

**О. А. Ковалева, А. В. Лубочкин**  
 (ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)  
**СТАБИЛИЗАЦИЯ МОДЕЛИ МАЯТНИКА  
 С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ,  
 ОГРАНИЧЕННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ  
 КУСОЧНО-ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ**

Рассматривается задача стабилизации неустойчивых положений равновесия нелинейной модели математического маятника, управляемого с помощью горизонтальных перемещений точки подвеса:

$$\ddot{x} - \sin x + u \cos x = 0, \quad z(0) = (x(0), \dot{x}(0)) = z_0 = (x_{10}, x_{20}), \quad (1)$$

где  $u = u(t)$  — ускорение точки подвеса в момент  $t$ .

Как известно, неустойчивыми состояниями равновесия системы (1) при  $u = u(t) \equiv 0, t \geq 0$ , на фазовой плоскости  $z = (x, \dot{x})$  являются точки

$$z^k = (x = 2k\pi, \dot{x} = 0), \quad k \in Z. \quad (2)$$

Для исследования поведения нелинейной системы (1) вводится кусочно-линейная и кусочно-постоянная аппроксимации нелинейностей, что позволяет решать задачу стабилизации при любых начальных возмущениях и любых движениях маятника.

Обратную связь  $u = u(z) = u(x, \dot{x}), z \in R^2$ , назовем ограниченной дискретной (с периодом квантования  $h > 0$ ) стабилизирующей в области  $G \in R^2$  для состояния равновесия (2), если: 1)  $u(z^k) = 0$ ; 2)  $|u(z)| \leq L, z \in G$ ; 3) траектория замкнутой системы (1):  $\ddot{x} - \sin x + u(z) \cos x = 0, z(0) = z_0 \in G$ , представляет собой непрерывное решение уравнения (1) с управлением  $u(t) = u(kh), t \in [kh, (k+1)h], k = 0, 1, \dots$ ; 4) решение  $x(t) = 2k\pi, t \geq 0$ , замкнутой системы асимптотически устойчиво, и  $G$  — область притяжения состояния равновесия  $x = 2k\pi$ .

Для построения указанной обратной связи предлагается использовать позиционное решение следующей задачи оптимального управления

$$B_\theta(z) = \min_0^\theta \int_0^\theta u^2(t) dt, \quad \ddot{x} - a(x) + b(x)u = 0, \quad (x(0), \dot{x}(0)) = z, \quad (3)$$

$$(x(\theta), \dot{x}(\theta)) = z^k, \quad |u(t)| \leq L, \quad t \in [0, \theta],$$

где  $0 < \theta = Nh < \infty$  ( $N$  — натуральное число) — параметр метода;  $a(x), b(x), x \in R$  — кусочно-линейная и кусочно-постоянная аппроксимации нелинейных элементов  $\sin x, \cos x$  соответственно. При этом минимум в задаче (3) берется не только по  $u$ , но и по моментам переключения указанных аппроксимаций с одного участка на другой.

Построенные стабилизаторы программно реализованы на языке С, просчитаны тестовые примеры.