УДК 517.977

Е.А.РУЖИЦКАЯ

КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Linear extremal problem on direct product of finite-dimensional and infinite-dimensional spaces is consided. The optimal criterion is formulated and proved.

Пусть x – n-вектор, $u(\bullet)=(u(t),\ t\in T)$, $T=[0,z]$, – кусочно-непрерывная функция. Под значением функции $u(\bullet)$ в точке $t\in \operatorname{int} T$ будем понимать величину $u(t)=(u(t+0)+u(t-0))/2$, где $u(t+0)$ и $u(t-0)$ – правый и левый пределы функции в точке t.

На множестве пар $v=(x,u(\bullet))$ рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$J(v)=c'x+\int_0^z c(t)u(t)dt \to \max, \tag{1}$$

$$Ax+\int_0^z h(t)u(t)dt=g, \tag{2}$$

$$d_*\le x\le d^*, \tag{3}$$

$$f_*\le u(t)\le f^*,\ t\in T, \tag{4}$$

где $c(t)$, $h(t)$, $t\in T$ – непрерывные скалярная и m-векторная функции соответственно, $A=A(I,J)=(a_{ij},\ i\in I,\ j\in J)$ – $m\times n$-матрица, $c=c(J)=$ $=(c_j,\ j\in J)$, $d_*=d_*(J)=(d_{*j},\ j\in J)$, $d^*=d^*(J)=(d_j^*, j\in J)$ – n-векторы, $g=g(I)=(g_i, i\in I)$ – m-вектор, f_*, f^* – скалярные величины, $I=\{1,\dots m\}$, $J=\{1,\dots,n\}$.

Будем считать, что ограничение (2) задачи управляемо, т.е. для любого m-вектора g найдется пара v, на которой выполняется равенство (2).

Определения.

1. Пару $v=(x,u(\bullet))$ из n-вектора x и кусочно-непрерывной функции $u(\bullet)$ назовем расширенным управлением.
2. Расширенное управление будем называть допустимым, если на нем выполняются основные (2) и прямые (3), (4) ограничения.
3. Решение v^0 задачи (1)–(4) назовем оптимальным управлением.
4. Совокупность $S_{on}=\{T_{on},J_{on}\}$ из l, $0\le l\le m$, изолированных моментов $T=\{\tau_k,\ \tau_k\in T,\ k=1,..,j\}$ и $m-l$ индексов $J=\{j_1,\dots,j_{m-1}\}\subset J$, назовем опорой, если невырождена $m\times m$ -матрица
$$P=(a_j=A[I,j], j\in J_{on}\vdots h(t), t\in T_{on}).$$
5. Пару $\{v,S_{on}\}$ из допустимого управления и опоры назовем опорным управлением.
6. Опорное управление $\{v,S_{on}\}$ назовем невырожденным, если опорные значения расширенного управления некритические:
$$d_{*j}<x_j<d_j^*,\ j\in J_{on};\ f_*<u(t)<f^*, t\in T_{on}.$$

Наряду с опорным управлением $\{v,S_{on}\}$ рассмотрим допустимое управление $\overline{v}=v+\Delta v$, состоящее из $\overline{x}=x+\Delta x$, $\overline{u}(t)=u(t)+\Delta u(t)$, $t\in T$. Вычислим приращение критерия качества на управлениях $\overline{v}$ и v:

$$\Delta J(v)=J(\overline{v})-J(v)=c'\Delta x+\int_0^z c(t)\Delta u(t)dt. \tag{5}$$

Поскольку

$$A\Delta x+\int_0^z h(t)\Delta u(t)dt=0, \tag{6}$$

то, умножив последнее равенство на m-вектор ν и вычтя из (5), получим

$$\Delta J(v) = (c' - \nu' A)\Delta x + \int_0^z \left(c(t) - \nu' h(t)\right)\Delta u(t)dt.$$

Обозначим $\Delta' = \nu' A - c'$, $\Delta(t) = \nu' h(t) - c(t), t \in T$. Вектор ν найдем из условия равенства нулю опорных оценок $\Delta_j = 0$, $j \in J_{on}$, и опорных значений коуправления $\Delta(t) = 0$, $t \in T_{on}$. Построенный таким образом вектор ν назовем вектором потенциалов. Он равен $\nu' = b'_{on}Q$, где $b'_{on} = (c_j, j \in J_{on}; c(t), t \in T_{on})$, $Q = P^{-1}$. В новых обозначениях формула приращения критерия качества примет вид

$$\Delta J(v) = -\Delta'_н \Delta x_н - \int_0^z \Delta(t)\Delta u(t)dt, \tag{7}$$

где $\Delta_н = \Delta(J_н) = (\Delta_j, j \in J_н)$, $\Delta x_н = \Delta x(J_н) = (\Delta x_j, j \in J_н)$, $J_н = J \setminus J_{on}$.

В качестве оценки субоптимальности $\beta(v,S_{on})$ опорного управления $\{v,S_{on}\}$ возьмем максимальное значение приращения критерия качества, полученное как решение задачи

$$\begin{gathered} \Delta J(v) \to \max, \\ d_{*н} - x_н \le \Delta x_н \le d^*_н - x_н, \\ f_* - u(t) \le \Delta u(t) \le f^* - u(t),\ t \in T, \\ c_j, j \in J_{on}; c(t), t \in T_{on})\ d^*_н = d^*(J_н) = \left(d^*_j, j \in J_н\right), \\ x_н = x(J_н) = \left(x_j, j \in J_н\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Задача (8) отличается от задачи (1)–(4) тем, что в ней отсутствуют прямые ограничения по опорным компонентам вектора Δx. Тогда

$$\begin{aligned} \beta = \beta(v,S_{on}) = &\sum_{\Delta_j > 0, j \in J_н} \Delta_j\left(x_j - d_{*j}\right) + \sum_{\Delta_j < 0, j \in J_н} \Delta_j\left(x_j - d^*_j\right) + \\ &+ \int_{T^+} \Delta(t)\left(u(t) - f_*\right)dt + \int_{T^-} \Delta(t)\left(u(t) - f^*\right)dt, \end{aligned} \tag{9}$$

где $T^+ = \{t \in T: \Delta(t) > 0\}$, $T^- = \{t \in T: \Delta(t) < 0\}$.

Исходя из (8) и (9), докажем следующий

Критерий оптимальности. Для оптимальности допустимого управления v достаточно существования такой опоры S_{on}, что для опорного управления $\{v,S_{on}\}$ выполняются соотношения

$$\begin{gathered} \Delta_j \ge 0 \text{ при } x_j = d_{*j};\ \Delta_j \le 0 \text{ при } x_j = d^*_j; \\ \Delta_j = 0 \text{ при } d_{*j} < x_j < d^*_j,\ j \in J_н;\ \Delta(t) \ge 0 \text{ при } u(t) = f_*; \\ \Delta(t) \le 0 \text{ при } u(t) = f^*;\ \Delta(t) = 0 \text{ при } f_* < u(t) < f^*,\ t \in T. \end{gathered} \tag{10}$$

Пусть v – оптимальное управление, а $\{v,S_{on}\}$ – невырожденное опорное управление. Для оптимальности расширенного управления v необходимо, чтобы для опорного управления $\{v,S_{on}\}$ выполнялись соотношения (10).

Доказательство. *Достаточность*. Для оптимального управления v^0 и опорного управления $\{v,S_{on}\}$ в силу (8) выполнется неравенство

$$J(v^0) - J(v) = \Delta J(v) \le \beta(v,S_{on}),$$

где $\beta(v,S_{on})$ определяется соотношением (9). Отсюда ясно, что если опорное управление $\{v,S_{on}\}$ удовлетворяет соотношениям (10), то $\beta(v,S_{on})=0$ и $J(v^0)=J(v)$.

Необходимость. Пусть $\{v,S_{on}\}$ – невырожденное опорное управление с оптимальным расширенным управлением v, но, вопреки утверждению, нарушаются соотношения (10). Для определенности предположим, что существует такой момент $t_* \in T$, что $\Delta(t_*)>0$ при $u(t_*)>f_*$. В силу непрерывности коуправления $\Delta(t)$, $t \in T$, и кусочной непрерывности управления $u(t)$, $t \in T$, найдется такое достаточно малое число $\lambda_0>0$, что для всех λ, $0<\lambda<\lambda_0$, имеем:

1) момент t_* не является опорным;

2) $t_* \notin T_j^\lambda$, $T_j^\lambda = [\tau_j - \lambda, \tau_j + \lambda]$, $j = \overline{1,l}$;

3) $\Delta(t) > 0$ при $u(t) > f_*$, $t \in T_*^\lambda$, $T_*^\lambda = [t_* - \lambda, t_* + \lambda]$;

4) $T_*^\lambda \cap T_j^\lambda = \varnothing$, $j = \overline{1,l}$;

5) момент t_* можно считать точкой непрерывности управления $u(t)$, $t \in T_*^\lambda$.

Выберем достаточно малое λ_0. Для каждого λ, $0<\lambda<\lambda_0$, построим вариацию расширенного управления $\Delta u(t) = \Delta u(t,\lambda)$, $t \in T$; Δx, положив $\Delta u(t) = -\theta$, $t \in T_*^\lambda$, где $0 < \theta = \theta(\lambda) = k\lambda \le 1$, $k > 0$ и не зависит от λ; $\Delta u(t) \equiv 0$, $t \in T \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{l} T_j^\lambda \cup T_*^\lambda\right)$; $\Delta x_j \equiv 0$, $j \in J_н$.

В окрестности опорных моментов τ_j заменим $u(t)$, $t \in T$, на новое $\tilde{u}(t)$, $t \in T$:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), \ t \notin T_j^\lambda; \\ (u(\tau_j - 0) + u(\tau_j + 0))/2 = u(\tau_j), \ t \in T_j^\lambda, \ j = \overline{1,l}. \end{cases}$$

В силу невырожденности опорного управления имеем: $|\tilde{u}(\tau_j)| < 1$, $j=\overline{1,l}$.

Для любой непрерывной функции $h(t)$, $t \in T$, справедливо разложение

$$\int_{T_j^\lambda} h(t)u(t)dt = \int_{\tau_j-\lambda}^{\tau_j} h(t)dtu(\tau_j - 0) + \int_{\tau_j}^{\tau_j+\lambda} h(t)dtu(\tau_j + 0) =$$

$$= \lambda h(\tau_j)u(\tau_j - 0) + o_1(\lambda) + \lambda h(\tau_j)u(\tau_j + 0) + o_2(\lambda) = 2\lambda h(\tau_j)u(\tau_j) + o(\lambda).$$

При замене управления $v=(x; u(t),\ t\in T)$ на управление $\tilde{v}=(x; \tilde{u}(t),\ t\in T)$ в основные ограничения (2) вносится погрешность порядка $o(\lambda)$

$$Ax + \int_0^z h(t)\tilde{u}(t)dt - Ax - \int_0^z h(t)u(t)dt = \int_0^z h(t)(\tilde{u}(t) - u(t))dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \int_{T_j^\lambda} h(t)(\tilde{u}(t) - u(t))dt =$$

$$= 2\lambda \sum_{j=1}^{l} h(\tau_j)u(\tau_j) + o_1(\lambda) - 2\lambda \sum_{j=1}^{l} h(\tau_j)u(\tau_j) + o_2(\lambda) = o(\lambda).$$

По теореме о неявной функции скорректируем управление $\tilde{u}(t)$, $t \in T$ так, чтобы на управлении $\breve{u}(t)$, $t \in T$

$$\breve{u}(t) = \begin{cases} u(t), \ t \notin T_j^\lambda; \\ u(\tau_j) + o(\lambda), \ t \in T_j^\lambda, \ j = \overline{1,l} \end{cases}$$

основные ограничения (2) выполнялись точно.

При замене управления $v=(x;\ u(t),\ t\in T)$ на управление $\tilde{v}=(x; \tilde{u}(t), t\in T)$ критерий качества изменяется следующим образом:

$$J(\breve{v})-J(v)=\int_0^z c(t)(\breve{u}(t)-u(t))dt=\sum_{j=1}^{l}\int_{T_j^\lambda} c(t)(\breve{u}(t)-u(t))dt=$$

$$=2\lambda\sum_{j=1}^{l}c(\tau_j)u(\tau_j)+o_1(\lambda)-2\lambda\sum_{j=1}^{l}c(\tau_j)u(\tau_j)+o_2(\lambda)=o(\lambda).$$

Вариацию управления на отрезках T_j^λ, $j=\overline{1,l}$ будем строить в виде постоянных функций $\Delta u(t)=\Delta u(\tau_j)$, $t\in T_j^\lambda$, $j=\overline{1,l}$.

Из равенства (6), справедливого для каждой допустимой вариации расширенного управления, следует

$$A_{on}\Delta x_{on}+\sum_{j=1}^{l}\int_{T_j^\lambda}h(t)\Delta u(t)dt=\theta\int_{T_*^\lambda}h(t)dt,$$

$$A_{on}\Delta x_{on}+\sum_{j=1}^{l}2\lambda h(\tau_j)\Delta u(\tau_j)+o(\lambda)=\theta\int_{T_*^\lambda}h(t)dt.$$

Матрица коэффициентов этой системы

$$\Phi_{on}=\left(a_j=A[I,j],\ j\in J_{on}\ \vdots\ h(t),\ t\in T_{on}\right)$$

совпадает с опорной матрицей P. Введя вектор $\Delta u_{on}=(\Delta u(\tau_j), j=\overline{1,l})$ и матрицы $Q_1=(q_{(j)}=Q[j,I], j=\overline{1,m-l})$, $Q_2=(q_{(j)}=Q[j,I],\ j=\overline{m-l+1,m})$, где q_j – j-я строка матрицы Q, получим

$$\Delta x_{on}=2k\lambda^2Q_1h(t_*)+o(\lambda),$$
$$\Delta u_{on}=k\lambda Q_2h(t_*)+O(\lambda).$$

Для всех достаточно малых λ норма вектора $(\Delta x_{on},\Delta u_{on})$ может быть сколь угодно мала. Следовательно, будут выполняться неравенства:

$$d_{*j}\le x_j+\Delta x_j\le d_j^*,\ j\in J_{on};\quad f_*\le\breve{u}(\tau_j)+\Delta u(\tau_j)\le f^*,\ j=\overline{1,l}.$$

Тогда расширенное управление $\overline{v}=(\overline{x};\overline{u}(t),\ t\in T)$ вида

$$\overline{u}(t)=u(t),\ t\in T\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{l}T_j^\lambda\cup T_*^\lambda\right);\ \overline{u}(t)=\breve{u}(t)+\Delta u(\tau_j),\ t\in T_j^\lambda,\ j=\overline{1,l};$$

$$\overline{u}(t)=u(t)-\theta,\ t\in T_*^\lambda;\ \overline{x}=x+\Delta x$$

является допустимым.

Подсчитаем приращение критерия качества на управлениях $\overline{v}$ и v. При достаточно малых λ, $0<\lambda<\lambda_0$, имеем

$$\Delta J(v)=J(\overline{v})-J(v)=-\sum_{j=1}^{l}\int_{T_j^\lambda}\Delta(t)\Big(u(\tau_j)+\Delta u(\tau_j)-u(t)\Big)dt+$$

$$+\theta\int_{T_*^\lambda}\Delta(t)dt=k\lambda\int_{T_*^\lambda}\Delta(t)dt+o(\lambda)>0.$$

Полученное неравенство противоречит оптимальности v и доказывает необходимую часть критерия оптимальности. Остальные случаи нарушения соотношений (10) доказываются аналогично. Теорема полностью доказана.

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч.1. Линейные задачи. Мн., 1983.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Конструктивные методы оптимизации. Ч.2. Задачи управления. Мн., 1984.

Поступила в редакцию 09.01.96.