Ю. В. Малинковский, Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками, *Автомат. и телемех.*, 1991, выпуск 2, 102–110

5. *Keller J. B.* Time-dependent queues // SIAM Review. 1982. V. 24. № 4. P. 401—412.
6. *Parlar M.* Optimal dynamic service rate in time-dependent $M/M/S/N$ queues // International J. Systems Science. 1984. V. 15. № 1. P. 107—118.
7. *Краснов М. Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975.
8. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986.
9. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.

Поступила в редакцию 06.07.89

УДК 519.2 : 65.012.122

Ю. В. МАЛИНКОВСКИЙ, канд. физ.-мат. наук

(Гомельский государственный университет)

СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОБХОДАМИ УЗЛОВ ЗАЯВКАМИ

Рассматриваются открытые и замкнутые сети, в которых заявки, поступающие в узел, независимо от других заявок с вероятностью, зависящей от состояния узла, присоединяются к очереди, либо с дополнительной вероятностью мгновенно переходят в соответствии с матрицей маршрутов в следующий узел, или покидают сеть. Доказывается, что стационарное распределение имеет мультипликативную форму.

1. Введение

Сети массового обслуживания с ограничениями на количество заявок в некоторых группах узлов рассматривались в [1]. Довольно общие модели экспоненциальных сетей с динамическими параметрами обслуживания и маршрутизацией изучены в [2, 3]. Настоящая работа посвящена исследованию экспоненциальной сети с дисциплиной обслуживания, которая включает случаи ограничения количества заявок в узле или ограничения времени ожидания и описывается динамическими параметрами обслуживания и маршрутизацией.

В сетях Джексона [4] стационарное распределение заявок существует только при определенных соотношениях между параметрами, характеризующими сеть. Когда стационарного распределения нет, заявки будут неограниченно долго ожидать своего обслуживания. В то же время в практических ситуациях клиент, попавший в узел, оценивает, сколько времени ему придется ожидать или сколько заявок находится в очереди, и, в зависимости от проведенной оценки, либо остается ожидать, либо переходит в следующий узел. Как будет показано, оба случая можно описать моделью, в которой заявка, поступающая в узел, независимо от других заявок с вероятностью, зависящей от состояния узла, присоединяется к очереди либо с дополнительной вероятностью мгновенно переходит в следующий в соответствии с матрицей маршрутов узел или покидает сеть. При этом в практически важных случаях стационарное распределение существует при любых соотношениях между параметрами сети. Само же оно, как убедимся, имеет, как и для сети Джексона, форму произведения. Аналогичный результат справедлив для соответствующей модификации замкнутой сети Гордона — Ньюэлла [5].

2. Постановка задачи

В сеть, состоящую из N однолинейных узлов, поступает простейший поток заявок интенсивности λ. Каждая заявка входного потока независимо от других заявок с вероятностью p_{0i} направляется в i-й узел $\left(i=\overline{1,N};\ \sum_{i=1}^{N} p_{0i}=1\right)$. Заявка, направленная в i-й узел (извне или с другого узла), с вероятностью $f_{n_i}^{(i)}$, где n_i — число заявок в i-м узле, присоединяется к очереди, а с вероятностью $1-f_{n_i}^{(i)}$ считается мгновенно обслуженной узлом $(0\leqslant f_{n_i}^{(i)}\leqslant 1, i=\overline{1,N})$. Длительности обслуживания заявок в узлах независимы, не зависят от процесса поступления и для i-го узла имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(n_i)$ $(i=\overline{1,N})$. Заявка, обслуженная i-м узлом, независимо от других заявок с вероятностью p_{ij} мгновенно направляется в j-й узел, а с вероятностью p_{i0} покидает сеть $\left(i,j=\overline{1,N};\ \sum_{j=0}^{N} p_{ij}=1\right)$.

Будем предполагать, что матрица $(p_{ij},\ i,j=\overline{0,N})$, где $p_{00}=0$, неприводима. Тогда уравнение трафика

$$\varepsilon_j=p_{0j}+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i p_{ij} \quad (j=\overline{1,N}) \tag{1}$$

имеет единственное решение $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$, для которого $\varepsilon_i>0$ $(i=\overline{1,N})$.

Состояние сети в момент времени t будем характеризовать вектором $n(t)=(n_1(t), n_2(t), \ldots, n_N(t))$, где $n_i(t)$ — число заявок в i-м узле в момент t. Очевидно, $n(t)$ — однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более, чем счетным фазовым пространством $X=Z_1\times Z_2\times\ldots$ $\ldots\times Z_N$, где $Z_i=\{0,1,2,\ldots\}$, если все $f_{n_i}^{(i)}>0$ $(n_i=0, 1, 2, \ldots)$, и $Z_i=\{0, 1, 2, \ldots, K_i\}$, если $f_{n_i}^{(i)}>0$ для $n_i=0, 1, \ldots, K_i-1$, а $f_{K_i}^{(i)}=0$ для некоторого $K_i\geqslant 1$ $(i=\overline{1,N})$.

Цель работы — установить условия эргодичности процесса $n(t)$ и определить его финальное стационарное распределение.

3. Основной результат

Пусть $\varphi_i(n)$ — условная вероятность того, что заявка, поступающая в i-й узел, когда сеть находится в состоянии n, не будет обслужена ни одним из узлов; $\psi_{ij}(n)$ — условная вероятность того, что заявка, поступающая в i-й узел, когда сеть находится в состоянии n, впервые получит обслуживание на j-м узле; $\alpha_i(n)$ — условная вероятность того, что заявка, обслуженная i-м узлом, когда сеть находится в состоянии n непосредственно перед моментом окончания ее обслуживания, не будет больше обслуживаться ни одним из узлов; $\beta_{ij}(n)$ — условная вероятность того, что заявка, обслуженная i-м узлом, когда сеть находится в состоянии n непосредственно перед моментом окончания ее обслуживания, впервые после этого будет обслуживаться j-м узлом $(i, j=\overline{1, N})$:

По формуле полной вероятности

$$\varphi_i(n)=(1-f^{(i)}_{n_i})\left[p_{i0}+\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\varphi_j(n)\right], \quad i=\overline{1,N}, \tag{2}$$

$$\psi_{ij}(n)=f^{(i)}_{n_i}\delta_{ij}+(1-f^{(i)}_{n_i})\sum_{k=1}^{N} p_{ik}\psi_{kj}(n), \quad i,j=\overline{1,N}, \tag{3}$$

$$\alpha_i(n)=p_{i0}+\sum_{j=1}^{N} p_{ij}\varphi_j(n-e_i), \quad i=\overline{1,N}, \tag{4}$$

$$\beta_{ij}(n)=\sum_{k=1}^{N} p_{ik}\psi_{kj}(n-e_i), \quad i,j=\overline{1,N}, \tag{5}$$

где e_j—N-мерный вектор, i-я координата которого равна 1, а остальные равны 0; δ_{ij} — символ Кронекера. При этом, очевидно,

$$\varphi_i(n)+\sum_{j=1}^{N}\psi_{ij}(n)=1, \tag{6}$$

$$\alpha_i(n)+\sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}(n)=1. \tag{7}$$

Лемма 1. Если матрица $(p_{ij},\ i,\ j=\overline{0, N})$ неприводима, то при каждом фиксированном $n\in Z^N$, где $Z=\{0, 1, 2, \ldots\}$, соотношения (2)—(5) однозначно определяют вероятности $\varphi_i(n)$, $\psi_{ij}(n)$, $\alpha_i(n)$, $\beta_{ij}(n)$ $(i, j=\overline{1, N})$.

Доказательство леммы приводится в приложении.

Например, для сети из последовательно соединенных приборов 1, 2, ..., N (заявка, обслуженная i-м прибором, направляется к $(i+1)$-му прибору, $i=\overline{1, N-1}$; заявка, обслуженная N-м прибором, уходит из сети) решение (2)—(5) имеет вид

$$\varphi_i(n)=\prod_{k=i}^{N}(1-f^{(k)}_{n_k}); \qquad \psi_{ij}(n)=f^{(j)}_{n_j}\prod_{k=i}^{j-1}(1-f^{(k)}_{n_k}) \text{ при } j\geqslant i,$$

$$\psi_{ij}(n)=0 \text{ при } j<i;$$

$$\alpha_i(n)=\prod_{k=i+1}^{N}(1-f^{(k)}_{n_k}); \qquad \beta_{ij}(n)=f^{(k)}_{n_j}\prod_{k=i+1}(1-f^{(k)}_{n_k}) \text{ при } j>i,$$

$$\beta_{ij}(n)=0 \text{ при } j\leqslant i.$$

Предполагается, что произведение любых сомножителей по k, изменяющимся от l до m, равно единице при $l>m$.

Если стационарное распределение процесса $n(t)$ существует, то стационарные вероятности состояний удовлетворяют глобальным уравнениям равновесия

$$(8)\qquad p(n)\sum_{i=1}^{N}[\lambda p_{0i}(1-\varphi_i(n))+\mu_i(n_i)(1-\beta_{ii}(n))]=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}p(n-e_i)\sum_{k=1}^{N}\lambda p_{0k}\psi_{ki}(n-e_i)+\sum_{i=1}^{N}p(n+e_i)\mu_i(n_i+1)\alpha_i(n+e_i)+$$
$$+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N}p(n+e_j-e_i)\mu_j(n_j+1)\beta_{ji}(n+e_j-e_i),\qquad n\in X.$$

Здесь предполагается, что $p(n)=0$ для $n\notin X$.

Теорема 1. Если выполнено условие

$$(9)\qquad \sum_{n_i=0}^{\infty}\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda\varepsilon_i f_{l-1}^{(i)}}{\mu_i(l)}<\infty,\qquad i=\overline{1,N},$$

то марковский процесс $n(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение имеет форму произведения

$$(10)\qquad p(n)=p_1(n_1)p_2(n_2)\ldots p_N(n_N),\ n\in X,$$

где

$$(11)\qquad p_i(n_i)=p_i(0)\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda\varepsilon_i f_{l-1}^{(i)}}{\mu_i(l)},$$

ε_i находятся из (1), а

$$(12)\qquad p_i(0)=\left[\sum_{n_i=0}^{\infty}\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda\varepsilon_i f_{l-1}^{(i)}}{\mu_i(l)}\right]^{-1}\quad(i=\overline{1,N}).$$

Доказательство теоремы приводится в приложении.

В свете работы [6] следует ожидать, что условие (9) является не только достаточным, но и необходимым для существования стационарного распределения. В силу (10) в стационарном режиме узлы можно считать функционирующими независимо. Отметим, что маргинальные вероятности $p_i(n_i)$ совпадают со стационарными вероятностями состояний узла, рассматриваемого изолированно от сети с пуассоновским входным потоком интенсивности $\lambda\varepsilon_i$ и вероятностью потери поступающей заявки $1-f_{n_i}^{(i)}$, когда в узле n_i заявок. Интересно, что вероятности $\varphi_i(n)$, $\psi_{ij}(n)$, $\alpha_i(n)$, $\beta_{ij}(n)$ находить из (2)—(5) нет необходимости, так как стационарное распределение (10)—(12) от них не зависит.

4. Примеры

1. *Ограничение по времени ожидания.* В i-м узле находится s_i — линейная система из экспоненциальных приборов, интенсивность обслуживания каждым из которых μ_i (система $\cdot|M|s_i$, $i=\overline{1,\ N}$). Это эквивалентно тому,

что в i-м узле находится единственный экспоненциальный прибор с интенсивностью обслуживания $\mu_i(n_i)=n_i\mu_i$ при $n_i\leqslant s_i$ и $\mu_j(n_i)=s_i\mu_i$ при $n_i>s_i$. Если в момент поступления заявки в i-й узел в нем есть хоть один свободный прибор, то она начинает обслуживаться немедленно. В противном случае заявка присоединяется к очереди только тогда, когда время, которое ей потребуется ждать, чтобы попасть на обслуживание, меньше случайной величины, ограничивающей время ожидания этой заявки. Если выполняется противоположное неравенство, заявка сразу же покидает узел и считается мгновенно обслуженной (т. е. пойдет на другой узел или покинет сеть в соответствии с матрицей маршрутов (p_{ij})). Обозначим через $\Phi_i(x)$ функцию распределения времени, ограничивающего продолжительность ожидания заявки в i-м узле ($i=\overline{1, N}$). Как следует из [7], вероятность того, что заявка, поступившая в i-й узел, когда в нем находится n_i заявок, присоединится к очереди, определяется соотношением

$$(13)\qquad f_{n_i}^{(i)}=\begin{cases} \dfrac{s_i\mu_i}{(n_i-s_i)!}\displaystyle\int_0^\infty e^{-s_i\mu_i x}[1-\Phi_i(x)]\,(s_i\mu_i x)^{n_i-s_i}\,dx & \text{при}\quad n_i\geqslant s_i;\\ 1 \quad \text{при} \quad n_i<s_i. \end{cases}$$

Кроме того, из [7] следует, что для существования финального стационарного распределения заявок в узле, когда узел рассматривается изолированно с простейшим входным потоком интенсивности $\lambda\varepsilon_i$, необходимо и достаточно, чтобы существовало x_{0i}, такое, чтобы

$$(14)\qquad \Phi_i(x)>1-\frac{s_i\mu_i}{\lambda\varepsilon_i}$$

для некоторого $x\geqslant x_{0i}$. При выполнении условия (14) существует стационарное распределение $\{p_i(n_i);\ n_i=0,\ 1,\ \ldots\}$ для изолированного узла, поэтому $\sum\limits_{n_i=0}^{\infty} p_i(n_i)<\infty$, т. е. для данного i выполнено (9).

Следствие 1. Если во всех узлах выполнено условие (14), то марковский процесс $n(t)$, соответствующий сети с обходами заявками узлов из-за ограничения на время ожидания, эргодичен, а финальное распределение имеет вид (10)—(12), в которых $f_{n_i}^{(i)}$ определяется с помощью (13).

Отметим, что если времена, ограничивающие продолжительности ожидания заявок в узлах,— собственные случайные величины (в частности, постоянны), то (14) выполняется автоматически. Таким образом, введение ограничений на продолжительность ожидания заявок в узлах сети Джексона приводит к разгрузке узлов и их стационарному функционированию даже в тех случаях, когда в классической сети Джексона не существует стационарного распределения.

Аналогичный результат получается, если ввести ограничение не на продолжительности ожидания, а на продолжительности пребывания заявок в узлах.

2. *Ограничение по числу заявок.* Предположим, что клиент, поступающий в узел, решает вопрос о присоединении или неприсоединении к очереди по ее длине. Если в момент поступления в i-й узел число заявок в нем меньше K_i, то поступившая заявка присоединяется к очереди, в против-

ном случае она сразу же покидает узел и считается мгновенно обслуженной. Очевидно, в этом случае

$$f_{n_i}^{(i)}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad n_i<K_i,\\ 0, & \text{если} \quad n_i\geqslant K_i,\end{cases}$$

фазовое пространство $X=Z_1\times Z_2\times\ldots\times Z_N$, где $Z_i=\{0, 1, \ldots, K_i\}$; условие (9) выполняется, так как ряд в левой части (9) превращается в конечную сумму.

Следствие 2. Марковский процесс $n(t)$, соответствующий сети с обходами узлов заявками из-за ограничения на число заявок, эргодичен, а финальное стационарное распределение имеет вид

$$p(n)=p_1(n_1)p_2(n_2)\ldots p_N(n_N),\ n_i=\overline{0, K_i}\ (i=\overline{1, N}), \tag{15}$$

где

$$p_i(n_i)=p_i(0)\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i(l)},\qquad p_i(0)=\left[\sum_{n_i=0}^{K_i}\prod_{l=1}^{n_i}\frac{\lambda\varepsilon_i}{\mu_i(l)}\right]^{-1}.$$

Модификация модели, описанной в разделе 1, и теоремы 1 на случай замкнутой сети не представляет сложности.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Достаточно доказать, что при фиксированном $n\in Z^N$ (2) и (3) однозначно определяют $\varphi_i(n)$, $\psi_{ij}(n)$ $(i,j=\overline{1, N})$. Пусть $\Phi(n)=(\varphi_1(n),\ldots,\varphi_N(n))^T$, $\Gamma(n)=((1-f_{n_1}^{(1)})p_{10},\ldots,(1-f_{n_N}^{(N)})p_{N0})^T$, $\Pi(n)=((1-f_{n_i}^{(i)})p_{ij},\ i,\ j=\overline{1, N})$, $\Psi(n)=(\psi_{ij}(n),\ i,j=\overline{1, N})$, $F(n)=(f_{n_i}^{(i)}\delta_{ij},\ i,j=\overline{1, N})$, E – единичная матрица, размер которой будет определяться из контекста, где T – операция транспонирования. В матричной форме (2), (3) запишутся в виде

$$\Phi(n)=\Gamma(n)+\Pi(n)\Phi(n),\quad \Psi(n)=F(n)+\Pi(n)\Psi(n),$$

откуда

$$\Phi(n)=(E-\Pi(n))^{-1}\Gamma(n),\quad \Psi(n)=(E-\Pi(n))^{-1}F(n).$$

Остается доказать, что матрица $E-\Pi(n)$ обратима. В случае, если при каждом i либо $f_{n_i}^{(i)}>0$, либо $p_{i0}>0$ $(i=\overline{1, N})$, это очевидно, так как норма

$$\|\Pi(n)\|=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\sum_{j=1}^{N}(1-f_{n_i}^{(i)})p_{ij}<1.$$

Лемма 2. Если матрица $\Pi_k(n)$ получена из $\Pi(n)$ вычеркиванием $k-1$ одноименных строк и столбцов, то

$$\det(E-\Pi_k(n))>0\qquad (k=\overline{1, N-1}).$$

Доказательство леммы. Не ограничивая общности, можно считать вычеркнутыми $k-1$ первых строк и столбцов. Сначала покажем, что если $\tilde{A}=(a_{ij},\ i\,j=\overline{0, l})$ – неприводимая стохастическая матрица и $A=(a_{ij},\ i,j=\overline{1, l})$ получена из $\tilde{A}$ вычеркиванием нулевых строки и столбца, то $\det(E-A)>0$. Известно [8], что $r=1$ – максимальное собственное число стохастической матрицы. При доказательстве теоремы Фробениуса в [8] попутно доказано, что для неприводимой матрицы $\tilde{A}$ с неотрицательными элементами, имеющей максимальное собственное число r, элементы присоединенной матрицы, соответствующей этому собственному числу, строго положительны, в частности $\det(rE-A)>0$. Значит, в случае стохастической матрицы $\det(E-A)>0$.

Так как $\Pi_k(n)$ – полустохастическая матрица, то из нее можно получить стохастическую матрицу $\Pi_k(n)$, добавляя к $\Pi_k(n)$ слева столбец $(0,\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_N)^T$, где $\alpha_i=(1-f_{n_i}^{(i)})\sum_{j=k}^{N} p_{ij}$ $(i=\overline{k,N})$, и сверху строку $(0, (N-k+1)^{-1},\ldots, (N-k+1)^{-1})$.

Используя неприводимость матрицы $(p_{ij}\ i,j=\overline{0,N})$, можно показать, что матрица $\widetilde{\Pi}_k(n)$ также неприводима. В силу доказанного в предыдущем абзаце предложения это означает, что $\det(E-\Pi_k(n))>0$. Лемма 2 доказана.

В общем случае для некоторых i имеем $f_{n_i}^{(i)}=1$, а для остальных i оказывается $f_{n_i}^{(i)}<1$. Пусть $k-1$ штук $f_{n_i}^{(i)}$ равны 1, остальные $f_{n_i}^{(i)}<1$. Тогда в матрице $\Pi(n)$ будет $k-1$ нулевых строк и $\det(E-\Pi(n))$ совпадает с определителем $\det(E-\Pi_k(n))$, который строго положителен по лемме 2. Значит, $E-\Pi(n)$ – обратимая матрица. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 1. Докажем, что (10) удовлетворяют уравнениям равновесия (8). Из (11) следует, что

$$\lambda\varepsilon_i f_{n_i}^{(i)} p_i(n_i)=\mu_i(n_i+1)p_i(n_i+1),\quad n_i\in Z_i. \tag{16}$$

Разобьем (8) на уравнения локального равновесия

$$p(n)\sum_{i=1}^{N}\lambda p_{0i}(1-\varphi_i(n))=\sum_{i=1}^{N}p(n+e_i)\mu_i(n_i+1)\alpha_i(n+e_i), \tag{17}$$

$$p(n)\mu_i(n_i)(1-\beta_{ii}(n))=p(n-e_i)\sum_{k=1}^{N}\lambda p_{0k}\psi_{ki}(n-e_i)+ \tag{18}$$

$$+\sum_{j\neq i}p(n+e_j-e_i)\mu_j(n_j+1)\beta_{ji}(n+e_j-e_i).$$

Из соотношений (3), (5) имеем

$$\psi_{ij}(n)=f_{n_i}^{(i)}\delta_{ij}+(1-f_{n_i}^{(i)})\beta_{ij}(n+e_i),\quad i,j=\overline{1,N}. \tag{19}$$

Проверим, что (10) удовлетворяют (17), (18). Для этого подставим (10) в (17), (18) и разделим (17), (18) и $p(n)$. С учетом (16) после элементарных преобразований получим

$$\sum_{i=1}^{N}p_{0i}(1-\varphi_i(n))=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i f_{n_i}^{(i)}\alpha_i(n+e_i), \tag{20}$$

$$\varepsilon_i f_{n_i-1}^{(i)}(1-\beta_{ii}(n))=\sum_{k=1}^{N}p_{0k}\psi_{ki}(n-e_i)+\sum_{j\neq i}\varepsilon_j f_{n_j}^{(j)}\beta_{ji}(n+e_j-e_i),\quad n_i\neq 0. \tag{21}$$

Проверим (20). Используя (1), (5)–(7), (19), получим

$$\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i f_{n_i}^{(i)}\alpha_i(n+e_i)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i f_{n_i}^{(i)}\left(1-\sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}(n+e_i)\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i f_{n_i}^{(i)}+\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sum_{j=1}^{N}[\psi_{ij}(n)-f_{n_i}^{(i)}\delta_{ij}]-\sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i\sum_{j=1}^{N}\beta_{ij}(n+e_i)=$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i (1-\varphi_i(n)) - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} p_{ik}\psi_{kj}(n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (1-\varphi_i(n)) \left[\varepsilon_i - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k p_{ki}\right] = \sum_{i=1}^{N} p_{0i}(1-\varphi_i(n)).$$

Проверим (21). Используя (1), (3), (5), (19), получим

$$\sum_{k=1}^{N} p_{0k}\psi_{ki}(n-e_i) + \sum_{j\neq i} \varepsilon_j f_{n_j}^{(j)} \beta_{ji}(n+e_j-e_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \psi_{ki}(n-e_i) - \sum_{j\neq i} \varepsilon_j (1-f_{n_j}^{(j)}) \sum_{k=1}^{N} p_{jk}\psi_{ki}(n-e_i) - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_i p_{ik}\psi_{ki}(n-e_i) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k \psi_{ki}(n-e_i) - \sum_{j\neq i} \varepsilon_j \psi_{ji}(n-e_i) - \varepsilon_i \beta_{ii}(n) = \varepsilon_i f_{n_i-1}^{(i)} (1-\beta_{ii}(n)).$$

Докажем, что при выполнении условия (9) $n(t)$ эргодичен. Так как матрица $(p_{ij}, i, j=\overline{0,N})$ неприводима, процесс $n(t)$ также будет неприводимым на фазовом пространстве X. Остается воспользоваться эргодической теоремой Фостера [9], согласно которой достаточно проверить, что система уравнений

$$x(n) = \sum_{m\neq n} x(m) \frac{\lambda(m,n)}{\lambda(m)}, \quad \lambda(m) > 0 \quad (m, n \in X), \tag{22}$$

где $\lambda(m,n)$ – интенсивность перехода $n(t)$ из состояния m в состояние n; $\lambda(m)$ – интенсивность выхода из состояния m, имеет нетривиальное решение $(x(n), n\in X)$, такое, что $\sum_{n\in X} |x(n)| < \infty$. Действительно, беря $x(n) = \lambda(n)p(n)$, где $p(n)$ определяется (10)–(12), получим, что (22) превращается в глобальные уравнения равновесия (8), которым $p(n)$ удовлетворяют. А ряд

$$\sum_{n\in X} |x(n)| = \sum_{n\in X} \lambda(n) p(n) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_N=0}^{\infty} \left\{ \left[\lambda + \sum_{j=1}^{N} \mu_j(n_j) \right] \prod_{i=1}^{N} \left\{ p_i(0) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i f_{l-1}^{(i)}}{\mu_i(l)} \right\} \right\}$$

сходится в силу условия (9), так как при его выполнении сходятся ряды

$$\sum_{n_i=1}^{\infty} \mu_i(n_i) \prod_{l=1}^{n_i} \frac{\lambda \varepsilon_i f_{l-1}^{(i)}}{\mu_i(l)} \leqslant \lambda \varepsilon_i \sum_{n_i=1}^{\infty} \frac{\lambda \varepsilon_i f_{l-1}^{(i)}}{\mu_i(l)} \quad (i=\overline{1,N}).$$

Значит, $n(t)$ эргодичен и финальное распределение является единственным стационарным распределением, совпадающим с $\{p(n), n\in X\}$, где $p(n)$ определены посредством (10)–(12). Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pittel B.* Closed exonential networks of queues with saturation: the Jackson-type stationary distribution and its asymptotic analysis // Math. Oper. Res. 1979. V. 4. № 4. P. 357–378.
2. *Абышкин В. А., Самуйлов К. Е.* Метод расчета характеристик сети массового обслуживания с матрицей переходных вероятностей, зависящей от состояния сети // Тез. докл. XII Всесоюз. сем. по вычислительным сетям. Одесса, 1987. М.: Науч. совет «Кибернетика» АН СССР, 1987. Ч. 2. С. 227–231.
3. *Башарин Г. П., Чумаев А. В.* Условия частичного и детального баланса для модели гибкой производной системы // АиТ. 1989. № 4. С. 109–115.
4. *Jackson J. R.* Jobshop-like queueing systems // Manag. Sci. 1963. V. 10. № 1. P. 131–142.
5. *Gordon W. J., Newell G. F.* Closed queueing systems with exponential servers // Oper. Res. 1967. V. 15. P. 254–265.
6. *Якушев Ю. Ф.* Метод анализа некоторых сетей массового обслуживания // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1984. № 6. С. 73–81.
7. *Афанасьева Л. Г.* О некоторых задачах массового обслуживания с ограниченным временем ожидания // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1964. № 6. С. 27–37.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
9. *Foster F. G.* On stochastic matrices assosiated with certain queueing process // Ann. Math. Statist. 1953. V. 24. № 2. P. 355–360.

Поступила в редакцию 26.12.89