Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (105), 2017

УДК 539.3

Деформирование упругой трехслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем

А.С. Зеленая

Исследован изгиб несимметричных по толщине упругих трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем. Кинематические гипотезы основаны на гипотезе ломаной линии: для внешних слоев принимаются гипотезы Кирхгофа, в жестком сжимаемом заполнителе деформированная нормаль остается прямолинейной. Равномерно распределенная нагрузка приложена к внешней поверхности первого несущего слоя.
Ключевые слова: трехслойная прямоугольная пластина, сжимаемый заполнитель, несимметричная по толщине пластина.

The bending of asymmetric elastic three-layer plates with compressible filler is investigated. Kinematic hypotheses are based on the hypothesis of a broken line: Kirchhoff's hypotheses are accepted for the outer layers; in the rigid compressible filler the deformed normal remains rectilinear. A uniformly distributed load is applied to the outer surface of the first carrier layer.
Keywords: three-layer rectangular plate, compressible filler, asymmetrical in thickness plate.

Введение. В современном строительстве находят все более широкое применение многослойные конструкции, которые при рациональном сочетании материалов с различными свойствами становятся способными сопротивляться многообразным внешним воздействиям и позволяют сократить расходы в период эксплуатации. Частным случаем многослойных конструкций являются трехслойные элементы конструкций. При заданных ограничениях на прочность и жесткость, с точки зрения минимума весовых показателей в условиях работы на изгиб, трехслойные конструкции оказываются близкими оптимальным.

Статическое и динамическое деформирование трехслойных конструкций, связанных с упругим основанием, исследовано в монографии [1]. Статьи [2]−[5] посвящены исследованию трехслойных прямоугольных и круговых пластин. В работах [6]–[10] рассмотрены изгиб и колебания трехслойного стержня. В статье [11] исследованы радиальные колебания трехслойной цилиндрической оболочки со сжимаемым заполнителем.

Здесь выполнена постановка и решение задачи о статическом деформировании упругих прямоугольных трехслойных пластин со сжимаемым заполнителем.

1. Постановка краевой задачи. Рассматривается несимметричная по толщине упругая трехслойная прямоугольная пластина, состоящая из двух несущих слоев и сжимаемого заполнителя. Несущие слои предназначены для восприятия основной части механической нагрузки, поэтому они выполняются из материалов высокой прочности и жесткости. Заполнитель служит для образования монолитной конструкции, обеспечивает перераспределение усилий между несущими слоями, тем самым гарантирует совместную работу слоев пластины (рисунок 1, а).

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа. В жестком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта перемещения непрерывны. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном и продольном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рисунок 1, б). К внешней поверхности первого несущего слоя приложена произвольная распределённая нагрузка, проекции которой на координатные оси: $q(x, y)$, $p_x(x, y)$, $p_y(x, y)$.

За искомые функции принимаются продольные перемещения $u_{kx}(x, y)$, $u_{ky}(x, y)$ и прогибы $w_k(x, y)$ срединных поверхностей несущих слоев ($k = 1, 2$).

Продольные перемещения $u^{(k)}(x,y,z)$ и прогибы $w^{(k)}(x,y,z)$ в слоях можно выразить через искомые функции $w_1(x,y)$, $w_2(x,y)$, $u_{1x}(x,y)$, $u_{1y}(x,y)$, $u_{2x}(x,y)$, $u_{2y}(x,y)$ следующими соотношениями ($k=1,2,3$):

– в несущих слоях ($c \le z \le c+h_1$)

$$u_x^{(1)} = u_{1x} - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,x}, \quad w^{(1)} = w_1,$$

$$u_y^{(1)} = u_{1y} - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,y}, \quad u_x^{(2)} = u_{2x} - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,x},$$

$$w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \le z \le -c), \quad u_y^{(2)} = u_{2y} - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,y};$$

– в заполнителе ($-c \le z \le c$)

$$u_x^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{1x} + \frac{h_1}{4} w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{2x} - \frac{h_2}{4} w_{2,x}\right),$$

$$u_y^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{1y} + \frac{h_1}{4} w_{1,y}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_{2y} - \frac{h_2}{4} w_{2,y}\right),$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right) w_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right) w_2, \tag{1.1}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя.

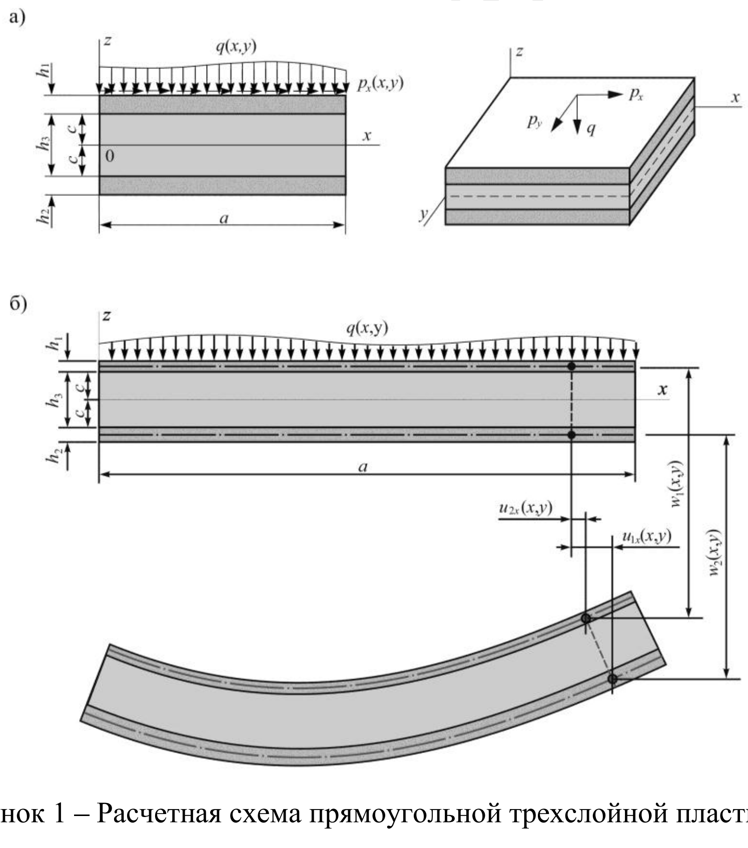


Рисунок 1 – Расчетная схема прямоугольной трехслойной пластины

Компоненты тензора деформаций в слоях получим, используя выражения (1.1) и соотношения Коши [12, с. 22].

Уравнения равновесия рассматриваемой трехслойной пластины получим, используя вариационный принцип Лагранжа

$$\delta A = \delta W, \tag{1.2}$$

где δA, δW – вариации работы внешней и внутренней сил.

Вариация работы внешней поверхностной нагрузки

$$\delta A=\iint\limits_S (p_x(\delta u_{1x}-\frac{h_1}{2}\delta w_1,_x)+p_y(\delta u_{1y}-\frac{h_1}{2}\delta w_1,_y)+q\delta w_1)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,. \qquad (1.3)$$

Вариация работы внутренних сил упругости

$$\delta W=\iint\limits_S\left\{\sum_{k=1}^{3}\int\limits_{h_k}(\sigma_{xx}^{(k)}\delta\varepsilon_{xx}^{(k)}+\sigma_{yy}^{(k)}\delta\varepsilon_{yy}^{(k)}+2\sigma_{xy}^{(k)}\delta\varepsilon_{xy}^{(k)})\,\mathrm{d}\,z+\right.$$
$$\left.+2\int\limits_{h_3}\left(\sigma_{xz}^{(3)}\delta\varepsilon_{xz}^{(3)}+\sigma_{yz}^{(3)}\delta\varepsilon_{yz}^{(3)}+\sigma_{zz}^{(3)}\delta\varepsilon_{zz}^{(3)}\right)dz\right\}\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,. \qquad (1.4)$$

Подставив (1.3), (1.4) в (1.2), а также используя выражения для перемещений (1.1) была получена система шести дифференциальных уравнений равновесия пластины в усилиях:

$$H_{1x}-V_1,_y-P_{1x},_x=p_x\,,$$
$$H_{1x}+V_2,_y+P_{2x},_x=0\,,$$
$$H_{1y}-V_1,_x-P_{1y},_y=p_y\,,$$
$$H_{1y}+V_2,_x+P_{2y},_y=0\,,$$
$$S_{1x},_{xx}+H_2-T_{1x},_x-U_1,_{xy}+S_{1y},_{yy}-T_{1y},_y=q+\frac{p_x,_x h_1}{2}+\frac{p_y,_y h_1}{2}\,,$$
$$S_{2x},_{xx}-H_2-T_{2x},_x-U_2,_{xy}+S_{2y},_{yy}-T_{2y},_y=0\,, \qquad (1.5)$$

где H_{kx}, H_{ky},V_k, P_{kx}, P_{ky}, $S_{kx},S_{ky},H_k,T_{kx},T_{ky},U_k$ – обобщенные усилия.

В слоях рассматриваемой пластины для связи тензоров напряжений и деформаций используются соотношения закона Гука в девиаторно-шаровой форме:

$$s_{ij}^{(k)}=2G_k э_{ij}^{(k)}\,,\ \ \sigma^{(k)}=3K_k\varepsilon^{(k)}\ \ (i,j=x,y,z\,,\ k=1,2,3), \qquad (1.6)$$

где $-G_k$ сдвиговой модуль упругости материалов, $э_{ij}^{(k)}$ – компоненты девиатора тензора деформаций, K_k – объемный модуль упругости материалов, $\varepsilon^{(k)}$ – шаровая часть тензора деформаций.

Введем внутренние усилия и моменты, отнесенные к единице длины:

$$N_{xx}^{(k)}=\int\limits_{h_k}\sigma_{xx}^{(k)}\,\mathrm{d}\,z\,,\ \ N_{yy}^{(k)}=\int\limits_{h_k}\sigma_{yy}^{(k)}\,\mathrm{d}\,z\,,\ \ M_{xx}^{(k)}=\int\limits_{h_k}\sigma_{xx}^{(k)}z\,\mathrm{d}\,z\,,\ \ M_{yy}^{(k)}=\int\limits_{h_k}\sigma_{yy}^{(k)}z\,\mathrm{d}\,z\,,$$
$$M_{xy}^{(k)}=\int\limits_{h_k}\sigma_{xy}^{(k)}z\,\mathrm{d}\,z\,,\ \ Q_{xy}{}^{(k)}=\int\limits_{h_k}\sigma_{xy}^{(k)}\,\mathrm{d}\,z\,,\ \ N_{zz}^{(3)}=\int\limits_{h_3}\sigma_{zz}^{(3)}\,\mathrm{d}\,z\,,\ \ M_{xz}^{(3)}=\int\limits_{h_3}\sigma_{xz}^{(3)}z\,\mathrm{d}\,z\,,$$
$$M_{yz}^{(3)}=\int\limits_{h_3}\sigma_{yz}^{(3)}z\,\mathrm{d}\,z\,,\ \ Q_{xz}{}^{(3)}=\int\limits_{h_3}\sigma_{xz}^{(3)}\,\mathrm{d}\,z\,,\ \ Q_{yz}{}^{(3)}=\int\limits_{h_3}\sigma_{yz}^{(3)}\,\mathrm{d}\,z\,, \qquad (1.7)$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$, $\sigma_{zz}^{(3)}$ – компоненты тензора напряжений; интегралы берутся по толщине k-го слоя.

Применив соотношения закона Гука (1.6), выразим внутренние усилия и моменты (1.7) через функции u_{1x}, u_{2x}, u_{1y}, u_{2y}, w_1, w_2 Подставив полученные выражения в систему уравнений равновесия (1.5), получим систему дифференциальных уравнений, описывающих перемещения в упругой трехслойной пластине со сжимаемым заполнителем:

$$a_1u_{1x}-a_1u_{2x}-a_4u_{1x},_{xx}-a_5u_{2x},_{xx}-a_{19}u_{1x},_{yy}-a_{18}u_{2x},_{yy}-a_{21}u_{1y},_{xy}-a_{23}u_{2y},_{xy}+a_2w_1,_x+$$
$$+a_3w_2,_x-2a_{24}w_1,_{xyy}+a_{25}w_2,_{xyy}-2a_6w_1,_{xxx}+a_7w_2,_{xxx}=p_x\,,$$
$$-a_1u_{1x}+a_1u_{2x}-a_5u_{1x},_{xx}-a_9u_{2x},_{xx}-a_{18}u_{1x},_{yy}-a_{20}u_{2x},_{yy}-a_{23}u_{1y},_{xy}-a_{22}u_{2y},_{xy}-a_{10}w_1,_x-$$
$$-a_{17}w_2,_x-a_{24}w_1,_{xyy}+2a_{25}w_2,_{xyy}-a_6w_1,_{xxx}+2a_7w_2,_{xxx}=0\,,$$
$$a_1u_{1y}-a_1u_{2y}-a_4u_{1y},_{yy}-a_5u_{2y},_{yy}-a_{19}u_{1y},_{xx}-a_{18}u_{2y},_{xx}-a_{21}u_{1x},_{xy}-a_{23}u_{2x},_{xy}+a_2w_1,_y+$$
$$+a_3w_2,_y-2a_{24}w_1,_{xxy}+a_{25}w_2,_{xxy}-2a_6w_1,_{yyy}+a_7w_2,_{yyy}=p_y\,,$$
$$-a_1u_{1y}+a_1u_{2y}-a_5u_{1y},_{yy}-a_9u_{2y},_{yy}-a_{18}u_{1y},_{xx}-a_{20}u_{2y},_{xx}-a_{23}u_{1x},_{xy}-a_{22}u_{2x},_{xy}-a_{10}w_1,_y-$$

$$-a_{17}w_2,_y - a_{24}w_1,_{xxy} + 2a_{25}w_2,_{xxy} - a_6w_1,_{yyy} + 2a_7w_2,_{yyy} = 0,$$

$$-a_2u_{1x},_x - a_2u_{1y},_y + a_{10}u_{2x},_x + a_{10}u_{2y},_y + 2a_6u_{1x},_{xxx} + a_6u_{2x},_{xxx} + 2a_6u_{1y},_{yyy} + a_6u_{2y},_{yyy} +$$
$$+2a_{24}u_{1x},_{xyy} + a_{24}u_{2x},_{xyy} + 2a_{24}u_{1y},_{xxy} + a_{24}u_{2y},_{xxy} + a_{11}w_1,_{xx} + a_{11}w_1,_{yy} - a_{12}w_2,_{xx} -$$
$$-a_{12}w_2,_{yy} + a_{15}w_1,_{xxxx} + a_{15}w_1,_{yyyy} - a_{16}w_2,_{xxxx} - a_{16}w_2,_{yyyy} + a_{26}w_1,_{xxyy} - a_{28}w_2,_{xxyy} +$$
$$+a_8w_1 - a_8w_2 = q + \frac{p_x,_x h_1}{2} + \frac{p_y,_y h_1}{2},$$

$$-a_3u_{1y},_y - a_3u_{1x},_x + a_{17}u_{2y},_y + a_{17}u_{2x},_x - a_7u_{1y},_{yyy} - a_7u_{1x},_{xxx} - 2a_7u_{2y},_{yyy} - 2a_7u_{2x},_{xxx} -$$
$$-2a_{27}u_{2y},_{xxy} - a_{25}u_{1y},_{xxy} - 2a_{25}u_{2x},_{xyy} - a_{25}u_{1x},_{xyy} - a_{12}w_1,_{xx} - a_{12}w_1,_{yy} + a_{14}w_2,_{xx} + a_{14}w_2,_{yy} +$$
$$-a_{16}w_1,_{xxxx} - a_{16}w_1,_{yyyy} + a_{13}w_2,_{xxxx} + a_{13}w_2,_{yyyy} - a_{28}w_1,_{xxyy} + a_{27}w_2,_{xxyy} -$$
$$-a_8w_1 + a_8w_2 = 0, \qquad (1.8)$$

где a_i ($i = 1,...,28$) – коэффициенты, выражающиеся через объемный K_k и сдвиговой G_k модули упругости материалов, и геометрические параметры слоев пластины.

Краевая задача (1.8) об изгибе пластины замыкается добавлением граничных условий. Принимаем граничные условия, соответствующие свободному опиранию пластины по кромкам на неподвижные в пространстве жесткие опоры:

$$\text{при } x = 0, a \qquad u_{ky} = w_k = S_{kx} = P_{kx} = 0;$$
$$\text{при } y = 0, b \qquad u_{kx} = w_k = S_{ky} = P_{ky} = 0. \qquad (1.9)$$

Выразив усилия P_{kx}, P_{ky}, S_{kx}, S_{ky} через перемещения и подставив в (1.9), получим граничные условия в перемещениях (k = 1,2):

$$\text{при } x = 0, a \qquad u_{kx},_x = u_{ky} = w_k = w_k,_{xx} = 0;$$
$$\text{при } y = 0, b \qquad u_{ky},_y = u_{kx} = w_k = w_k,_{yy} = 0. \qquad (1.10)$$

Таким образом, получена система из шести линейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно искомых перемещений.

2. Решение краевой задачи в перемещениях. Решение будем искать методом Бубнова-Галеркина. Для этого искомые перемещения представляем в виде разложения в двойные тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (1.9), (1.10):

$$u_{1x} = \sum_{n,m=0}^{\infty} U_{1xmn} \cos\frac{\pi nx}{a} \sin\frac{\pi my}{b}, \qquad u_{2x} = \sum_{n,m=0}^{\infty} U_{2xmn} \cos\frac{\pi nx}{a} \sin\frac{\pi my}{b},$$
$$u_{1y} = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{1ymn} \sin\frac{\pi nx}{a} \cos\frac{\pi my}{b}, \qquad u_{2y} = \sum_{m,n=0}^{\infty} U_{2ymn} \sin\frac{\pi nx}{a} \cos\frac{\pi my}{b},$$
$$w_1 = \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{1mn} \sin\frac{\pi nx}{a} \sin\frac{\pi my}{b}, \qquad w_2 = \sum_{n,m=0}^{\infty} W_{2mn} \sin\frac{\pi nx}{a} \sin\frac{\pi my}{b}, \qquad (2.1)$$

где U_{1xmn}, U_{2xmn}, U_{1ymn}, U_{2ymn}, W_{1mn}, W_{2mn} – искомые амплитуды перемещений прямоугольной трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.

Положим продольную нагрузку $p_x \equiv 0$, $p_y \equiv 0$. Поперечную нагрузку q представим в виде разложения в двойной тригонометрический ряд:

$$q = \sum_{n,m=0}^{\infty} q_{mn} \sin\frac{\pi nx}{a} \sin\frac{\pi my}{b}, \quad q_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y) \sin\frac{\pi nx}{a} \sin\frac{\pi my}{b}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (2.2)$$

После подстановки перемещений (2.1) и нагрузки (2.2) в систему уравнений равновесия (1.8) и необходимых преобразований получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений U_{1xmn}, U_{2xmn}, U_{1ymn}, U_{2ymn}, W_{1mn}, W_{2mn}:

$$b_1U_{1xmn} + b_2U_{2xmn} + b_{11}U_{1ymn} + b_{12}U_{2ymn} + b_3W_{1mn} + b_4W_{2mn} = 0,$$
$$b_2U_{1xmn} + b_5U_{2xmn} + b_{12}U_{1ymn} + b_{13}U_{2ymn} + b_6W_{1mn} + b_7W_{2mn} = 0,$$

$$b_{11}U_{1xmn}+b_{12}U_{2xmn}+b_{14}U_{1ymn}+b_{15}U_{2ymn}+b_{16}W_{1mn}+b_{17}W_{2mn}=0,$$
$$b_{12}U_{1xmn}+b_{13}U_{2xmn}+b_{15}U_{1ymn}+b_{18}U_{2ymn}+b_{19}W_{1mn}+b_{20}W_{2mn}=0,$$
$$b_{3}U_{1xmn}+b_{6}U_{2xmn}+b_{16}U_{1ymn}+b_{19}U_{2ymn}+b_{8}W_{1mn}+b_{9}W_{2mn}=q_{mn},$$
$$b_{4}U_{1xmn}+b_{7}U_{2xmn}+b_{17}U_{1ymn}+b_{20}U_{2ymn}+b_{9}W_{1mn}+b_{10}W_{2mn}=0,$$

где коэффициенты b_i выражаются через величины a_i и зависят от параметров m и n.

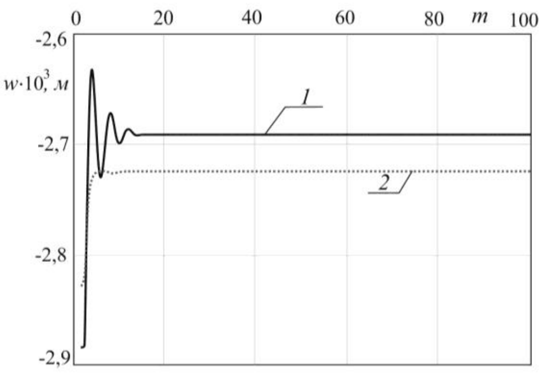
Таким образом, получено решение краевой задачи об изгибе прямоугольной упругой трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем.

3. Численный параметрический анализ. Принимается, что пакет трехслойной пластины составлен из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, толщины слоев $h_1=0,01$ м, $h_2=0,04$ м, $h_3=0,2$ м. Механические характеристики материалов взяты в монографии [12, с. 64, 75]. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластины интенсивностью $q=-2$ МПа, размеры пластины $a=1$ м, $b=1$ м.

Рисунок 2 а) иллюстрирует сходимость рядов (2.1) на примере прогиба первого w_1 и второго w_2 слоев в середине пластины. Номер кривой совпадает с номером слоя. Как видно из графика, на примере прогиба первого слоя w_1, сходимость при суммировании достаточно хорошая, поэтому для вычисления перемещений можно ограничиться первыми 19 членами ряда. При этом их сумма будет отличаться от первого слагаемого на 6,6 %. Если добавить ещё 50 членов ряда, то они внесут поправку, не превышающую 0,03 %.

Рисунок 2 б) иллюстрирует сходимость рядов (2.1) на примере продольных перемещений относительно оси x первого u_{1x} и второго u_{2x} слоев ($x=0$, $y=0,5b$). Номер кривой совпадает с номером слоя. На примере продольных перемещений относительно оси x можно заметить, что сходимость не такая хорошая, как для прогибов, поэтому для вычисления продольных перемещений необходимо ограничиться первыми 30 членами ряда. Последующее добавление членов ряда не внесет значительную поправку. В дальнейшем при суммировании принималось 50 членов ряда.

а)



б)

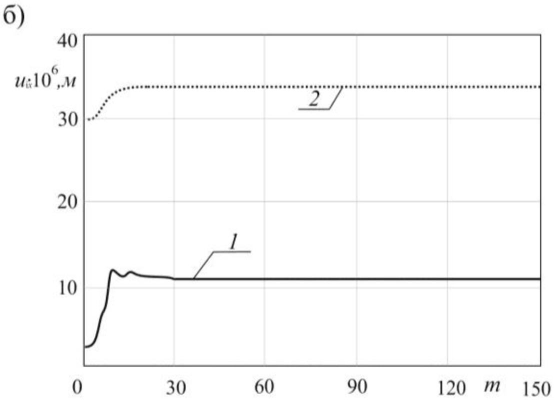


Рисунок 2 – Зависимость перемещений от количества суммируемых членов ряда

На рисунке 3 показаны изменения прогибов w_i и продольных перемещений u_{ix} в сечении $y=0,5b$ вдоль оси x. Толщины слоев $h_1=0,04$ м, $h_2=0,01$ м, $h_3=0,2$ м. Номер кривой совпадает с номером слоя. В центре пластины продольные перемещения равны нулю и меняют свой знак, у торцов – принимают максимальные значения, причем у кромок в 10 раз больше во втором слое, чем в первом. Это объясняется разницей в толщинах слоев. Разность прогибов дает величину полной деформации заполнителя. Здесь везде выполняется условие $|w_1|>|w_2|$, что соответствует обжатию заполнителя по всей длине пластины.

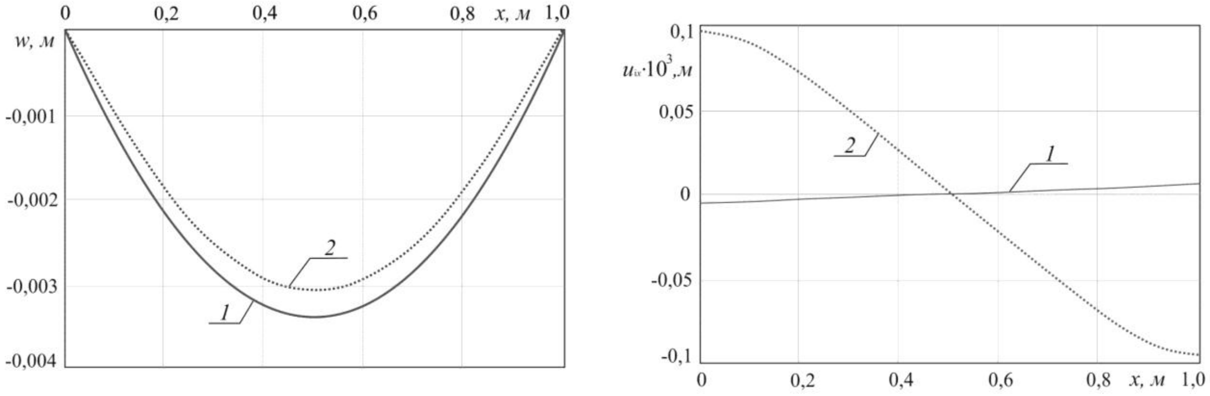


Рисунок 3 – Изменения прогибов и продольных перемещений

Подтверждение этому служит график изменения относительной поперечной деформации ε_{zz} (график в процентах) вдоль оси x ($y = 0{,}5\ b$) на рисунке 4. Кривая везде отрицательна, что указывает на обжатие заполнителя, максимум достигается посередине пластины.

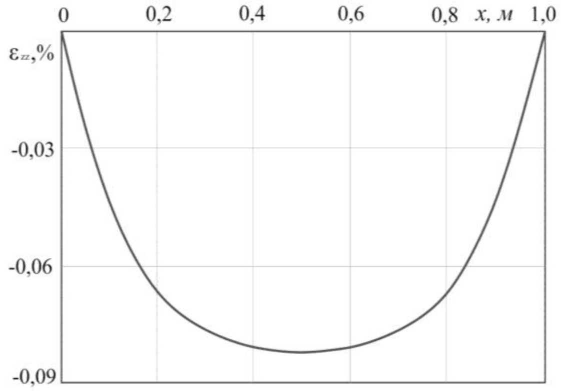


Рисунок 4 – Изменение относительной поперечной деформации

Заключение. Полученное в работе решение можно использовать для исследования изгиба упругой трёхслойной прямоугольной пластины со сжимаемым заполнителем при действии непрерывных распределенных нагрузок.

Литература

1. Плескачевский, Ю.М. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю.М. Плескачевский, Э.И. Старовойтов, Д.В. Леоненко. – М. : ФИЗМЛИТ, 2011. – 560 с.

2. Старовойтов, Э.И. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании / Э.И. Старовойтов, Е.П. Доровская // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 3. – С. 21–28.

3. Маевская, С.С. О влиянии магнитного поля на формы свободных и вынужденных колебаний трехслойной пластины, содержащей магнитореологический эластомер / С.С. Маевская, Г.И. Михасев // Механика машин, механизмов и материалов. – 2014. – № 3 (28). – С. 37–42.

4. Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании / А.Г. Горшков [и др.] // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2005. – № 1. – С. 16–22.

5. Starovoitov, É.I. Vibrations of round three-layer plates under the action of various types of surface loads / É.I. Starovoitov, A.V. Yarovaya, D.V. Leonenko // Strength of materials. – 2003. – Vol. 35, № 4. – P. 346–352.

6. Starovoitov, É.I. Elastoplastic bending of a sandwich bar on an elastic foundation / É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko, A.V. Yarovaya // International Applied Mechanics. – 2007. – Vol. 43, № 4. – P. 451–459.

7. Starovoitov, E.I. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation / E.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol. 46, № 2. – P. 291–298.

8. Леоненко, Д.В. Колебания трехслойного стержня под действием импульсных нагрузок различных форм / Д.В. Леоненко // Материалы, технологии, инструменты. – 2004. – Т. 9, № 2. – С. 23–27.

9. Kubenko, V.D. Natural vibration of a sandwich beam on an elastic foundation / V.D. Kubenko, Yu.M. Pleskachevskii, É.I. Starovoitov, D.V. Leonenko // International applied mechanics. – 2006. – Vol. 42, № 5. – P. 541–547.

10. Леоненко, Д.В. Вынужденные колебания трехслойного стержня на упругом безынерционном основании / Д.В. Леоненко // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2007. – № 3. – С. 70–74.

11. Леоненко, Д.В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек / Д.В. Леоненко // Механика машин, механизмов и материалов. – 2010. – № 3 (12). – С. 53–56.

12. Старовойтов, Э.И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э.И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. – 343 с.

Белорусский государственный
университет транспорта

Поступила в редакцию 23.05.2017