МАРКОВСКИЕ СЕТИ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СТАЦИОНАРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Ю. В. Малинковский, М. Ю. Тюриков

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
г. Гомель, Беларусь
malinkovsky@gsu.unibel.by, mishats@pisem.net

Приводится обзор наиболее значимых работ последних лет по условиям мультипликативности стационарных распределений марковских сетей массового обслуживания. Основное внимание обращено на работы авторов статьи. Приводятся эффективные условия мультипликативности стационарного распределения в терминах изолированных узлов, помещенных в фиктивную случайную среду.

Ключевые слова: сети массового обслуживания, стационарное распределение, форма произведения, квазиобратимость, неэффективность по поступлению.

Для начала приведем описание базового класса марковских сетей массового обслуживания и введем необходимые обозначения.

Будем рассматривать открытые сети, описываемые марковскими процессами, с конечным множеством узлов M. Для удобства внешний источник будем считать узлом 0, причем $0 \in M$. Узлы являются экспоненциальными общего вида, их состояния произвольны и образуют не более чем счетные множества X_i. Сеть описывается вектором состояний узлов. Поведение узлов задается интенсивностями переходов $q_i^s(x_i, y_i)$, где s принимает значение d для уходов заявок из узла, i – для внутренних переходов и a – для поступлений заявок в узел. Так как процесс поступления на узел в сети зависит от всей сети, то вместо q_i^a будем рассматривать вероятности переходов p_i^a при условии поступления. Допускаются переходы из состояния в него же. Узлы склеены в сеть таким образом, что заявка, покидающая узел i, с вероятностью p_{ij} поступает на узел j.

Для получения марковского процесса изолированного узла достаточно определить процесс поступления (так называемую фиктивную окружающую среду). Интенсивности выхода из состояния x_i определяются как $q_i(x_i) = \sum_{y_i} q_i(x_i, y_i)$, $x_i \in X_i$. Считая $p_i(x_i)$ стационарным распределением изолированного узла i, введем функционал, дающий интенсивности процесса с обращенным временем:

$$\tilde{q}_i(x_i) = \sum_{y_i} p_i(y_i) q_i(y_i, x_i) p_i(x_i)^{-1}, \qquad x_i \in X_i$$

и функционал, дающий средние значения:

$$\bar{q}_i = \sum_{x_i, y_i} p_i(x_i) q_i(x_i, y_i) = \sum_{x_i} p_i(x_i) q_i(x_i) = \sum_{x_i} p_i(x_i) \tilde{q}_i(x_i), \; x_i \in X_i.$$

Все $\bar{q}_i^d$ и $\bar{q}_i^i$ предполагаются конечными, а все $\bar{p}_i^a = 1$.

В работах Ю. В. Малинковского [1, 2] исследуется мультипликативность вышеуказанного базового класса сетей. Внешний источник является пуассоновским.

Ю. В. Малинковский доказал, что если стационарное произведение сети имеет мультипликативную форму

$$p(x)=\prod_i p_i(x_i), \qquad x\in X, \tag{1}$$

то $p_i(x_i)$ является стационарным распределением изолированного узла i. При этом фиктивное окружение характеризуется пуассоновским входящим потоком и обратной связью, то есть, строго говоря, на узел поступает пуассоновский поток с параметром α_i, а уходящая из него заявка с вероятностью p_{ii} поступает снова на вход, α_i находятся из уравнений трафика

$$\alpha_i=\sum_{j\neq i}\overline{q}_j^d\, p_{ji}, \qquad i\in M. \tag{2}$$

Уравнения равновесия такого изолированного узла имеют вид

$$\begin{aligned}\alpha_i+q_i^d(x_i)+q_i^i(x_i)&=\alpha_i\,\widetilde{p}_i^a(x_i)+(1-p_{ii})\widetilde{q}_i^d(x_i)+\\ +p_{ii}\sum_{y_i}p_i(y_i)\,\widetilde{q}_i^d(y_i)\,p_i^a(y_i,x_i)\,p_i(x_i)^{-1}&+\widetilde{q}_i^i(x_i), \qquad x_i\in X_i.\end{aligned} \tag{3}$$

Широко известное условие квазиобратимости для таких узлов можно сформулировать как выполнение локального баланса вида $\widetilde{q}_i^d(x_i)=\overline{q}_i^d$, $x_i\in X_i$.

Для нахождения необходимых и в то же время достаточных условий в работе [2] накладываются следующее ограничение: узлы (кроме внешнего источника) являются стандартными.

Стандартный узел, который обладает свойством

$$q_i^d(x_i)=q_i^i(x_i)=0, \qquad q_i^i(y_i,x_i)=p_i^a(y_i,x_i)=0, \qquad y_i\in X_i,$$

для всех состояний x_i, в которых число заявок в узле является нулевым. Существование таких состояний предполагается.

Узел i назван нетерминальным, если $i\neq 0$ и $p_{ii}+p_{i0}<1$.

Основной результат работ [1, 2] Ю. В. Малинковского заключается в следующем:

Теорема 1. Пусть все узлы (кроме 0) стандартны и $\overline{q}_i^d\geq\alpha_i$, $i\neq 0$ (либо $\overline{q}_i^d\leq\alpha_i$, $i\neq 0$). Стационарное распределение сети $p(x)$ имеет форму (1) тогда и только тогда, когда все нетерминальные узлы заявко-сохраняющие (то есть $\overline{q}_i^d=\alpha_i$, $i\neq 0$) и квазиобратимые, все $p_i(x_i)$ – стационарные распределения изолированных узлов (решения (3)) относительно α_i, а α_i и $p_i(x_i)$ удовлетворяют (2).

В работе [3] результаты [1] обобщаются на неоднородные марковские сети со специальной матрицей маршрутизации.

Следующим серьезным шагом в исследовании мультипликативности является работа Х. Чао, М. Миязавы, Р. Серфозо и Х. Такады [4]. В отличие от Ю. В. Малинковского ограничение стандартности узлов не накладывается, а внешний источник не обязательно пуассоновский. Таким образом, охарактеризован весь подкласс мультипликативных сетей базового класса сетей массового обслуживания.

В [4] доказан следующий критерий представимости в форме произведения:

Теорема 2. Стационарное распределение сети $p(x)$ имеет форму (1) тогда и только тогда, когда $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями изолированных узлов относительно α_i и p_{ii} (то есть удовлетворяют (3)), а α_i и $p_i(x_i)$ таковы, что выполняется (2) и

$$\begin{gathered}\left(\tilde{q}_i^d(x_i)-\overline{q}_i^d\right)p_{ij}\left(\tilde{p}_j^a(x_j)-1\right)+\left(\tilde{q}_j^d(x_j)-\overline{q}_j^d\right)p_{ji}\left(\tilde{p}_i^a(x_i)-1\right)=0,\\ i\in M, j\in M\setminus i, x_i\in X_i, x_j\in X_j.\end{gathered}\tag{4}$$

Отметим, что фиктивная среда, естественно, осталась той же.

Чао и другие заметили, что для выполнения (4) достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) оба узла i и j квазиобратимы;

2) оба узла i и j неэффективны по поступлению. Узел j неэффективен по поступлению, если $\tilde{p}_j^a(x_j)=1$, $x_j\in X_j$;

3) один из узлов i и j квазиобратим и неэффективен по поступлению одновременно.

Следствие 1. Пусть $p(x)$ имеет форму (1), $p_{ij}\neq 0$ и $p_{ji}=0$ для некоторых различных i и j и $\tilde{p}_j^a(x_j)\neq 1$ для некоторого x_j. Тогда узел j квазиобратим.

Дальнейшая детализация условий теоремы 2 получена М. Ю. Тюриковым как следствие основного результата работы [5].

Изолированный узел i назван обладающим сетевым балансом, если $\tilde{q}_i^d(x_i)-\overline{q}_i^d = g_i\left(\tilde{p}_j^a(x_j)-1\right)$, $x_i\in X_i$ для некоторого g_i. Квазиобратимость является сетевым балансом с $g_i=0$.

Введем следующие множества узлов: Ω – неэффективные по поступлению узлы, $S=\{i\in M:\forall j\in\overline{\Omega}\setminus i\ p_{ij}=0\}$, B^+ и B^- – эффективные по поступлению узлы из $\overline{S}$ с сетевым балансом, где g_i имеет соответствующий знак, $B=B^+\bigcup B^-$.

Теорема 3. Распределение $p(x)$ имеет форму (1) тогда и только тогда, когда существуют α_i такие, что $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями узлов в изоляции относительно α_i и p_{ii}, выполняется (2) и следующие условия:

1) каждый узел i обладает сетевым балансом либо $i\in S$;

2) $p_{ij}=0$, $\quad (i,j)\in(B^-\times(\overline{\Omega}\setminus B^+))\bigcup(B^+\times(\overline{\Omega}\setminus B^-))$;

3) $g_i\,p_{ij}+g_j\,p_{ji}=0$, $\ i\in B^-$, $j\in B^+$.

Для большей ясности условия 1–3 можно сформулировать так.

Каждый узел относится к одному из типов: 1) квазиобратим и неэффективен по поступлению; 2) квазиобратим и эффективен по поступлению; 3) не квазиобратим и неэффективен по поступлению; 4) не квазиобратим и эффективен по поступлению.

Любой узел может слать заявки в неэффективные по поступлению узлы (тип 1 и 3) и получать от квазиобратимых (тип 1 и 2). Остальные межузловые переходы могут быть только между узлами типа 4 при условии, что для них вероятны обратные переходы, связанные узлы i и j имеют сетевые балансы разных знаков такие, что $g_i\, p_{ij} + g_j\, p_{ji} = 0$. При этом узлы типа 4 разбиваются на непересекающиеся неприводимые классы.

В работе [4] сформулирован алгоритм, вытекающий из основного результата (теоремы 2), который позволяет установить существование стационарного распределения в форме произведения и получить его, если оно существует. Алгоритм включает следующие шаги:

1) для каждого узла i находим стационарные распределения изолированных узлов с обратной связью p_{ii} как функции от α_i. При этом получим $\bar{q}_i^d$ также в виде функции от α_i;

2) находим $\alpha_i,\, i \in M$ из уравнений трафика (2);

3) проверяем (4) для полученных α_i и $p_i(x_i)$.

Если все шаги завершаются успешно, то $p(x) = \prod\limits_i p_i(x_i)$ является стационарным распределением сети. Верно и обратное утверждение. На шагах 1 и 2 могут быть получены несколько решений, алгоритм работает для всех. Этот алгоритм детализирован с помощью теоремы 3 в [5].

Чао и другие в [4] показывают, что теорема 2 легко обобщается на сети с многотипными заявками. Для описания сетей со счетным множеством T типов заявок будем рассматривать аналогичные характеристики $q_{iu}^d(x_i, y_i)$, $p_{iu}^a(x_i, y_i)$, α_{iu} и p_{iujv}, где u и v обозначают типы заявок, которые ушли с узла (пришли на узел).

Фиктивная окружающая среда в этом случае характеризируется входящими пуассоновскими потоками заявок различных типов и обратными связями, также зависящими от типов. Интенсивности переходов узла в изоляции принимают вид

$$q_i(x_i, y_i) = \sum_u \left(\alpha_{iu}\, p_{iu}^a(x_i, y_i) + \left[1 - \sum_v p_{iuiv} \right] q_{iu}^d(x_i, y_i) \right) +$$
$$+ \sum_{z_i, u, v} q_{iv}^d(x_i, z_i)\, p_{iviu}\, p_{iu}^a(z_i, y_i) + q_i^i(x_i, y_i), \qquad x_i, y_i \in X_i.$$

Аналог теоремы 2 можно сформулировать так:

Теорема 4. Распределение $p(x)$ имеет форму (1) тогда и только тогда, когда $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями изолированных узлов относительно p_{iuiv} и α_{iu}, удовлетворяющих уравнению трафика $\alpha_{iu} = \sum\limits_{j \neq i} \sum\limits_v \bar{q}_{jv}^d\, p_{jviu}$, $i \in M, u \in T$, и

$$\sum_{u,v} \left[\left(\tilde{q}_{iu}^d(x_i) - \bar{q}_{iu}^d \right) p_{iujv} \left(\tilde{p}_{jv}^a(x_j) - 1 \right) + \left(\tilde{q}_{jv}^d(x_j) - \bar{q}_{jv}^d \right) p_{jviu} \left(\tilde{p}_{iu}^a(x_i) - 1 \right) \right] = 0,$$
$$i \in M, j \in M \setminus i, x_i \in X_i, x_j \in X_j.$$

В работе М. Ю. Тюрикова [5] базовый класс сетей расширен за счет введения понятия многоадресной маршрутизации. Суть многоадресности в том, что заявка, уходящая из узла, приходит одновременно на некоторое подмножество узлов δ. Вместо маршрутных вероятностей p_{ij} рассматриваются $p_{i\delta}$. Суммирование по подмножествам делает исследование существенно сложней.

Фиктивная среда изолированного узла остается принципиально той же, однако обратная связь имеет вероятность $p_{ii} = \sum_{\delta\subseteq M:i\in\delta} p_{i\delta}$. С учетом этого равенства уравнение равновесия изолированного узла принимает вид (3).

Кроме сетевого баланса, используется понятие расширенного сетевого баланса, которым узел i обладает в том случае, когда для некоторых a_i и b_i и всех $x_i \in X_i$

$$\sum_{y_i} p_i(y_i)\tilde{q}_i^d(y_i)p_i^a(y_i,x_i)p_i(x_i)^{-1} - \overline{q}_i^d(x_i) = a_i\left(\tilde{q}_i^d(x_i) - \overline{q}_i^d\right) + b_i\left(\tilde{p}_j^a(x_j) - 1\right).$$

Если выполняется сетевой баланс, то a_i и b_i определяются неоднозначно, тогда мы будем полагать $a_i = 0$. От остальных случаев неопределенности избавляемся, считая a_i и (или) b_i равными нулю.

Кроме Ω, B, B^+ и B^-, определенных выше, введем следующие множества узлов: $R = \{i\in M : \forall\delta\in M\setminus i : \delta\cap\overline{\Omega}\neq\varnothing \; p_{i(\delta\cup i)} = 0$ или $\overline{q}_i^d = 0\}$, E^+ (E^-) – узлы из $\overline{R}\cap\overline{\Omega}$ с расширенным сетевым балансом, где $b_i > 0$ ($b_i < 0$ соответственно), $E = E^+\cup E^-$, $S = \{i\in M : \forall\delta\in M\setminus i : \delta\cap\overline{\Omega}\neq\varnothing \; p_{i\delta} = 0$ или $\overline{q}_i^d = 0\}$, $U = \overline{\Omega}\setminus(E^-\cup B^-)$. Для краткости обозначим $p_{i\varepsilon\{\sigma\}} = \sum_{\delta\subseteq\varepsilon} p_{i(\varepsilon\cup\delta)}$.

М. Ю. Тюриков в [5] доказал следующий критерий для сетей с многоадресной маршрутизацией:

Теорема 5. Распределение $p(x)$ имеет форму (1) тогда и только тогда, когда существуют α_i такие, что $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями узлов в изоляции относительно α_i и обратной связи $\sum_{\delta\subseteq M:i\in\delta} p_{i\delta}$, α_i удовлетворяют уравнения трафика $\alpha_i = \sum_{j\neq i}\sum_{\delta\subseteq M:i\in\delta} \overline{q}_j^d \, p_{j\delta}$, $i\in M$ и выполняются следующие условия:

1) каждый узел i имеет расширенный сетевой баланс или $i\in R$;

2) для всех i либо а) узел i имеет сетевой баланс, либо б) $i\in R\cap S$, либо в) $i\in R$ и $p_{i\varepsilon\{\Omega\setminus i\}} + a_i\, p_{i(\varepsilon\cup i)\{\Omega\setminus i\}} = 0$, $\varepsilon\subseteq\overline{\Omega}\setminus i : \varepsilon\neq\varnothing$;

3) $p_{i\delta} = 0, \quad i\in M : \overline{q}_i^d \neq 0, \delta\subseteq M : |(\delta\setminus i)\cap U| \geq 2$;

4) $p_{i\delta} = 0, \quad i\in B^+\setminus E^-, \delta\subseteq M\setminus i : \delta\cap U\neq\varnothing$;

5) $p_{i(\delta\cup i)} = 0, \quad i\in E^+\setminus B^-, \delta\subseteq M\setminus i : \delta\cap U\neq\varnothing$;

6) выполняется одно из следующих равносильных условий:

$$\sum_{i\in\Omega}\overline{q}_i^d\, p_{i\varepsilon\{\Omega\}}+\sum_{i\in\varepsilon\bigcap B}g_i\, p_{i(\varepsilon\setminus i)\{\Omega\}}+\sum_{i\in\varepsilon\bigcap E}b_i\, p_{i\varepsilon\{\Omega\}}+\sum_{i\in\overline{\Omega}\setminus\varepsilon}\overline{q}_i^d\,(p_{i\varepsilon\{\Omega\}}+p_{i(\varepsilon\setminus i)\{\Omega\}})-$$

$$-\sum_{i\in(\overline{\Omega}\setminus\varepsilon)\bigcap B}g_i\, p_{i\varepsilon\{\Omega\}}-\sum_{i\in(\overline{\Omega}\setminus\varepsilon)\bigcap E}b_i\, p_{i(\varepsilon\bigcup i)\{\Omega\}}=0,\qquad \varepsilon\subseteq\overline{\Omega}:|\,\varepsilon\,|\geq 2,|\,\varepsilon\bigcap U\,|\leq 1;$$

$$\sum_{i\in\overline{\varepsilon}}\overline{q}_i^d\sum_{\delta:\varepsilon\subseteq\delta}p_{i\delta}+\sum_{i\in\varepsilon\bigcap B}g_i\sum_{\delta:\varepsilon\subseteq\delta}p_{i(\delta\setminus i)}+\sum_{i\in\varepsilon\bigcap E}b_i\sum_{\delta:\varepsilon\subseteq\delta}p_{i\delta}=0,\ \ \varepsilon\subseteq\overline{\Omega}:|\,\varepsilon\,|\geq 2,|\,\varepsilon\bigcap U\,|\leq 1.$$

Совершенно другое направление обобщения результата Чао и других [4] (то есть теоремы 2) предложено в работе М. Ю. Тюрикова [6]. Базовый класс сетей расширен за счет усложнения сетевого поведения сразу в двух плоскостях. Во-первых, маршрутные вероятности приобрели зависимость от вектора состояний. Эта так называемая динамическая маршрутизация задается с помощью $p_{ij}(x)$, где x – состояние сети, где учитывается переход в узле i, вызванный уходом заявки, и не учитывается реакция в узле j на поступление заявки.

Во-вторых, допускаются мгновенные перемещения заявок. Иными словами, пришедшая в узел заявка (так называемый сигнал) с вероятностью $p_i^{ad}(x_i,y_i)$ вызывает переход $x_i\to y_i$ и одновременный уход другой заявки (сигнала) из этого же узла. Таким образом, мгновенно происходит некоторое число последовательных перемещений заявок между узлами, производящих в этих узлах изменения. Конечность одновременных визитов предполагается. Для поступлений, не сопровождающихся одновременным уходом, будем использовать $p_i^{ai}(x_i,y_i)=p_i^a(x_i,y_i)-p_i^{ad}(x_i,y_i)$.

Для таких сетей фиктивная среда изолированного узла характеризуется пуассоновским потоком с параметром $\alpha_i(x_i)$, зависящим от состояния узла, брать обратную связь нет смысла. Узел в изоляции имеет интенсивности переходов

$$q_i(x_i,y_i)=\alpha_i(x_i)\,p_i^a(x_i,y_i)+q_i^d(x_i,y_i)+q_i^i(x_i,y_i),\qquad x_i,y_i\in X_i.$$

Обозначим через $x|\,y_i$ вектор, у которого i-я компонента y_i, а все остальные такие же, как у x. Введем функционал, усредняющий функцию $f(x)$ по множеству узлов A, как $E_A\{f(x)\}=\sum_{x_i,i\in A}\left(\prod_{k\in A}p_k(x_k)\right)f(x)$.

Полученный в [6] критерий мультипликативности имеет вид:

Теорема 6. Распределение $p(x)$ имеет форму (1) тогда и только тогда, когда существуют $\alpha_i(x_i)$ такие, что $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями узлов в изоляции относительно $\alpha_i(x_i)$, выполняется $\alpha_i(x_i)=E_{M\setminus i}\{\alpha_i(x)\},i\in M,\ x_i\in X_i$, где $\alpha_i(x)$ находится как неотрицательное решение обобщенного уравнения трафика

$$\alpha_i(x)=\sum_j\left(\tilde{q}_j^d(x_j)+\sum_{y_j}p_j(y_j)\alpha_j(x|\,y_j)\,p_j^{ad}(y_j,x_j)\,p_j(x_j)^{-1}\right)p_{ji}(x),$$

$$i\in M,x\in X,$$

и справедливо

$$\sum_i \sum_{y_i} p_i(y_i)[\alpha_i(x|y_i) - \alpha_i(y_i)] p_i^a(y_i, x_i)\, p_i(x_i)^{-1} = \sum_i [\alpha_i(x) - \alpha_i(x_i)],\ x\in X.$$

Ввести условие на узел, обобщающее понятие квазиобратимости не удалось. Однако М. Ю. Тюриков показал в [6, 7], что следующее достаточное условие представимости в форме произведения является обобщением теоремы Келли, утверждающей, что сеть из квазиобратимых узлов мультипликативна.

Следствие 2. Пусть $p_0^{ai}(x_0, y_0) = 1_{\{x_0 = y_0\}}$, $x_0, y_0 \in X_0$. Если $p_i(x_i)$ являются стационарными распределениями узлов в изоляции относительно некоторых $\alpha_i(x_i)$ и

$$\alpha_i(x_i) = \sum_j \left(\tilde{q}_j^d(x_j) + \sum_{y_j} p_j(y_j)\alpha_j(y_j)\, p_j^{ad}(y_j, x_j)\, p_j(x_j)^{-1} \right) p_{ji}(x),$$
$$i\in M\setminus 0, x\in X,$$

то $p(x)$ в форме (1) – стационарное распределение сети.

Утверждения, обобщающие теорему 6 и следствие 2 на случай сетей с многими типами заявок, получены в [7].

Интересный результат с позиций исследования мультипликативности содержится в работе В. Е. Евдокимовича и Ю. М. Малинковского [8]. В рассмотренных ими сетях динамическая (зависимая от вектора состояний) не только маршрутизация, но и все остальные характеристики сети, не исключая интенсивностей переходов в узле. Внешний источник пуассоновский. Существенным ограничением является то, что узлы не имеют общего экспоненциального вида, а представляют собой очередь с интенсивностью обслуживания $q_i^d(x)$, где x_i – количество заявок в узле. Для большей общности дополнительно введена вероятность $f_i(x)$ присоединения поступающей на узел i заявки к очереди, с дополнительной вероятностью эта заявка мгновенно обходит узел и маршрутизируется дальше с помощью $q_{ij}(x)$, отличных от $p_{ij}(x)$.

Предполагается эргодичность процесса, описывающего сеть. Здесь e_i обозначает вектор, у которого i-ая координата равна 1, а остальные нулевые.

Теорема 7. Пусть $\alpha_i(x)$ – такие решения уравнения трафика

$$\alpha_i(x) = q_0^d\, p_{0i}(x) + \sum_{j\neq 0}\alpha_j(x)\left(f_j(x)\, p_{ji}(x) + [1 - f_j(x)]q_{ji}(x)\right), \qquad i\in M\setminus 0, x\in X,$$

для которых выполняется

$$\rho_j(x+e_i)\rho_i(x) = \rho_i(x+e_j)\rho_j(x), \qquad i, j\in M\setminus 0, \tag{5}$$

где $\rho_i(x) = \dfrac{f_i(x)\alpha_i(x)}{q_i^d(x+e_i)}$ – условная загрузка i-го узла. Тогда финальное стационарное распределение сети имеет форму

$$p(x)=\prod_{i\neq 0} p_i\left(x-\sum_{j=1}^{i-1} x_j e_j\right),\ x\in X, \tag{6}$$

где $p_i(x)=p_i(x|_{x_i=0})\prod_{y_i=1}^{x_i}\rho_i(x|y_i),\ i\in M\setminus 0, x\in X$, а $p_i(x|_{x_i=0})$ находятся из нормированности $p_i(x)$ для всех фиксированных x_j, $j\neq i,0$.

Форма (6) не является мультипликативной формой в том смысле, в котором она понимается в предыдущих результатах, поскольку i-й множитель зависит не только от x_i. Однако, как (1), (6) представляет собой произведение стационарных вероятностей узлов в изоляции, хотя изоляция в [8] является условной, так как зависимость от x сохраняется. Фиктивная среда определяется пуассоновским входящим потоком с параметром $\alpha_i(x)$. Считая x_j, $j\neq i$ параметрами, можно рассматривать процесс изолированного узла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский Ю. В.* Критерий точечной независимости состояний узлов в открытой стационарной марковской сети обслуживания с одним классом заявок // Теория вероятностей и ее применения. 1990. Т. 35. № 4. С. 779–784.

2. *Малинковский Ю. В.* Мультипликативность стационарного распределения открытых сетей обслуживания со стандартными узлами и однотипными заявками // Проблемы передачи информации. 1999. Т. 35. Вып. 1. С. 96–110.

3. *Малинковский Ю. В.* Критерий представимости стационарного распределения состояний открытой марковской сети обслуживания с несколькими классами заявок в форме произведения // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С.75–83.

4. *Chao X., Miyazawa M., Serfozo R. F., Takada H.* Markov network processes with product form stationary distributions // Queueing Systems. 1998. Vol. 28. № 4. P. 377–401.

5. *Тюриков М. Ю.* Мультипликативность марковских сетей с многоадресной маршрутизацией // Проблемы передачи информации. 2002. Т. 38. Вып. 3. С.72–82.

6. *Тюриков М. Ю.* Критерий мультипликативности сетей с динамической маршрутизацией и мгновенными перемещениями // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. 2002. № 6(15). С. 193–196

7. *Тюриков М. Ю.* Форма произведения инвариантного распределения марковских сетей с многотипными заявками, динамической маршрутизацией и мгновенными перемещениями // Препринт ГГУ им. Ф. Скорины. 2003. № 59. 23 с.

8. *Евдокимович В. Е., Малинковский Ю. В.* Сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией и динамическими вероятностными обходами узлов заявками // Проблемы передачи информации. 2001. Т. 37. Вып. 3. С. 55–66.