А. И. Никитин
(ВГУ им. П. М. Машерова, Витебск)

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается следующая система нелинейных уравнений с нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + c_1(x,t)v^p,\ v_t = \Delta v + c_2(x,t)u^q,\ x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = \int_\Omega k_1(x,y,t)u^m(y,t)dy,\ x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \\ v(x,t) = \int_\Omega k_2(x,y,t)v^n(y,t)dy,\ x \in \partial\Omega, y \in \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

где p, q, m, n – положительные константы, Ω – ограниченная область в R^n, $n \geq 1$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, а $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$, $u_0(x)$, $v_0(x)$ – неотрицательные непрерывные функции. Пусть $Q_T = \Omega x(0,T)$.

Теорема 1. Пусть $\max(pq,m,n) \leq 1$. Тогда решение задачи (1) существует глобально для любых коэффициентов уравнений $c_1(x,t)$, $c_2(x,t)$, функций $k_1(x,y,t)$, $k_2(x,y,t)$ в граничных условиях и любых неотрицательных начальных данных.

Введем обозначения: λ – первое собственное значение задачи $\Delta\varphi(x) + \lambda\varphi(x) = 0$, $x \in \Omega$, $\varphi(x)|_{\partial\Omega} = 0$.

Теорема 2. Пусть выполнено одно из следующих условий:
$\int_0^\infty \inf_{\partial\Omega\times\Omega} k_1(x,y,t)e^{\lambda(1-m)t}dt = \infty$ при m>1 или $\int_0^\infty \inf_{\partial\Omega\times\Omega} k_2(x,y,t)e^{\lambda(1-n)t}dt = \infty$ при n>1 или $\int_0^\infty \min(\inf_\Omega (c_1(x,t)e^{\lambda(1-p)t}), \inf_\Omega (c_2(x,t)e^{\lambda(1-q)t}))dt = \infty$ при pq>1. Тогда задача (1) не имеет нетривиального неотрицательного глобального решения при любых нетривиальных начальных данных.

Теорема 3. Пусть $\min(pq,m,n) > 1$ и выполнены условия $\int_0^\infty \max(\sup_\Omega (c_1(x,t)e^{\lambda(1-p)t}), \sup_\Omega (c_2(x,t)e^{\lambda(1-q)t}))dt < \infty$, $\int_\Omega k_1(x,y,t)dy < A_1 e^{\gamma_1 t}$, $\int_\Omega k_2(x,y,t)dy < A_2 e^{\gamma_2 t}$, где $A_1, A_2 > 0$, $\gamma_1 < \lambda(m-1)$, $\gamma_2 < \lambda(n-1)$. Тогда существует неотрицательное глобальное решение задачи (1) с достаточно малыми начальными данными.

Литература

1. A. Gladkov and K.I. Kim, "Blow-up of solutions for semilinear heat equation with nonlinear nonlocal boundary condition,"journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 338, no. 1, pp. 264-273, 2008.