Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (105), 2017

УДК 517. 51; 517. 53

О точности экстремальных произведений Бляшке относительно специальных весов

Е.В. Ковалевская

При изучении наилучших рациональных приближений некоторых функций важную роль играют произведения Бляшке. Ниже приведены теоремы 1 и 2 из [1] о существовании специальных произведений для полуплоскости. Эти теоремы в дальнейшем нами будут применяться для изучения наилучших приближений преобразований Коши некоторых мер и, в частности, функций Маркова. Поэтому важное значение имеет вопрос о точности оценок, полученных в этих теоремах. В данной работе показано, что оценки из теорем 1 и 2 являются точными в смысле порядка. Аналогичные вопросы рассмотрены также для круга.
Ключевые слова: произведения Бляшке, рациональная аппроксимация функций.

When studying the best rational approximations of certain functions Blaschke products play an important role. Theorems 1 and 2 from [1] on the existence of special products for a half-plane are provided. These theorems will be used below for studying best approximations of Cauchy transforms of certain measures and, in particular, of Markov functions. Therefore, the importance of the accuracy of the estimates obtained in these theorems is important. In this paper it is shown that the estimates in Theorems 1 and 2 are exact in the sense of order. Similar questions are also considered for the circle.
Keywords: products of Blaschke, rational approximation of functions.

Введение. Пусть комплексные числа $\{z_k\}_{k=1}^n$ принадлежат правой полуплоскости $\Pi = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. Тогда рациональная функция

$$B_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{z + \bar{z}_k},$$

называется произведением Бляшке степени n для полуплоскости Π.

Ниже через $c_k(...)$ мы обозначаем некоторые положительные величины, зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

Теорема 1 [1]. *Для любых* $\beta < 0$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *существует произведение Бляшке* B_n *для полуплоскости* Π *с нулями лишь на* $(0, 1]$ *такое, что*

$$\ln^{\beta} \frac{e}{x} \cdot |B_n(x)| \le c_1(\beta) n^{\beta}, \ \ 0 < x \le 1.$$

Теорема 2 [1]. *Для любых* $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *существует произведение Бляшке* B_n *для полуплоскости* Π *с нулями лишь на* $(0,1]$ *такое, что*

$$x^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{e}{x} \cdot |B_n(x)| \le c_2(\alpha, \beta) n^{\beta/2} e^{-\pi\sqrt{\alpha n}}, \ \ 0 < x \le 1.$$

Отметим, что теорема 2 для $\beta = 0$ ранее доказана Н.С. Вячеславовым [2]. Этот случай в работах [2]–[4] играет ключевую роль при исследовании наилучших рациональных приближений функций типа x^{α}.

Далее в теоремах 3 и 4 соответственно утверждается, что оценки из теорем 1 и 2 являются точными в смысле порядка когда $n \to \infty$, а параметры α, β фиксированы.

Теорема 3. *Пусть* $\beta < 0$ *и* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого произведения Бляшке* B_n *для полуплоскости* Π *выполняется неравенство*

$$\max_{0 < x \le 1} \left(\ln^{\beta} \frac{e}{x} \cdot |B_n(x)| \right) \ge c_3(\beta) n^{\beta}. \qquad (1)$$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *и* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого произведения Бляшке* B_n *для полуплоскости* Π *выполняется неравенство*

$$\max_{0<x\le 1}\left(x^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{e}{x} \cdot \left|B_n(x)\right| \right) \ge \mathrm{c}_4(\alpha,\beta) n^{\beta/2}\, \mathrm{e}^{-\pi\sqrt{\alpha n}}. \tag{2}$$

Для доказательства теорем 3 и 4 нам понадобится следующая лемма 1.

Лемма 1. *Для любого произведения Бляшке* B_n *и любых* $0 \le \alpha < \beta \le +\infty$ *имеет место неравенство*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln\left|B_n(x)\right|}{x} dx \ge -\frac{\pi^2 n}{2}.$$

Доказательство. Согласно лемме Ньюмена (см., например, [5, с. 219]) для любого $z \in J$ выполняется неравенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} \ln\left|\frac{x-z}{x+\overline{z}}\right| \cdot \frac{dx}{x} \ge -\frac{\pi^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\ln\left|B_n(x)\right|}{x} dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha}^{\beta} \ln\left|\frac{x-z_k}{x+\overline{z}_k}\right| \cdot \frac{dx}{x} \ge -\frac{\pi^2 n}{2}.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Для рассматриваемого произведения Бляшке B_n обозначим через $\lambda_n(\beta)$ левую часть неравенства (1). Таким образом, получим

$$\lambda_n(\beta) \ge \ln^{\beta} \frac{e}{x} \cdot \left|B_n(x)\right|, \;\; x \in (0, 1]. \tag{3}$$

Теперь прологарифмируем обе части неравенства (3) и затем умножим на $1/x$. В итоге получим, что

$$\frac{\ln \lambda_n(\beta)}{x} \ge \frac{\beta}{x} \ln\ln\frac{e}{x} + \frac{\ln\left|B_n(x)\right|}{x}, \quad 0 < x \le 1.$$

После этого полученное неравенство проинтегрируем по отрезку $\left[e^{-n},\, 1\right]$ и воспользуемся леммой 1. В результате получим неравенство

$$n \ln \lambda_n(\beta) \ge \beta\left[(n+1)\ln(n+1) - n\right] - \frac{\pi^2 n}{2}.$$

Наконец, разделим обе части этого неравенства на n и преобразуем к виду

$$\ln \lambda_n(\beta) \ge \left[-\frac{\pi^2}{2} - \beta + \beta \cdot \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n}{n} \right] + \beta \ln n.$$

Нетрудно убедится, что выражение в квадратных скобках достигает минимального значения по $n \in \mathbb{N}$ при $n = 1$. Таким образом, при всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\ln \lambda_n(\beta) \ge \left(\beta \cdot \ln\frac{4}{e} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \beta \ln n.$$

Следовательно, неравенство (1) выполняется с константой

$$c_3(\beta) = \exp\left(\beta \cdot \ln\frac{4}{e} - \frac{\pi^2}{2} \right).$$

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Для рассматриваемого произведения Бляшке B_n обозначим через $w_n(\alpha,\beta)$ левую часть неравенства (2). Согласно определению $w_n(\alpha,\beta)$ имеем

$$w_n(\alpha,\beta) \ge x^{\alpha} \ln^{\beta}\frac{e}{x}\cdot\left|B_n(x)\right|,\ \ 0<x\le 1. \tag{4}$$

Теперь прологарифмируем обе части неравенства (4), затем умножим на $1/x$. В итоге получим, что

$$\frac{\ln w_n(\alpha,\beta)}{x} \ge \alpha\frac{\ln x}{x}+\frac{\beta}{x}\ln\ln\frac{e}{x}+\frac{\ln\left|B_n(x)\right|}{x},\ \ x\in(0,\,1]. \tag{5}$$

Далее проинтегрируем неравенство (5) по отрезку $\left[\exp(-\pi\sqrt{n/\alpha}),\ 1\right]$ и воспользуемся леммой 1. В итоге получим

$$\pi\sqrt{n/\alpha}\cdot\ln w_n(\alpha,\,\beta) \ge -\pi^2 n+\beta\left[(\pi\sqrt{n/\alpha}+1)\ln(\pi\sqrt{n/\alpha}+1)-(\pi\sqrt{n/\alpha}+1)\right]. \tag{6}$$

Сейчас обе части неравенства (6) разделим на $\pi\sqrt{n/\alpha}$ и преобразуем к виду

$$\ln w_n(\alpha,\,\beta) \ge -\pi\sqrt{\alpha n}+\frac{\beta}{2}\ln n+\beta\cdot r_n(\alpha). \tag{7}$$

Несложно заметить, что при фиксированном $\alpha>0$ введённый множитель $r_n(\alpha)$ ограничен относительно $n\in\mathbb{N}$. Поэтому для получения (2) остаётся пропотенцировать неравенство (7).

Теорема 4 доказана.

Теперь приведем теоремы 5 и 6 являющиеся соответственно аналогами теорем 1, 2 и для круга. Путь числа $\{w_k\}_{k=1}^{n}$ принадлежат кругу $\mathrm{D}=\{w:|w|<1\}$. Тогда рациональная функция

$$b_n(w)=\prod_{k=1}^{k=n}\frac{w-w_k}{1-\overline{w_k}w},$$

называется произведением Бляшке порядка n для круга D.

Теорема 5 [1]. *Для любых* $\beta<0$ *и* $n\in\mathbb{N}$ *существует произведение Бляшке* $b_n(w)$ *для круга* D *с нулями лишь на* $[0,1)$ *такое, что*

$$\ln^{\beta}\frac{e}{1-x}\cdot\left|b_n(x)\right|\le c(\beta)n^{\beta},\ \ 0\le x<1$$

Теорема 6 [1]. *Для любых* $\alpha>0,\ \beta\in R$ *и* $n\in\mathbb{N}$ *существует произведение Бляшке* $b_n(w)$ *для круга* D *с нулями лишь на* $[0,1)$ *такое, что*

$$(1-x)^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{e}{1-x}\cdot\left|b_n(x)\right|\le c(\alpha,\beta)n^{\beta/2}e^{-\pi\sqrt{\alpha n}},\ \ 0\le x<1.$$

Следующие теоремы 7 и 8 соответственно утверждают, что оценки из теорем 5 и 6 в смысле порядка являются точными, когда $n\to\infty$, а параметры $\alpha,\ \beta$ фиксированы.

Теорема 7. *Пусть* $\beta<0$ *и* $n\in\mathbb{N}$. *Тогда для любого произведения Бляшке* b_n *для круга* D *выполняется неравенство*

$$\max_{0<x\le 1}\left(\ln^{\beta}\frac{e}{1-x}\cdot\left|b_n(x)\right|\right)\ge c(\beta)n^{\beta}.$$

Теорема 8. *Пусть* $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ *и* $n\in\mathbb{N}$. *Тогда для любого произведения Бляшке* $b_n(w)$ *для круга* D *выполняется неравенство*

$$\max_{0<x\le 1}\left((1-x)^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{e}{1-x}\cdot\left|b_n(x)\right|\right)\ge \mathrm{c}(\alpha,\beta)n^{\beta/2}\,\mathrm{e}^{-\pi\sqrt{\alpha n}}.$$

Теоремы 7 и 8 равносильны соответственно теоремам 3 и 4. В этом легко убедиться, используя дробно-линейное отображение

$$z=\frac{1-w}{1+w}$$

Круга D на полуплоскость Π.

Литература

1. Ковалевская, Е.В. Построение экстремальных произведений Бляшке / Е.В. Ковалевская, А.А. Пекарский // Веснік ГрГУ ім. Я. Купалы. Сер. 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2017. – Т. 7, № 1. – С. 6–14.

2. Вячеславов, Н.С. О наименьших уклонениях функции $signx$ и её первообразных от рациональных функций в метриках L_p, $0 < p < \infty$ / Н.С. Вячеславов // Математический сборник. – 1977. – Т. 103 (145), № 1 (5). – С. 24–36.

3. Andersson, J.-E. Rational approximation to function like x^{α} in integral norms / J.E. Andersson // Analysis Math. – 1988. – Vol. 14, № 1. – P. 11–25.

4. Пекарский, А.А. Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова / А.А. Пекарский // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7, № 2. – С. 121–132.

5. Lorentz, G.G. Constructive Approximation. Springer / G.G. Lorentz, M.V. Golitschek, Y. Makovoz // Berlin, 1996. – 651 p.

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 28.09.2017