть дано интегральное уравнение (6.2)

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x). \qquad (6.12)$$

Возьмем точки $x_i \in [a,b]$ и обозначим $y(x_i) = y_i$, $K(x_i, y_i) = K_{ij}$,

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$f(x_i) = f_i, \quad i, j = 1,2,...,n$.

На основании формулы (6.11) будем иметь

$$y_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i K_{ij} y_j = f_i + R_i, \quad i = 1,2,...,n, \qquad (6.13)$$

где R_i – соответствующие ошибки. Отбрасывая в системе (6.13) погрешности R_i, для приближенных значений y_i решения $y(x)$ в узлах x_i получим линейную алгебраическую систему

$$y_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1,2,...,n. \qquad (6.14)$$

Если определитель $\Delta(\lambda)$ этой системы отличен от нуля, то система (6.14) имеет единственное решение y_i, которое можно найти, например, методом Гаусса. Найдя y_i для решения $y(x)$, получаем из (6.12) приближенное аналитическое выражение

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i K(x, x_j) y_j. \qquad (6.15)$$

Различные между собой корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, $(m \le n)$ алгебраического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ представляют собой приближения собственных значений ядра $K(x,s)$. Если Y_{ik}^l, $i = 1,2,...,n$; $k = 1,2,...,m$; $l = 1,2,...,p_k$ – соответствующие ненулевые решения однородной системы для (6.14), то собственные функции ядра приближенно определяются формулами

$$\varphi_{kl}(x) = \lambda_k \sum_{j=1}^{n} A_j K(x, x_j) Y_{jk}^l, \quad k = 1,2,...,m; \quad l = 1,2,..., p_k.$$

Метод конечных сумм может быть применен также к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x).$$

В этом случае приближенные значения y_i решения $y(x)$ в узлах x_i будут определяться из системы

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\lambda\sum_{i=1}^{n} A_i K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1,2,...,n. \qquad (6.16)$$

Особенно просто применение метода конечных сумм для решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$y(x) - \lambda\int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \; a \le x \le b,$$

которое можно рассматривать как уравнение Фредгольма второго рода. Здесь $K_{ij} = 0$ при $j > i$ и, следовательно, соответствующая система (6.14) имеет вид

$$y_i - \lambda\sum_{i=1}^{i} A_i K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1,2,...,n. \qquad (6.17)$$

Получилась линейная система с треугольной матрицей. Если $1 - \lambda A_i K_{ii} \ne 0$, то из системы (6.17) последовательно находим

$$y_1 = f_1(1 - \lambda A_1 K_{11})^{-1}$$
$$y_2 = (f_2 + \lambda A_1 K_{21} y_1)(1 - \lambda A_2 K_{22})^{-1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y_n = (f_n + \lambda\sum_{j=1}^{n-1} A_j K_{ij} y_j)(1 - \lambda A_n K_{nn})^{-1}.$$

2 Метод вырожденных ядер

Ядро $K(x,s)$ называется **вырожденным**, если оно может быть представлено в виде конечной суммы парных произведений

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_i(s), \qquad (6.18)$$

где функции $\alpha_i(x)$ и $\beta_i(s)$, $i = 1,2,...,n$, являются линейно независимыми.

Подставим (6.18) в интегральное уравнение Фредгольма второго рода

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds . \qquad (6.19)$$

Для интегрального уравнения (6.19) с **вырожденным** ядром $K(x,s)$ – будем иметь

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i(x) , \qquad (6.20)$$

где

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds, \quad i = 1,2,...,n \qquad (6.21)$$

некоторые постоянные коэффициенты. Подставим (6.20) в выражение (6.21). Теперь для определения коэффициентов c_i имеем алгебраическую систему линейных уравнений

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds + \lambda \int_a^b \beta_i(s) \sum_{j=1}^{n} c_j \alpha_j(s) ds, \quad i = 1,2,...,n$$

или

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} c_j \gamma_{ij} = f_i , \qquad (6.22)$$

где

$$f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds, \quad \gamma_{ij} = \int_a^b \alpha_i(s) \beta_j(s) ds . \qquad (6.23)$$

Систему (6.22) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \lambda \gamma_{ji}) c_j = f_i , \quad i = 1,2,...,n ,$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & если\ i \neq j \\ 1, & если\ i = j \end{cases}$ – символ Кронекера. Обозначим через $\Delta(\lambda)$ определитель последней системы

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\Delta(\lambda) = \det(\delta_{ij} - \lambda\gamma_{ji}) \equiv \begin{vmatrix} 1-\lambda\gamma_{11} & -\lambda\gamma_{21} & \dots & -\lambda\gamma_{n1} \\ -\lambda\gamma_{12} & 1-\lambda\gamma_{22} & \dots & -\lambda\gamma_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\gamma_{1n} & -\lambda\gamma_{2n} & \dots & 1-\lambda\gamma_{nn} \end{vmatrix}$$

и через $\Delta_{ij}(\lambda),\ i, j = 1,2,\dots,n$ – алгебраические дополнения соответствующих элементов $\delta_{ij} - \lambda\gamma_{ji}$ определителя $\Delta(\lambda)$.

Если $\Delta(\lambda) \neq 0$, то на основании правила Крамера, находим значения коэффициентов

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Delta_{ji}(\lambda) f_j}{\Delta(\lambda)}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Следовательно, в силу (6.20) интегральное уравнение (6.19) имеет единственное решение

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} f_j \alpha_i(x). \qquad (6.24)$$

Отсюда, подставляя вместо f_j соответствующее выражение из (6.23) и заменяя сумму интегралов интегралом суммы, получим

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{\Delta(x,s,\lambda)}{\Delta(\lambda)} f(s)ds, \qquad (6.25)$$

где

$$\Delta(x,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_j(s)\Delta_{ji}(\lambda).$$

Их формулы (6.25) вытекает, что функция

$$R(x,s,\lambda) = \frac{\Delta(x,s,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i(x)\beta_j(s)\frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \qquad (6.26)$$

является **резольвентой** интегрального уравнения (6.19).

Собственные значения ядра $K(x,s)$ определяются из уравнения

$$\Delta(\lambda) = 0. \qquad (6.27)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Если λ_k, $k = 1,2,...,m,\ m \le n$ является корнем уравнения (6.27) ($\lambda_k \ne 0$), то соответствующие собственные функции $\varphi_k(x)$ ядра $K(x,s)$, то есть нетривиальные решения однородного уравнения, соответствующего (6.19), будут иметь вид

$$\varphi_k(x) = \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i^{(k)} \alpha_i(x),$$

где $\bar{c}_i^{(k)}$ – ненулевые решения линейной однородной системы

$$\sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - \lambda_k \gamma_{ji}) \bar{c}_j^{(k)} = 0, \quad i = 1,2,...,n.$$

Если $\lambda = \lambda_k$ является собственным значением ядра $K(x,s)$, то неоднородное уравнение (6.19) или не имеет решений или имеет их бесконечно много.

Для приближенного решения **общего** интегрального уравнения

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds, \qquad (6.28)$$

функции $f(x)$ и $K(x,s)$ будем считать непрерывными. Ядро $K(x,s)$ заменим близким к нему вырожденным ядром

$$K^{(n)}(x,s) = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m(x) \beta_m(s).$$

3 Приемы построения вырожденных ядер

Укажем несколько способов такой замены.

Если ядро $K(x,s)$ аналитическое по x на отрезке $[a,b]$, то в качестве вырожденного ядра $K^{(n)}(x,s)$ можно взять конечный отрезок ряда Тейлора

$$K^{(n)}(x,s) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(x - x_0)^m}{m!} K_{x^m}^{(m)}(x_0, s),$$

где x_0 – некоторая точка отрезка $[a,b]$.

Аналогичный прием можно применить также, если ядро $K(x,s)$ является аналитической функцией по s на отрезке $[a,b]$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Для построения вырожденного ядра можно также использовать конечный отрезок двойного ряда Тейлора

$$K^{(n)}(x,s)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}a_{pm}(x-x_0)^p(x-x_0)^m\ ,$$

где

$$a_{pm}=\frac{1}{p!m!}\frac{\partial^{p+m}}{\partial x^p\partial x^m}K(x_0,s_0),\quad x_0,s_0\in[a,b]\,.$$

Пусть $l=b-a$. Непрерывное ядро $K(x,s)$ допускает аппроксимацию тригонометрическим полиномом периода $2l$. Например, можно положить

$$K^{(n)}(x,s)=\frac{a_0(s)}{2}+\sum_{p=1}^{n}a_p(s)\cos\frac{p\pi x}{l}\ , \tag{6.29}$$

где $a_p(s),\ \ p=1,2,...$ – коэффициенты Фурье

$$a_p(s)=\frac{2}{l}\int_a^b K(x,s)\cos\frac{p\pi x}{l}dx\,. \tag{6.30}$$

Аналогичное разложение получается, если поменять местами переменные x и s.

Можно также использовать конечный отрезок двойного ряда Фурье. Полагая, например,

$$a_p(s)\approx\frac{a_{p0}}{2}+\sum_{m=1}^{n}a_{pm}\cos\frac{m\pi s}{l},\quad p=0,1,2,...,n\ ,$$

из формул (6.29) и (6.30) имеем

$$K^{(n)}(x,s)=\frac{a_{00}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}a_{p0}\cos\frac{p\pi x}{l}+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}a_{0m}\cos\frac{m\pi s}{l}+$$

$$+\sum_{p=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}a_{pm}\cos\frac{p\pi x}{l}\cos\frac{m\pi s}{l}\ ,$$

где

$$a_{pm}=\frac{4}{l^2}\int_a^b\int_a^b K(x,s)\cos\frac{p\pi x}{l}\cos\frac{m\pi s}{l}dxds\,.$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Наконец, полагая

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0,1,2,\ldots,n \ ,$$

можно воспользоваться первым интерполяционным полиномом Ньютона по переменной x

$$K^{(n)}(x,s) = K(x_0,s) + \sum_{m=1}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})}{m!h^m} \Delta^m K(x_0,s) .$$

Аналогично можно взять первый интерполяционный полином Ньютона по переменной s.

Иногда целесообразно использовать интерполяционный полином Ньютона для функций двух переменных

$$K^{(n)}(x,s) = K(x_0,s_0) + \sum_{p+m=1}^{p+m=n} \frac{\Delta^{P+m}_{x^p s^m} K(x_0,s_0)}{p!m!h^{p+m}} (x-x_0) \cdot$$
$$\cdot (x-x_1)\ldots(x-x_{p-1})(s-s_0)\ldots(s-s_{m-1}) \ ,$$

где $x_0, s_0 \in [a,b]$.

Если $K^{(n)}(x,s)$ является приближенным вырожденным ядром для ядра $K(x,s)$ и функция $f_n(x)$ близка к функции $f(x)$, то решение $z_n(x)$ интегрального уравнения

$$z_n(x) = f_n(x) + \lambda \int_a^b K^{(n)}(x,s) y_n(s) ds \qquad (6.31)$$

можно рассматривать как приближение решения $y(x)$ уравнения (6.28).

О единственности решения и погрешности интегрального уравнения, как показали Л.В.Канторович и В.И.Крылов, справедлива следующая теорема.

Теорема 13. Пусть

$$\int_a^b | K(x,s) - K^{(n)}(x,s) | \, ds \le \varepsilon, \quad | f(x) - f_n(x) | \le \delta$$

и резольвента $R_n(x,s,\lambda)$ для уравнения (6.31) такова, что

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\int_a^b |R_n(x,s,\lambda)|\,ds \le M_n(\lambda)$$

при $x \in [a,b]$, причем выполнено неравенство $q = |\lambda|\varepsilon[1+|\lambda| M_n(\lambda)] < 1$, тогда уравнение (6.28) имеет единственное решение $y(x)$ и имеет место оценка

$$|y(x) - z_n(x)| \le \frac{Nq[1+|\lambda| M_n(\lambda)]}{1-q} + \delta\,, \qquad (6.32)$$

где $N \ge \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

Из оценки (6.32) вытекает, что если $K^{(n)}(x,s) \to K(x,s)$ и $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$, причем $M_n(\lambda) \le M(\lambda) < \infty$, то $z_n(x) \to y(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Лекция 3 Решение интегральных уравнений Фредгольма

1 Метод коллокации.
2 Метод наименьших квадратов.
3 Метод моментов.

1 Метод коллокации

Рассмотрим интегральное уравнение

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds - f(x) = 0\,. \qquad (6.33)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде функции определенного вида

$$y_n = \Phi(x, c_1, c_2, ..., c_n) \qquad (6.34)$$

со свободными параметрами (неопределенными коэффициентами) $c_1, c_2, ..., c_n$. Подставляя выражение (6.34) в уравнение (6.33), получим невязку

$$R[y_n] = y_n(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)y_n(s)ds - f(x)\,. \qquad (6.35)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Если y является точным решением, невязка $R[y]=0$. Поэтому стараются подобрать параметры $c_1, c_2, ..., c_n$ так, чтобы невязка $R[y_n]$ была как можно малой величиной. Минимизировать невязку $R[y_n]$ можно различными способами. Здесь будут рассмотрены те методы минимизации невязки, которые применяются на практике.

Сначала сделаем несколько **замечаний**. Если невязка $R[y_n]$ получилась малой, то она близка к невязке $R[y]=0$, даваемой точным решением y. Но если два оператора $R[y_n]$ и $R[y]$ имеют близкие значения, то отсюда не следует, что функции y_n и y близки между собой в обычном смысле (например, равномерного приближения). Поэтому возникает задача, в которой по известной невязке $R[y_n]$ требуется оценить погрешность $|y-y_n|$ приближенного решения y_n. Другая задача, с которой обычно сталкиваются – это вопрос о сходимости y_n к точному решению y при $n\to\infty$, то есть выяснение условий, при которых имеет место предельное равенство $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Если это равенство справедливо, то данным методом решение y можно найти с любой степенью точности, взяв достаточно большое количество параметров $c_1, c_2, ..., c_n$.

Для построения приближенного решения y_n обычно берут функцию, линейно зависящую от неизвестных $c_1, c_2, ..., c_n$. Поэтому положим

$$y_n = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x), \tag{6.36}$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ – известные линейно независимые координатные функции и $c_1, c_2, ..., c_n$ – неопределенные коэффициенты. Подставляя (6.36) в левую часть уравнения (6.33), получим невязку

$$R[y_n] = y_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)[\varphi_0(s) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(s)]ds,$$

или

$$R[y_n] = \psi_0(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x,\lambda), \tag{6.37}$$

где

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$\psi_0(x,\lambda) = \varphi_0(x) - f(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_0(s)ds\ ,$$

$$\psi_i(x,\lambda) = \varphi_i(x) - f(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds, \quad i = 1,2,...,n\ .$$

Согласно методу **коллокации** требуется, чтобы невязка $R[y_n]$ обращалась в нуль в заданной системе точек x_j, $j = 1,2,...,n$ из отрезка $[a,b]$ (точки коллокации), то есть, полагаем

$$R[y_n(x_j)] = 0, \quad j = 1,2,..,n, \quad a \le x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n \le b\ .$$

Отсюда на основании формулы (6.37) для определения коэффициентов $c_1, c_2,..., c_n$ получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i(x_j,\lambda) = -\psi_0(x_j,\lambda), \quad j = 1,2,...,n\ . \qquad (6.38)$$

Если определитель системы (6.38) $\Delta(\lambda)$ отличен от нуля, то из нее можно однозначно определить величины $c_1, c_2,..., c_n$, и, следовательно, по формуле (6.36) найти приближенное решение y_n. Из уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ можно найти приближенные значения $\tilde{\lambda}_k$, $k = 1,2,...,n$ первых собственных чисел ядра $K(x,s)$.

Если положить $f(x) \equiv 0$, $\varphi_0(x) \equiv 0$, $\lambda = \tilde{\lambda}_k$, то вместо системы (6.38) будем иметь однородную систему

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i^{(k)}\psi_i(x_j,\tilde{\lambda}_k) = 0, \quad j = 1,2,...,n\ .$$

Найдя ненулевые решения $\tilde{c}_i^{(k)}$ этой системы, получим для ядра $K(x,s)$ приближенные собственные функции

$$\tilde{y}_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i^{(k)}\varphi_i(x)\ ,$$

отвечающие его собственному значению $\lambda_k \approx \tilde{\lambda}_k$.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

2 Метод наименьших квадратов

Для уравнения

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds - f(x) = 0\,, \qquad (6.39)$$

аналогично методу коллокации, полагаем

$$y_n = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)\,, \qquad (6.40)$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ – известные линейно независимые координатные функции и $c_1, c_2, ..., c_n$ – неопределенные коэффициенты. Подставляя (6.40) в левую часть уравнения (6.39), получим невязку

$$R[y_n] = \psi_0(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x,\lambda)\,,$$

где

$$\psi_0(x,\lambda) = \varphi_0(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_0(s)ds\,,$$

$$\psi_i(x,\lambda) = \varphi_i(x) - f(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds\,.$$

Согласно методу **наименьших квадратов** коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_n$ отыскиваются из условия минимума интеграла

$$I = \int_a^b \{R[y_n]\}^2 dx = \int_a^b [\psi_0(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x,\lambda)]^2 dx\,. \qquad (6.41)$$

Это требование приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial c_j} = 0, \quad j = 1,2,...,n\,.$$

Отсюда, на основании (6.41), дифференцируя по параметрам $c_1, c_2, ..., c_n$ под знаком интеграла, будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial c_j} = \int_a^b \psi_i(x,\lambda)[\psi_0(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(x,\lambda)]dx = 0\,. \qquad (6.42)$$

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Обозначим

$$(\psi_i, \psi_j) = \int_a^b \psi_i(x,\lambda)\psi_j(x,\lambda)dx .$$

Тогда систему (6.42) можно записать в виде нормальной системы метода наименьших квадратов

$$\begin{cases} c_1(\psi_1,\psi_1) + c_2(\psi_1,\psi_2) + \ldots + c_n(\psi_1,\psi_n) = -(\psi_1,\psi_0) \\ c_2(\psi_2,\psi_1) + c_2(\psi_2,\psi_2) + \ldots + c_n(\psi_2,\psi_n) = -(\psi_2,\psi_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n(\psi_n,\psi_1) + c_2(\psi_n,\psi_2) + \ldots + c_n(\psi_n,\psi_n) = -(\psi_n,\psi_0) . \end{cases} \tag{6.43}$$

Заметим, что если $\varphi_0(x) \equiv 0$, то $\psi_0(x) = -f(x)$ и, следовательно, $-(\psi_i,\psi_0) = (\psi_i, f)$.

Вместо интегрального способа метода наименьших квадратов можно воспользоваться точечным способом наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов применяется также для приближенного нахождения собственных значений и собственных функций ядра $K(x,s)$, аналогично тому, как это делается в методе коллокации. А именно, полагая $f(x) \equiv 0$ и $\varphi_0(x) \equiv 0$, откуда $\psi_0(x) \equiv 0$, находим приближенные значения собственных чисел из алгебраического уравнения $\det[(\psi_i,\psi_j)] = 0$. После этого приближенные собственные функции находятся из однородной системы (6.43), где вместо λ подставлено соответствующее приближенное значение.

3 Метод моментов

Пусть

$$R[y] \equiv y(x) - \lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds - f(x) = 0 . \tag{6.44}$$

Аналогично предыдущему пункту, приближенное решение этого уравнения будем искать в виде конечной суммы

$$y_n = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(x) , \tag{6.45}$$

где $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – известные линейно независимые координатные функции и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – неопределенные коэффициенты. Подставляя (6.45) в левую часть уравнения (6.44), получим невязку

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

$$R[y_n] = \sum_{j=1}^{n} c_j [\varphi_j(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_j(s)ds] - \lambda \int_a^b K(x,s) f(s)ds . \quad (6.46)$$

Согласно методу **моментов** коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_n$ определяются из условия ортогональности невязки ко всем координатным функциям $\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$. Это дает систему уравнений

$$\int_a^b R[y_n]\varphi_i(x)dx = 0, \quad i = 1,2,...,n .$$

Учитывая (6.46), получим

$$\sum_{j=1}^{n} c_j(\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij}) = \lambda\gamma_i, \quad i = 1,2,...,n , \quad (6.47)$$

где

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x) f(x)dx, \quad \beta_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)dx \int_a^b K(x,s)\varphi_j(s)ds ,$$

$$\gamma_i = \int_a^b \varphi_i(x)dx \int_a^b K(x,s) f(s)ds .$$

Если определитель системы (6.47) $\Delta(\lambda) = \det(\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij})$ отличен от нуля, то из этой системы однозначно определяются коэффициенты $c_1, c_2, ..., c_n$. Тогда формула (6.45) дает приближенное решение интегрального уравнения (6.44). Из уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ приближенно находятся собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ядра $K(x,s)$. Найдя ненулевые решения однородной линейной системы

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j(\alpha_{ij} - \lambda\beta_{ij}) = 0, \quad i = 1,2,...,n ,$$

легко строятся (см. например, метод вырожденных ядер) приближенные собственные функции $\tilde{y}^{(k)}(x)$, отвечающие данному собственному значению λ_k.

Отметим, что рассмотренные здесь методы минимизации невязки применимы также к решению нелинейных интегральных уравнений. Имеются также другие методы решения интегральных уравнений, например, метод Монте-Карло.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

ЛИТЕРАТУРА

1 Березин, И.С. Методы вычислений: в 2 т. Т.1. [Текст] / И.С.Березин, Н.П.Жидков. – М.: Наука, 1966. – 630с.

2 Демидович, Б.П. Численные методы анализа [Текст] / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368с.

3 Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики [Текст] / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1970. – 664с.

4 Самарский, А.А. Введение в численные методы [Текст] / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 271с.

5 Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1973. – 632с.

6 Крылов, В.И. Вычислительные методы: в 2 т. Т.1. [Текст] / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – М.: Наука, 1976. – 304с.

7 Крылов, В.И. Вычислительные методы: в 2 т. Т.2. [Текст] / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный. – М.: Наука, 1977. – 400с.

8 Сборник задач по методам вычислений [Текст] / под ред. П.И. Монастырного. – Мн.: БГУ, 1983. – 287с.

9 Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах [Текст] / А.В. Петров [и др.]. – М.: Высшая школа, 1984. – 320с.

10 Фурунжиев, Р.И. Применение математических методов и ЭВМ [Текст] / Р.И. Фурунжиев, Ф.М. Бабушкин, В.В. Варавко. – Мн.: Выш. шк., 1988. – 191с.

11 Калиткин, Н.Н. Численные методы [Текст] / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512с.

12 Воробьева, Г.Н. Практикум по вычислительной математике [Текст] / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. – М.: Высш. школа, 1990. – 208с.

13 Заварыкин, В.М. Численные методы [Текст] / В.М. Заварыкин, В.Г. Житомирский, М.П. Лапчик. – М.: Просвещение, 1991.

14 Амосов, А.А. Вычислительные методы для инженеров [Текст] / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копчёнова. – М.: Высш. школа, 1994.

15 Быкадоров, Ю.А. Информатика и вычислительная математика [Текст] / Ю.А. Быкадоров, А.Т. Кузнецов, А.И. Шербаф. – Мн.: Нар. асвета, 2000. – 334с.

16 Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях [Текст] / Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – М.: Высш. школа, 2000.

ГГУ имени Ф. Скорины

17 Вержбицкий, В.М. Численные методы. Линейная алгебра и нелинейные уравнения [Текст] : учебное пособие для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2000.

18 Вержбицкий, В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : учебное пособие для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2001.

19 Ерофеенко, В.Т. Уравнения с частными производными с приложениями в экономике [Текст] : курс лекций / В.Т. Ерофеенко, И.С. Козловская. – Мн.: БГУ, 2001. – 196с.

20 Численные методы [Текст] : лабораторный практикум. Ч.1 / С.И. Голик [и др.]. М-во образования РБ, Гомельский гос. ун-т им. Ф.Скорины. – Гомель: ГГУ им. Ф.Скорины, 2001. – 60с.

21 Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] : учеб. Пособие для физ.-мат. специальностей вузов / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; под общ. ред. Н.И. Тихонова. – 2-е изд. – М.: Физмалит: Лаб.базовых данных; СПб.: Нев.диалект, 2002. – 630с.

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Учебное издание

Березовская Елена Михайловна

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ

В 2-х частях

Часть 1

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В авторской редакции

Подписано в печать . .2007г. ( ). Формат издания 60x84 1/16.
Бумага писчая №1. Гарнитура «Таймс».
Усл.п.л. 7,6. Уч-изд.л. 5,9. Тираж 30 экз.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
в учреждении образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»,
246019 г. Гомель, ул. Советская, 104

ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ