ОБРАТИМЫЕ СЕТИ С ДИНАМИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ И ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБХОДАМИ

Ю. В. Малинковский

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
Гомель, Беларусь
E-mail: malinkovsky@gsu.unibel.by

Рассмотрены открытые марковские обратимые сети массового обслуживания с динамическими характеристиками и динамическими обходами узлов заявками. Найдено в обобщенной мультипликативной форме стационарное распределение вероятностей состояний марковского процесса, описывающего эволюцию этой сети. Проведено сравнение с результатом, полученным автором ранее.

Ключевые слова: сеть массового обслуживания, интенсивности перехода, обратимый марковский процесс, эргодичность, стационарное распределение, обобщенная мультипликативная форма.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] была введена сеть, в которой направляемая в узел заявка (извне или из другого узла) с вероятностью, зависящей от состояния этого узла, присоединялась к очереди либо с дополнительной вероятностью мгновенно обходила его и далее двигалась таким же образом, как и обслуженная узлом заявка. В [2] было установлено, что выходящие из сети потоки заявок являются независимыми и пуассоновскими. Разнообразные обобщения этой модели рассматривались в [3–8]. Существенными ограничениями всех этих работ являются следующие предположения. Во-первых, матрица маршрутизации не зависит от состояния сети; во-вторых, вероятность присоединения к очереди в узле направляемой в него заявки зависит только от состояния этого узла, но не зависит от состояния сети в целом; в-третьих, матрица, управляющая движением заявок после обхода узла, совпадает с матрицей маршрутизации. Однако в практических ситуациях поведение заявок, которым отказано в обслуживании в момент их направления в узел, вообще говоря, может кардинально отличаться от поведения обслуженных в этом узле заявок и зависеть от количества заявок в других узлах, т. е. от состояния сети. Следствием указанных ограничений явилось то, что в [3–8] стационарное распределение имело мультипликативную форму, в которой множители зависели от состояний отдельных узлов. Более того, в [6, 7] показано, что при некоторых дисциплинах обслуживания стационарные вероятности нечувствительны к распределениям длительностей обслуживания с фиксированными первыми моментами.

В работе [9] сняты указанные выше ограничения, вследствие чего пришлось накладывать определенные условия на параметры модели, с тем чтобы стационарное распределение имело так называемую обобщенную мультипликативную форму. Формально это распределение также представляет собой произведение, однако множители зависят не только от состояний узлов, но и от состояния всей сети.

В настоящей статье рассматривается, по существу, очень важный частный случай результата [9], когда марковский процесс состояний является обратимым. Устанавливаются условия его обратимости и находится стационарное распределение. Проводится сравнение с результатами работы [9], особенно наглядным оно становится в частном случае, когда обходы отсутствуют.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Состояние сети массового обслуживания из N однолинейных узлов характеризуется в момент времени t случайным вектором $n(t)=(n_1(t),n_2(t),\cdots,n_N(t))$, где $n_i(t)$ – число заявок в i-м узле в момент t. Для удобства описания состояние сети и его i-ю координату в некоторый марковский момент соответственно будем обозначать n^+ и n_i^+ либо n^- и n_i^- в зависимости от того, учитывается или не учитывается в состояниях n и n_i заявка, совершающая в этот момент некоторое перемещение (движение в определенный узел извне или из другого узла после обслуживания или обхода). В узлы поступают независимые пуассоновские потоки с интенсивностями $\gamma_1(n^-),\gamma_2(n^-),\cdots,\gamma_N(n^-)$, хотя бы одна из которых строго положительна при каждом n. Пусть

$$\lambda(n)=\gamma_1(n)+\gamma_2(n)+\cdots+\gamma_N(n), \quad p_{0i}(n)=\gamma_i(n)/\lambda(n), i=\overline{1,N}.$$

Заявка, направленная в i-й узел (извне или из другого узла), с вероятностью $f^i_{n^-}$ присоединяется к очереди, а с вероятностью $1-f^i_{n^-}$ мгновенно обходит этот узел $(0\le f^i_{n^-}\le 1, i=\overline{1,N})$. Длительности обслуживания заявок в узлах независимы. Они не зависят от процесса поступления и для i-го узла имеют показательное распределение с параметром $\mu_i(n^+)$. Предполагается, что $\mu_i(n^+)>0$, если $n_i\ne 0$. Заявка, обслуженная i-м узлом, независимо от других заявок с вероятностью $p_{ij}(n^-)$ направляется в j-й узел, а с вероятностью $p_{i0}(n^-)$ покидает сеть. Заявка, обошедшая i-й узел, независимо от других заявок с вероятностью $q_{ij}(n^-)$ направляется в j-й узел, а с вероятностью $q_{i0}(n^-)$ покидает сеть ($i,j=\overline{1,N}$, $\sum\limits_{j=0}^{N} p_{ij}(n)=\sum\limits_{j=0}^{N} q_{i,j}(n)=1$ для любого состояния n).

Определим $p_{00}(n)=q_{00}(n)=0$; для $i\ge 1$ определим $q_{0i}(n)$ произвольно, лишь бы выполнялись условия: $q_{0i}(n)\ge 0$ и $\sum\limits_i q_{0i}(n)=1$. Пусть $r_{ji}(n)=f_n^{(j)}p_{ji}+$

$+(1-f_n^{(j)})q_{ji}$, $j,i=\overline{0,N}$. Если матрица $(r_{ji}(n),\ j,i=\overline{0,N})$ при каждом n неприводима, то при каждом фиксированном состоянии n уравнение трафика

$$\lambda_i(n)=\gamma_i(n)+\sum_j \lambda_j(n)r_{ji}(n), \quad i=\overline{1,N}, \tag{1}$$

имеет положительное единственное решение. В дальнейшем будем предполагать, что матрица $(r_{ji}(n))$ неприводима. Если для данного n найдется i, такое, что $f_n^{(i)}=0$, то дополнительно предположим, что при таком n неприводима также матрица $(q_{ji}(n))$. Очевидно, что $n(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и не более чем счетным фазовым пространством $X\subset Z^N$, где $Z=\{0,1,2,\ldots\}$. Как и в работе [9], в качестве фазового пространства X будем брать множество точек с целочисленными координатами некоторого связного множества в R^N, содержащего начало координат, причем $f_n^{(i)}$ могут обращаться в ноль только в граничных точках этого множества. При этом $n(t)$ является неприводимым марковским процессом на фазовом пространстве X.

Цель работы – в предположении, что $n(t)$ обратим, найти его стационарное распределение и сравнить с результатом работы [9].

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $\varphi_i(n)$ – условная вероятность того, что заявка, направленная в i-й узел, когда сеть находится в состоянии n^-, не будет обслужена ни одним из узлов; $\psi_{ij}(n)$ – условная вероятность того, что заявка, направленная в i-й узел, когда сеть находится в состоянии n^-, впервые получит обслуживание в j-м узле; $\alpha_i(n)$ – условная вероятность того, что заявка, обслуженная i-м узлом, когда сеть находится в состоянии n^+, не будет больше обслуживаться ни одним из узлов; $\beta_{ij}(n)$ – условная вероятность того, что заявка, обслуженная i-м узлом, когда сеть находится в состоянии n^+, впервые после этого будет обслуживаться j-м узлом $(i,j=\overline{1,N},\quad n\in X)$.

В [9] показано, что

$$\varphi_i(n)=(1-f_n^{(i)})[q_{i0}(n)+\sum_i q_{ij}(n)\varphi_j(n)], \quad i=\overline{1,N}, n\in X, \tag{2}$$

$$\psi_{ij}(n)=f_n^{(i)}\delta_{ij}+(1-f_n^{(i)})\sum_k q_{ik}(n)\psi_{kj}(n), \quad i,j=\overline{1,N}, n\in X, \tag{3}$$

$$\alpha_i(n)=p_{i0}(n-e_i)+\sum_j p_{ij}(n-e_i)\varphi_j(n-e_i), \quad i=\overline{1,N}, n\in X, \tag{4}$$

$$\beta_{ij}(n)=\sum_k p_{ik}(n-e_i)\psi_{kj}(n-e_i), \quad i=\overline{1,N}, n\in X. \tag{5}$$

При этом

$$\varphi_i(n)+\sum_j \psi_{ij}(n)=1, \quad \alpha_i(n)+\sum_j \beta_{ij}(n)=1. \tag{6}$$

Здесь e_i - N-мерный вектор, i-я координата которого равна 1, а остальные равны 0; δ_{ij} - символ Кронекера.

В [9] показано, что решение уравнения трафика (1) удовлетворяет обобщенному уравнению трафика

$$f_n^{(i)}\lambda_i(n)=\sum_k \gamma_k(n)\psi_{ki}(n)+\sum_j f_n^{(j)}\lambda_j(n)\beta_{ji}(n+e_j), \quad i=\overline{1,N}, n\in X. \tag{6'}$$

Пусть

$$G_{i,n_i}(n)=\prod_{r=1}^{n_i}\frac{f_{n-re_i}^{(i)}\lambda_i(n-re_i)}{\mu_i(n-(r-1)e_i)}, \quad i=\overline{1,N}, n\in X.$$

Основной результат работы [9] состоял в том, что если положительное решение обобщенного уравнения трафика (6) удовлетворяет условию

$$\rho_j(n+e_i)\rho_i(n)=\rho_i(n+e_j)\rho_j(n), \quad i,j=\overline{1,N}, \tag{7}$$

где

$$\rho_i(n)=\frac{f_n^{(i)}\lambda_i(n)}{\mu_i(n+e_i)},$$

и ряды

$$\sum_{n\in X}[\gamma_i(n)(1-\varphi_i(n))+\mu_i(n)(1-\beta_{ii}(n))]\prod_{j=1}^{N} G_{j,n_j}(n-n_1e_1-\dots-n_{j-1}e_{j-1}), i=\overline{1,N},$$

сходятся, то марковский процесс $n(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение имеет обобщенную мультипликативную форму

$$p(n)=\prod_{i=1}^{N} G_{i,n_i}(n-n_1e_1-n_2e_2-\dots-n_{i-1}e_{i-1})p(0),$$

где

$$p(0)=\Big(\sum_{n\in X}\prod_{i=1}^{N} G_{i,n_i}(n-n_1e_1-n_2e_2-\dots-n_{i-1}e_{i-1})\Big)^{-1}.$$

Заметим, что полученное решение требует детального баланса

$$f_n^{(i)}\lambda_i(n)p(n)=\mu_i(n+e_i)p(n+e_i)$$

между соседними состояниями по направлениям, параллельным координатным осям. При этом этот детальный баланс, вообще говоря, не совпадает с детальным балансом, выражающим обратимость. Последнее соотношение можно записать в форме

$$\frac{p(n+e_i)}{p(n)}=\rho_i(n), \quad n\in X. \tag{8}$$

Потребуем, чтобы $n(t)$ был обратимым марковским процессом. Детальный баланс, требующийся для обратимости, записывается в форме

$$p(n)q(n,n+e_i)=p(n+e_i)q(n+e_i,n),$$

где $q(n,m)$ - интенсивность перехода из состояния n в состояние m. В нашем случае получим

$$p(n)\sum_k \gamma_k(n)\psi_{ki}(n) = p(n+e_i)\alpha_i(n). \tag{9}$$

Из сравнения (8) и (9) следует, что для обратимости $n(t)$ необходимо, чтобы

$$\sum_k \gamma_k(n)\psi_{ki}(n) = f_n^{(i)}\lambda_i(n)\alpha_i(n+e_i), \quad i=\overline{1,N},\ n\in X. \tag{10}$$

Но этого для обратимости мало, поскольку не учтен детальный баланс между состояниями по направлениям, не параллельным координатным осям, и детальный баланс между не соседними состояниями. Кингмэном в [10] установлено, что для обратимости марковского процесса популяции с инфинитезимальными характеристиками специального достаточного общего вида, который включает наш случай, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} &q(n+e_i,n+e_j)q(n+e_j,n+e_k)q(n+e_k,n+e_i)= \\ &=q(n+e_i,n+e_k)\ q(n+e_k,n+e_j)q(n+e_j,n+e_i), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &q(n-e_i,n-e_j)q(n-e_j,n-e_k)q(n-e_k,n-e_i)= \\ &=q(n-e_i,n-e_k)\ q(n-e_k,n-e_j)q(n-e_j,n-e_i) \end{aligned} \tag{12}$$

и чтобы отношение

$$\frac{q(n,n+e_i)p(n)}{q(n+e_i,n)p(n+e_i)}$$

не зависело от i и от n, а зависело только от $|n|=n_1+n_2+\cdots+n_N$. В силу (10) последнее условие выполняется, поскольку указанное отношение равно 1. Остается конкретизировать (11) и (12), которые в нашем случае после элементарных преобразований запишутся как

$$\beta_{ij}(n+e_i)\beta_{jk}(n+e_j)\beta_{ki}(n+e_k)=\beta_{ik}(n+e_i)\beta_{kj}(n+e_k)\beta_{ji}(n+e_j), \tag{13}$$

$$\beta_{ji}(n-e_i)\beta_{kj}(n-e_j)\beta_{ik}(n-e_k)=\beta_{ki}(n-e_i)\beta_{jk}(n-e_k)\beta_{ij}(n-e_j). \tag{14}$$

В частности, из (13) следует, что

$$\beta_{1i}(n+e_1)\beta_{ij}(n+e_i)\beta_{j1}(n+e_j)=\beta_{1j}(n+e_1)\beta_{ji}(n+e_j)\beta_{i1}(n+e_i).$$

Значит, существует $f_i(n+e_i)>0$, такое, что

$$f_i(n+e_i)\beta_{ij}(n+e_i)=f_j(n+e_j)\beta_{ji}(n+e_j) \tag{15}$$

(например, можно взять $f_i(n+e_i)=\dfrac{\beta_{1i}(n+e_1)}{\beta_{i1}(n+e_i)}$ при $i\neq 1$ и $f_1(n+e_1)=1$).

Аналогично, из (14) следует, что существует $g_i(n+e_i)>0$,

$$g_i(n-e_i)\beta_{ij}(n-e_i)=g_j(n-e_j)\beta_{ji}(n-e_j). \tag{16}$$

Легко проверяется, что обратно из существования f_i, g_i, для которых выполнены (15) и (16), вытекают соотношения (13) и (14).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Для обратимости марковского процесса $n(t)$ необходимо и достаточно выполнения равенства (10) и существования $f_i(n+e_i)>0$, $g_i(n+e_i)>0$, для которых выполняются (15) и (16).

Равенства (15) и (16) выражает тот факт, что для дюбых $i,j=\overline{1,N}$ и любых $n \pm e_i \in X$ полустохастические матрицы $(\beta_{ij}(n \pm e_i))$ описывают при фиксированном $n \pm e_i$ обратимую внутреннюю маршрутизацию. Равенство (10) означает, что интенсивность присоединения к i-му узлу приходящих извне заявок равна интенсивности ухода заявок из сети с i-го узла.

Проанализировать, в каких случаях выполняются условия (13), (14), достаточно сложно, ибо $\beta_{ij}(n)$ находятся из системы уравнений (2) – (5). Поэтому рассмотрим частный случай сети без обходов узлов заявками, для которого $f_n^{(i)} \equiv 1$. Для обратимости $n(t)$ необходимо и достаточно, чтобы была обратимой внутренняя маршрутизация, определяемая матрицами $(p_{ij}(n \pm e_i), \quad i,j=\overline{1,N})$, и выполнялось соотношение

$$\gamma_i(n)=\lambda_i(n)p_{i0}(n+e_i).$$

Обратимость накладывает достаточно жесткие ограничения на параметры сети, которые могут не выполняться для реальных сетей массового обслуживания. Тем самым показана общность полученного в [9] результата. Единственное ограничение обусловлено определенным балансом между соседними состояниями в направлениях, параллельных осям координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский Ю. В.* Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками // Автоматика и телемеханика. 1991. № 2. С. 102–110.

2. *Малинковский Ю. В.* Выходные потоки в модифицированных сетях Джексона // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 134–138.

3. *Малинковский Ю. В., Якубович О. В.* Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками: I. Модели с одним типом заявок // Автоматика и телемеханика. 1998. № 1. С. 92–106.

4. *Крыленко А. В., Малинковский Ю. В.* Сети массового обслуживания с мгновенно обслуживаемыми заявками: II. Модели с несколькими типами заявок // Автоматика и телемеханика. 1998. № 2. С. 62–71.

5. *Малинковский Ю. В., Якубович О. В.* Замкнутые сети массового обслуживания с обходами узлов заявками // Весці Акадэміі навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1999. № 1. С. 119–124.

6. *Малинковский Ю. В.* Инвариантность стационарного распределения состояний модифицированных сетей Джексона и Гордона – Ньюэлла // Автоматика и телемеханика. 1998. № 9. С. 29–36.

7. *Крыленко А. В.* Сети массового обслуживания с несколькими типами заявок, немедленным обслуживанием и обходами узлов заявками // Проблемы передачи информации 1997. Т. 33. № 3. С. 91–101.

8. *Малинковский Ю. В., Никитенко О. А.* Стационарное распределение состояний сетей с обходами и «отрицательными» заявками // Автоматика и телемеханика. 2000. № 8. С. 79–85.

9. *Евдокимович Е. В., Малинковский Ю. В.* Сети массового обслуживания с динамической маршрутизацией и динамическими вероятностными обходами узлов заявками // Проблемы передачи информации. 2001. Т. 37. № 3. С. 55–66.

10. *Kingman J. F. C.* Markov Population Processes // J. Appl. Prob. 1976. V. 6. P. 1–18.