УДК 517.977

Е.А.РУЖИЦКАЯ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ОГРАНИЧЕННЫМИ ИНЕРЦИОННЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

The problem of linear dymanic systems stabilization functioning under conditions influencing on it perturbations by inertial controls presenting continuous functions with bounded derivatives is described. For construction of the bounded feedback stabilization the accompanyng problem optimal control is introduced. Optimal disconnection programm-positional feedback is constructed for it and it is proved, that the latter has stabilization properties for under the action perturbations. The result are illustrated by examples dymanic system stabilization of the fourth order.

Устойчивость [1] и инвариантность [2] по отношению к внешним возмущениям являются важнейшими свойствами систем управления. Совместное изучение этих проблем началось с работы Зеймса [3]. Сформулированная автором задача получила название H_∞ – задачи теории управления и была изучена в 80-е гг. (см. напр. [4,5]). Однако она базировалась на линейных обратных связях и не учитывала геометрических ограничений на управляющие воздействия. В реальных условиях используются ограниченные управления, которые могут менять свои значения лишь с определенной (иногда очень большой) скоростью. В данной статье на основе таких управлений будем строить стабилизирующие обратные связи, которые дополнительно защищают систему от действия ограниченных возмущений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{x} = Ax + bu + dw, \ (\operatorname{rank}(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b) = n)\,, \tag{1}$$

где $x=x(t)$ – n-вектор состояния системы в момент $t\geq 0$, $u=u(t)$ – значение управляющего воздействия, $w=w(t)$ – значение возмущения.

Предположим, что в процессе стабилизации могут реализовываться любые ограниченные кусочно-непрерывные функции $w(t)$, $t\geq 0$, $|w(t)|\leq M$, $t\geq 0$.

Выберем числа $h>0$, $0<L_1<\infty$. Считая, что управление $u(t)$, $t\geq 0$, системы (1) непрерывно и имеет непрерывную производную, наряду с системой (1) рассмотрим эквивалентную систему:

$$\dot{x} = Ax + bx_{n+1} + dw, \dot{x}_{n+1} = \omega. \tag{2}$$

Функцию $\omega(t)\geq 0$, назовем программным управлением для системы (2), если она: 1) кусочно-постоянна: $\omega(t)=\omega_k$, $t\in[\tau,\tau+h[$, $\tau=kh$, $k=0,1,2,\ldots$; 2) соответствующая ей компонента $x_{n+1}(t)$ траектории системы (2) удовлетворяет неравенству $|x_{n+1}(t)|\leq L$, $t\geq 0$; 3) $|\omega(t)|\leq L_1$, $t\geq 0$.

Пусть $\varepsilon>0$ – любое сколь угодно малое положительное число, $\nu>0$ – заданное число, G – ограниченная окрестность состояния равновесия $x=0$ системы (1). Функцию $\omega(t,x,x_{n+1})$, $x\in G$, $|x_{n+1}|<L$, $t\in[0,\nu[$, назовем ограниченным стабилизирующим программно-позиционным управлением системы (2) в области G, если 1) $\omega(t,0,0)=0$, $t\in[0,\nu[$; 2) $|\omega(t,x,x_{n+1})|\leq L_1$, $x\in G$, $|x_{n+1}|\leq L$, $t\in[0,\nu[$; 3) траектория замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + bx_{n+1} + dw, \dot{x}_{n+1} = \omega(t,x,x_{n+1}), \ \ x(0)=x_0, x_0\in G, x_{n+1}(0)=u_0, |x_{n+1}|\leq L, \tag{3}$$

является непрерывным решением системы уравнений

$$\dot{x} = Ax + bx_{n+1} + dw, \dot{x}_{n+1} = \omega(t), x(0) = x_0, x_{n+1}(0) = u_0, |x_{n+1}| \leq L,$$

где $\omega(t)=\omega(t,x(kv),x_{n+1}(kv))$, $t\in[kv,(k+1)v[$, $k=0,1,\ldots$; 4) замкнутая система (3) без возмущений ($\omega(t)\equiv 0$, $t\geq 0$) асимптотически устойчива в G; 5) существует такое конечное число $t(\varepsilon)$, что каждое решение $x(t)$, $x_{n+1}(t)$, $t\geq 0$, уравнения (3) обладает свойством $\|x(t)\|\leq\varepsilon$, $|x_{n+1}(t)|\leq\varepsilon$ при $t\geq t(\varepsilon)$.

Для построения стабилизирующей обратной связи по аналогии с [6,7] введем специальную (сопровождающую) задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями.

2. Сопровождающая задача оптимального управления. Стабилизирующее свойство оптимальной обратной связи. Выберем натуральные числа N,m ($N>m>n$). Положим $v=mh$, $\Theta=Nh$. Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления:

$$\rho(z,z_{n+1})=\min\rho, \tag{4}$$

$$\dot{x}=Ax+bx_{n+1}+dw, \dot{x}_{n+1}=\omega, x(0)=z, x_{n+1}(0)=z_{n+1}, \tag{5}$$

$$x(\Theta)=0,\ x_{n+1}(\Theta)=0, \tag{6}$$

$$|x_{n+1}(t)|\leq\rho, \tag{7}$$

$$|\omega(t)|\leq L_1,\ t\in T=[0,\Theta]. \tag{8}$$

Предположим, что для задачи (4)–(8) выполняется условие

$$\operatorname{rank}(b_h, A_h b_h,\ldots,A_h^{n-1}b_h)=n,\quad \left(A_h=\exp Ah, b_h=b\int_0^h \exp sA ds\right). \tag{9}$$

Программное управление $\omega(t)$, $t\in T$, назовем допустимым для состояния (z,z_{n+1}), если траектория системы (5) для некоторого $\rho\leq L$ удовлетворяет условиям (6), (7).

Функцию $\omega^0(kh|z,z_{n+1}), k=\overline{0,N}$, удовлетворяющую ограничению (8), назовем оптимальным программным управлением задачи (4)–(8), если на соответствующей ей (оптимальной) траектории $x^0(t|z), x^0_{n+1}(t|z_{n+1})$, $t\in T$, системы (5) выполняются ограничения (6), (7) и критерий качества (4) достигает минимального значения.

Оптимальное стартовое программно-позиционное управление определим равенством $\omega^0(t,z,z_{n+1})=\omega^0(t|z,z_{n+1})$, $|z_{n+1}|\leq L$, $t\in[0,v[,)z,z_{n+1})\in R^n\times R$.

Введем множество $G_\theta=\left\{(z,z_{n+1}):\left|\omega^0(t,z,z_{n+1})\right|\leq L_1,\left|z_{n+1}(t)\right|\leq L, t\in[0,v]\right\}$.

Из определения стартового программно-позиционного управления следуют свойства: 1) $\omega(t,0,0)\equiv 0$, $t\in[0,v[$; 2) $|\omega(t,x,_{xn+1})|\leq L_1$, $(x,x_{n+1})\in G$, $t\in[0,v[$; 3) траектория замкнутой системы (3) при $\omega(t,x,x_{n+1})=\omega^0(t,z,z_{n+1})$ является непрерывным решением системы уравнений

$$\dot{x}=Ax+bx_{n+1}, \dot{x}_{n+1}=\omega^0(t), x(0)=x_0, x_{n+1}(0)=u_0, \left|x_{n+1}\right|\leq L,$$

$$\omega^0(t)=\omega^0(t-kv,x(kv),x_{n+1}(kv)), t\in[kv,(k+1)v[, k=0,1,\ldots,$$

где $\omega^0(t-kv,x(kv),x_{n+1}(kv))=\omega^0(t-kv|x(kv),x_{n+1}(kv)), t\in[0,v[$; $\omega^0(t|x(kv)$, $x_{n+1}(kv))$, $t\in[0,\theta[$, – оптимальное программное управление задачи (3) для состояния $z=x(kv)$, $z_{n+1}=x_{n+1}(kv)$.

Методом функции Ляпунова [8,9] покажем, что система (3) при $\omega(t)\equiv 0$, $t\geq 0$, т.е. система

$$\dot{x}=Ax+bx_{n+1},\dot{x}_{n+1}=\omega^0(t,x,x_{n+1}),x(0)=x_0,x_{n+1}(0)=u_0,\quad |x_{n+1}|\leq L, \quad (10)$$

асимптотически устойчива в G_Θ. В качестве функции Ляпунова возьмем оптимальное значение критерия качества $\rho(z,z_{n+1})$, $(z,z_{n+1})\in G_\Theta$, задачи (4)–(8).

Пусть в момент $\tau=l\nu$ система (10) оказалась в состоянии $x^*(\tau|x_0^*)$, $x^*_{n+1}(\tau|u_0^*)$, соответствующем произвольному начальному состоянию $x(0)=x_0^*$, $x_{n+1}(0)=u_0^*$, $(x_0^*,u_0^*)\in G_\theta$, на котором критерий качества задачи (4)–(8) принимает значение $\rho(x^*(\tau|x_0^*),x^*_{n+1}(\tau|u_0^*))$.

Задача (4)–(8) эквивалентна следующей задаче линейного программирования с N+1 переменными и $2N$+n–1 основными ограничениями

$$\rho\to min,$$

$$F(\theta)x^*(\tau|x_0^*)+F^1(\theta)x^*_{n+1}(\tau|u_0^*)+\sum_{j=1}^{N}\omega_j\int_{(j-1)h}^{jh}F^1(\theta-t)dt=0,$$

$$x^*_{n+1}(\tau|u_0^*)+\sum_{j=1}^{N}\omega_j h=0,\ \ x^*_{n+1}(\tau|u_0^*)+\sum_{j=1}^{k}\omega_j h-\rho\leq 0, \quad (11)$$

$$x^*_{n+1}(\tau|u_0^*)+\sum_{j=1}^{k}\omega_j h+\rho\geq 0,\ \ k=\overline{1,N-1},\ \ |\omega_j|\leq L_1,\ \ j=\overline{1,N},\ \ \rho\geq 0,$$

где $F(t)\in R^{n\times n}$, $t\geq 0$, – фундаментальная матрица решений однородной системы $\dot{x}=Ax$, матрица $F^1(t)\in R^{n\times 1}$, $t\geq 0$, является блочной компонентой фундаментальной матрицы $\overline{F}(t)\in R^{(n+1)\times(n+1)}$, $t\geq 0$, решений расширенной системы $\dot{x}=Ax+bx_{n+1}$, $\dot{x}_{n+1}=0$: $\overline{F}=\begin{pmatrix}F & F^1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Здесь $0\in R^{1\times n}$ – нулевая матрица, ω_j – значение управления $\omega(t)$ на промежутке $[(j-1)h,jh[$, $j=\overline{1,N}$.

Обозначим: $\omega^0_\tau(\cdot)=(\omega^0_j(\tau),j=\overline{1,N},\rho^0)$ – оптимальный план, $K^0(\tau)$ – оптимальная опора [10] задачи (11).

В момент τ+ν система (3) под действием управления $\omega^0_j(\tau)$, $j=\overline{1,m}$, окажется в состоянии $x^*(\tau+\nu|x_0^*)$, $x^*_{n+1}(\tau+\nu|u_0^*)$, на котором критерий качества задачи (4)–(8) принимает значение $\rho(x^*(\tau+\nu|x_0^*),x^*_{n+1}(\tau+\nu|u_0^*))$. Управление $\omega_{\tau+\nu}(\cdot)=\left(\omega_j=\omega^0_{j+m}(\tau),j=\overline{1,N-m};\omega_j=0,j=\overline{N-m+1,N},\rho^0\right)$ является допустимым для состояния $z=x^*(\tau+\nu|x_0^*)$, $z_{n+1}=x^*_{n+1}(\tau+\nu|u_0^*)$ и критерий качества задачи (4)–(8) на этом управлении удовлетворяет неравенству

$$\rho(x^*(\tau+\nu|x_0^*),x^*_{n+1}(\tau+\nu|u_0^*))\leq\rho(x^*(\tau|x_0^*),x^*_{n+1}(\tau|u_0^*)). \quad (12)$$

Значит, и на оптимальном управлении $\omega^0_{\tau+\nu}(\cdot)$ выполнится неравенство (12).

Задача (4)–(8) на промежутке $[\tau,\tau+\nu]$ для состояния $x^*(\tau+\nu|x_0^*)$, $x_{n+1}^*(\tau+\nu|u_0^*)$ примет вид:

$$\rho \to min,$$

$$F(\theta)x^*(\tau|x_0^*)+F^1(\theta)x_{n+1}^*(\tau|u_0^*)+\sum_{j=1}^{N}\omega_j\int_{(j-1)h}^{jh}F^1(\theta-t)dt+\sum_{j=N+1}^{N+m}\omega_j\int_{(j-1)h}^{jh}F^1(\theta-t)dt=0,$$

$$x_{n+1}^*(\tau|u_0^*)+\sum_{j=1}^{N}\omega_j h+\sum_{j=N+1}^{N+m}\omega_j h=0, \qquad (13)$$

$$x_{n+1}^*(\tau|u_0^*)+\sum_{j=1}^{k}\omega_j h-\rho\le 0,\;\; x_{n+1}^*(\tau|u_0^*)+\sum_{j=1}^{k}\omega_j h+\rho\ge 0,\;\; k=\overline{1,N+m-1},$$

$$\omega_j^0(\tau)\le\omega_j\le\omega_j^0(\tau),\;\; j=\overline{1,m},\;\; |\omega_j|\le L_1,\;\; j=\overline{m+1,N+m},\;\; \rho\ge 0.$$

Построим опору $K_{оп}(\tau+\nu)$ задачи (13) по оптимальной опоре $K_{on}^0(\tau)$ задачи (11). Опорный план $\{\omega_{\tau+\nu}(\cdot),\ K_{оп}(\tau+\nu)\}$ является невырожденным. Среди оценок $\Delta_j, j=\overline{N+1,N+m}$, обязательно найдутся ненулевые, так как тождество $\Delta_j\equiv 0, j=\overline{N+1,N+m}$, противоречит условию (9). Поэтому на оптимальном плане задачи (13) выполнится неравенство

$$\rho^0(x^*(\tau+\nu|x_0^*),x_{n+1}^*(\tau+\nu|u_0^*))<\rho^0(x^*(\tau|x_0^*),x_{n+1}^*(\tau|u_0^*)). \qquad (14)$$

Используя неравенство (14), нетрудно показать, что $\rho(x^*(t|x_0^*)$, $x_{n+1}^*(t|u_0^*))\to 0$, $\|x^*(t|x_0^*)\|\to 0$, $|x_{n+1}^*(t|u_0^*)|\to 0$ при $t\to\infty$.

Докажем свойство 5). Рассмотрим произвольный текущий момент $\tau=l\nu$ и состояние $x^*(\tau|x_0^*)$, $x_{n+1}^*(\tau|u_0^*)$ системы (3), соответствующее начальному состоянию $x(0)=x_0^*$, $x_{n+1}(0)=u_0^*$, $(x_0^*,u_0^*)\in G_\theta$, и реализовавшемуся возмущению $w^*(t)$, $t\in[0,\tau[$. Введем множества:

$$X_M^\nu=\left\{x\in R^n: x=\int_0^\nu F(\nu-t)dw(t)dt, |w(t)|\le M, t\in[0,\nu[\right\},$$

$$X_\rho^\omega=\Big\{(x,x_{n+1})\in R^n\times R: x(\nu)=F(\nu)x+F^1(\nu)x_{n+1}+\int_0^\nu F^1(\nu-t)\omega(t)dt=0,$$

$$x_{n+1}(\nu)=x_{n+1}+\int_0^\nu\omega(t)dt=0, |\omega(t)|\le L_1, |x_{n+1}(t)|\le\rho, t\in[0,\nu[\Big\}.$$

Обозначим через ρ^* минимальное ρ при котором $X_\rho^\omega\supset X_M^\nu$.

Предположим, что для состояния $x^*(\tau|x_0^*)$, $x_{n+1}^*(\tau|u_0^*)$ оптимальное значение критерия качества задачи (4)–(8) удовлетворяет неравенству

$$\rho(x^*(\tau|x_0^*),x_{n+1}^*(\tau|u_0^*))>\rho^*. \qquad (15)$$

Пусть $\omega_\tau^0(\cdot)=(\omega_j^0(\tau),\, j=\overline{1,N},\, \rho^0(\tau))$ — оптимальный план задачи (4)–(8) при $z=x^*(\tau|x_0^*)$, $z_{n+1}=x^*_{n+1}(\tau|u_0^*)$. В момент $\tau+\nu$ замкнутая система (3) окажется в состоянии $x^*(\tau+\nu|x_0^*)$, $x^*_{n+1}(\tau+\nu|u_0^*)$, на котором критерий качества задачи (4)–(8) принимает значение $\rho(x^*(\tau+\nu|x_0^*), x^*_{n+1}(\tau+\nu|u_0^*))$. Управление $\omega^0_{\tau+\nu}(\cdot)=(\omega_j^0(\tau),\, j=\overline{m+1,N},\, \rho^0(\tau))$ переводит в момент Θ систему (3) из начального состояния $x^*(\tau+\nu|x_0^*)$, $x^*_{n+1}(\tau+\nu|u_0^*)$ в состояние $(x^*(\tau+\theta|x_0^*), x^*_{n+1}(\tau+\theta|u_0^*))\in X_M^\nu$.

По определению числа ρ^*, существует управление $y(t)$, $|y(t)|\leq L_1$, $t\in[\tau+\Theta,\tau+\Theta+\nu[$, такое, что управление $\omega_{\tau+\nu}(\cdot)=(\omega_j=\omega^0_{j+m}(\tau),\, j=\overline{1,N-m},$ $\omega_j=y_{j-N+m},\, j=\overline{N-m+1,N},\, \rho^0(\tau))$ является допустимым для задачи (4)–(8) при $z=x^*(\tau+\nu|x_0^*)$, $z_{n+1}=x^*_{n+1}(\tau+\nu|u_0^*)$ и на нем выполняется неравенство (12). По аналогии с доказательством свойства 4) можно показать выполнение строгого неравенства (14) при условии (15).

Из определения множества X_M^ν следует, что, с одной стороны, для каждого $M<\infty$ и любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдутся такие значения $\nu>0$ и $t(\varepsilon)$, что $\|x(t)\|\leq\varepsilon$, $|x_{n+1}(t)|\leq\varepsilon$ при $t\geq t(\varepsilon)$ для всех $(x, x_{n+1})\in X_M^\nu$. С другой стороны, для каждого $M<\infty$ и $\nu>0$ существует число $\rho^*>0$, что функция Ляпунова будет убывать для всех $\rho(x^*(t|x_0^*), x^*_{n+1}(t|u_0^*))>\rho^*, t\geq 0$.

3. Пример. Рассмотрим задачу стабилизации двух материальных точек, соединенных упругой связью (рис.1):

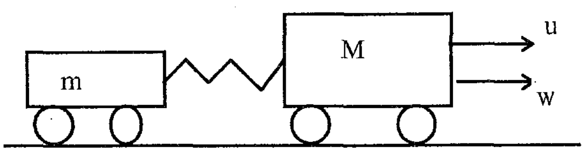

Рис.1

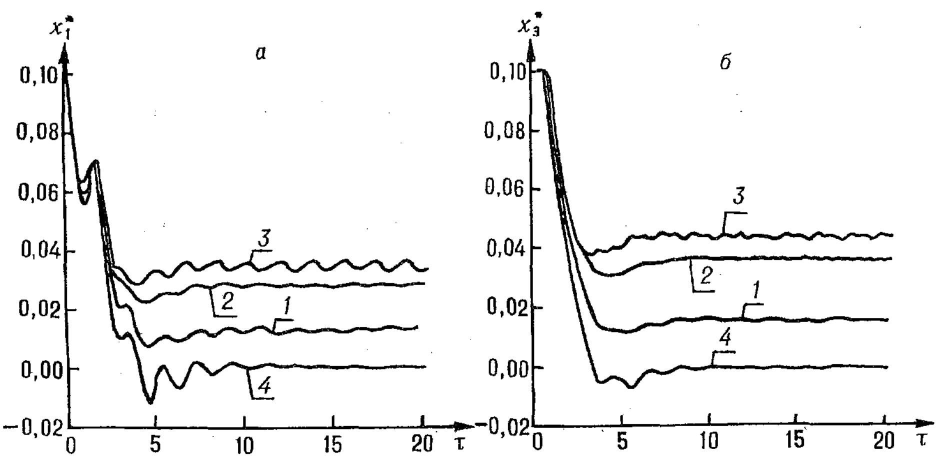

Рис.2

Пусть поведение такой системы описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1=x_2,\ \dot{x}_2=-9x_1+9x_3,\ \dot{x}_3=x_4,\ \dot{x}_4=3x_1-3x_3+u+w, \tag{16}$$

$(x_1, x_2, x_3, x_4, u, w \in R)$, где x_1,x_3 – отклонения первой и второй точек системы от состояний равновесия x_1=0, x_3=0; x_2,x_4 – скорости этих точек; u – управляющее воздействие, w – действующее на систему возмущение.

Пусть в начальный момент t=0 система (16) находилась в состоянии $x_1(0)$=0,1, $x_2(0)$=0, $x_3(0)$=0,1, $x_4(0)$=0, $u(0)$=0. Требуется стабилизировать ее в окрестности состояния равновесия x_1=0, x_2=0, x_3=0, x_4=0, u=0.

Приведем результаты вычислений. На рис.2 показано влияние на процесс стабилизации параметра ν для выбранного возмущения $\omega(t)$=0,1sin$t$ и фиксированных параметров задачи (11) Θ=3, h=0,15, L_1=50. Кривые 1 соответствуют ν=2h, кривые 2 – ν=4h, кривые 3 – ν=6h. Для сравнения показано состояние системы в процессе стабилизации при $\omega(t)\equiv0$ – кривые 4.

Работа частично финансировалась республиканским фондом фундаментальных исследований (грант Ф97М-139).

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М., 1959.

2. Щипанов Г.В. Теория и методы проектирования регуляторов // АиТ. 1939. №1. С.49.

3. Zames G. // IEEE Trans. Automat. Contr. 1981. V. AC-26. P.301.

4. Stoorvogel A.A. The H_∞ control problem: a state space approach. Prentice Hall, Englewood Cliffs. 1992.

5. Basar T., Bernhard P. H_∞ – optimal control and related minimax design problems. Birkhauser, 1990.

6. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. №3. С.66.

7. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. // Кибернетика и системный анализ. 1994. №1. С.66.

8. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.

9. Бромберг П.В. Матричные методы в теории релейного импульсного регулятора. М., 1967.

10. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Часть 1. Линейные задачи. Мн, 1984.

Поступила в редакцию 08.04.97.

УДК 519.62

В.В.БОБКОВ, Н.А.БОБКОВА

МОНОТОННЫЕ АППРОКСИМАЦИИ МАТРИЧНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

The representations of variable coefficients in polynomial approximations of a exponential matrix convenient for the calculations have been received. These approximations possess improved properties of adequacy at the level of spectral functions.

Матричная экспоненциальная функция $\exp(A\tau)$ играет существенную роль в математике и ее приложениях, особенно связанных с дифференциальными уравнениями (см., напр., [1], [2]). Обычно она определяется с помощью ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} A^i \tau^i / i!, \qquad (1)$$

который для фиксированной матрицы A сходится равномерно в любой конечной области изменения скалярной переменной τ.

В рамках данной работы мы будем предполагать вещественными не только элементы квадратной матрицы A, но и все ее собственные значения