

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

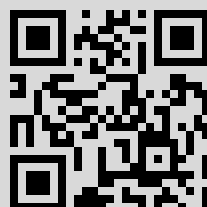
В. И. Саврин, Н. Б. Скачков, Г. Ю. Тюменков, Ковариантное трехмерное уравнение для волновой функции π -мезона в составной модели спинорных кварков, *ТМФ*, 1983, том 54, номер 2, 173–182

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 37.17.74.99

30 марта 2022 г., 13:11:09



КОВАРИАНТНОЕ ТРЕХМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ π -МЕЗОНА В СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ СПИНОРНЫХ КВАРКОВ

Саврин В. И., Скачков Н. Б., Тюменков Г. Ю.

Получено ковариантное одновременное уравнение, описывающее состояние со спином, равным нулю, системы двух спинорных кварков. Для квазипотенциала, выбранного в виде амплитуды одноглюонного обмена, исследуется асимптотика волновой функции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно кварковой модели π -мезон представляет собой связанное состояние кварка и антикварка. После открытия ψ - и Υ -частиц и успешного описания их спектра на основе уравнения Шредингера как составленных из тяжелых очарованных и прекрасных кварков частиц установилось мнение, что входящие в π -мезон кварки должны быть легкими, а их относительное движение в пионе должно носить релятивистский характер.

В связи с этим для описания движения кварков внутри пиона необходимо применять релятивистские уравнения для двух частиц типа уравнения Бете — Солпитера [1] или трехмерные уравнения, возникающие в одновременном подходе Логанова — Тавхелидзе [2, 3] и в диаграммной технике Кадышевского [4, 5].

В настоящей статье мы применим ковариантные трехмерные одновременные уравнения для изучения асимптотического поведения волновой функции π -мезона в рамках квантовой хромодинамики (КХД). Интерес к этой задаче в последнее время связан с проблемой изучения асимптотического поведения упругого форм-фактора π -мезона на основе КХД. Естественно, что поскольку в КХД пока нет метода описания взаимодействия на больших расстояниях, то в ее рамках речь может идти лишь об изучении волновой функции π -мезона на малых расстояниях, т. е. об асимптотике волновой функции пиона при больших относительных импульсах.

В настоящей статье мы применим для изучения асимптотики волновой функции пиона формализм ковариантных одновременных двухчастичных уравнений для системы, образованной из двух частиц со спинами $1/2$.

Ковариантная одновременная волновая функция (ВФ), описывающая относительное движение в кварк-антикварковой системе, определяется через ВФ Бете — Солпитера соотношением [3, 6, 7]

$$(1.1) \quad \tilde{\Psi}_{MK}^{\sigma_1\sigma_2}(p_1, p_2) = - \frac{(2\pi)^4}{4m^2} \bar{u}_\alpha(\Lambda_\lambda^{-1} p_1, \sigma_1) \times$$

$$\times v_{\beta}(\Lambda_{\lambda_P}^{-1} p_2, \sigma_2) \int d^4 x e^{i(p_1 - p_2)x} \delta[\lambda_P x] \times \\ \times \langle 0 | T \left\{ \Psi_{\alpha} \left(\frac{x}{2} \right) \bar{\Psi}_{\beta} \left(-\frac{x}{2} \right) \right\} | M, K; S, \sigma \rangle,$$

где $\Psi(x)$ и $\bar{\Psi}(x)$ — операторы полей кварка и антикварка, $P = p_1 + p_2$, $x = x_1 - x_2$, вектор $|M, K; S, \sigma\rangle$ характеризует составную систему в целом, обладающую массой M , спином S и его проекцией σ и движущуюся с импульсом K . Наличие под знаком интеграла инвариантной $\delta[\lambda_P x]$ функции обуславливает в с.ц.и. $(\lambda_P^\mu = P^\mu / \sqrt{P^2}) \lambda_P = P / \sqrt{P^2} = 0$ равенство времен $x_1^0 = x_2^0$ кварков.

Для учета хромодинамического эффекта «асимптотически свободного» поведения константы связи мы будем использовать предложенную в [10] модификацию амплитуды одноглюонного обмена в области малых значений квадрата переданного импульса Q^2 , которая в релятивистском конфигурационном представлении обеспечивает наиболее простой вид соответствующего квазипотенциала. Релятивистское одновременное уравнение для спинорных волновых функций (1.1) имеет вид [6, 3, 7–9, 11]

$$(1.2) \quad 2\Delta_{p, m\lambda_P}^0 [M - 2\Delta_{p, m\lambda_P}^0] \hat{\Psi}_{M, K}^{\sigma_1 \sigma_2}(\Delta_{p, m\lambda_P}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \Delta_{k, m\lambda_P}}{2\Delta_{k, m\lambda_P}^0} V_{\sigma_1' \sigma_2'}^{\sigma_1 \sigma_2}(\Delta_{p, m\lambda_P}; \Delta_{k, m\lambda_P}; P)^2 \hat{\Psi}_{M, K}^{\sigma_1' \sigma_2'}(\Delta_{k, m\lambda_P}).$$

В (1.2) вектора $\Delta_{p, m\lambda_P}$ и $\Delta_{k, m\lambda_P}$ представляют собой ковариантные обобщения векторов импульсов частиц в с.ц.и. до рассеяния $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$ и после: $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}$. Они вводятся согласно [12, 7] с помощью соотношений ($n=1, 2, 3$)

$$(1.3) \quad \Delta_{p, m\lambda_P}^n = p^n = (\Lambda_{\lambda_P}^{-1} p_1)^n = -(\Lambda_{\lambda_P}^{-1} p_2)^n = -\Delta_{p_2, m\lambda_P}^n, \\ \Delta_{k, m\lambda_P}^n = k^n = (\Lambda_{\lambda_P}^{-1} k_1)^n = -(\Lambda_{\lambda_P}^{-1} k_2)^n = -\Delta_{k_2, m\lambda_P}^n,$$

где Λ_{λ_P} — матрица чистого лоренцева преобразования в систему покоя составной частицы, движущейся с 4-скоростью $\lambda_P^\mu = P^\mu / \sqrt{P^2}$, так что $\Lambda_{\lambda_P}(M, 0) = (P_0, \mathbf{P})$.

Временные компоненты определены соотношениями

$$(1.4) \quad \Delta_{p, m\lambda_P}^0 = p_0 = \sqrt{m^2 + \Delta_{p, m\lambda_P}^2}; \quad \Delta_{k, m\lambda_P}^0 = k_0 = \sqrt{m^2 + \Delta_{k, m\lambda_P}^2}.$$

В уравнении (1.2) импульсы всех частиц принадлежат массовому гиперболюду ($i=1, 2$)

$$(1.5) \quad (\Delta_{p, m\lambda_P}^0)^2 - (\Delta_{p, m\lambda_P})^2 = m^2, \quad p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2,$$

но их временные компоненты находятся вне «энергетической поверхности» $p_0^0 \neq k_0^0$.

Как было показано в [3, 13] и [9, 14], уравнения для одновременной волновой функции системы двух частиц со спинами $1/2$, получаемые в рамках одновременной формулировки Логанова — Тавхелидзе [2] и на основе

диаграммной техники Кадышевского [5, 8], совпадают. Квазипотенциал $V_{\sigma_1 \sigma_2}^{\sigma_1 \sigma_2}(\Delta_p, m_{\lambda_P}; \Delta_h, m_{\lambda_P}; P^2)$ строится из инвариантных матричных элементов релятивистской амплитуды рассеяния. Величины $\Delta_{p, m_{\lambda_P}}^0 = (\vec{p})_0$, входящие в свободную функцию Грина уравнения (1.2), являются релятивистскими инвариантами, как и элемент объема интегрирования $d^3 \Delta_{k, m_{\lambda_P}} / 2 \Delta_{k, m_{\lambda_P}}^0$. Ковариантность всего уравнения (1.2) доказана в [8] и [9].

Основной целью настоящей статьи является последовательный учет спиновых степеней свободы кварк-антикварковой системы в пионе, изучение их проявления в ядре взаимодействия, а также влияния на поведение волновой функции при больших значениях относительного импульса.

2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КВАРКА И АНТИКВАРКА ВНУТРИ ПИОНА

Мы будем использовать в уравнении (1.2) квазипотенциал, построенный из амплитуды обмена безмассовой векторной частицей (глюоном),

$$(2.1) \quad V_{v_1 v_2}^{\sigma_1 \sigma_2}(\Delta_p, m_{\lambda_P}; \Delta_h, m_{\lambda_P}) = \{\bar{u}_q^{\sigma_1}(p_1) \gamma_\mu u_{\bar{q}}^{\sigma_2}(k_1)\} g_{\mu\nu} \{u^{v_1}(p_2) \gamma^\nu \bar{u}_{\bar{q}}^{v_2}(k_2)\} \times \\ \times V_0(q^2),$$

где

$$(2.2) \quad V_0(q^2) = -g^2 / (p_1 - k_1)^2, \quad q = p_1 - k_1,$$

и константа g^2 может быть зависящей от Q^2 в случае КХД. Как отмечалось в [9], поляризационные индексы σ_i и v_i у квазипотенциала (2.1) «сидят» (по терминологии работ [14, 12]) каждый на своем импульсе. Удобно перейти от (2.1) к такому квазипотенциалу, у которого все индексы «сидели» бы на одном импульсе, скажем $\vec{p} = \Delta_{p, m_{\lambda_P}}^0$. Это достигается путем преобразования [9]

$$(2.3) \quad V_{v_1 v_2}^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{p}, \vec{k}) = \sum_{\sigma_i, v_i = \pm 1/2} D_{\sigma_i \sigma_0}^{+1/2} \{V^{-1}(\Lambda_P, p_1)\} \times \\ \times D_{\sigma_2 \sigma_0}^{+1/2} \{V^{-1}(\Lambda_P, p_2)\} V_{v_1 v_0}^{1p \ 2p}(\vec{k}(-); \vec{p}; \vec{p}) \times \\ \times D_{v_0 v_1}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_0, p_1)\} D_{v_0 v_2}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_P, k)\} \times \\ \times D_{v_0 v_2}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_0, p_2)\} D_{v_2 k}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_P, k_2)\},$$

где суммирование ведется по повторяющимся индексам σ_{ip} и v_{ik} , v_{ip} ($i=1, 2$). Матрицы $D^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_P, k)\}$ описывают вignerовские повороты спинов $1/2$: $R \{V^{-1}(\Lambda_P, k)\} = (\Lambda_{\Lambda_P^{-1}h})^{-1} \Lambda_P^{-1} \Lambda_h$, где Λ_P — матрицы соответствующих чистых преобразований Лоренца: $\Lambda_P(m, 0) = (p_0, \vec{p})$. В качестве сопровождения у поляризационных индексов в (2.3) мы поставили тот импульс, на котором «сидит» каждый из индексов (см. подробнее в [9]). В результате проведенных в (2.3) последовательных «пересадок» поляризационных индексов у амплитуды $V_{v_0 v_1}^{1p \ 2p}$ все спиновые индексы оказываются «сидящими» на одном импульсе $\vec{p}$.

Во втором приближении по константе связи амплитуда $V_{(2)}^{\sigma_0 \sigma_0}_{1p \ 2p}(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}; \mathbf{p})$ может быть представлена в виде

$$(2.4) \quad V_{(2)}^{\sigma_0 \sigma_0}_{1p \ 2p}(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}; \mathbf{p}) = \xi_{1p}^{\sigma_0} \xi_{2p}^{\sigma_0} V_{(2)}^{\sigma_0 \sigma_0}(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}; \mathbf{p}) \xi_{1p}^{\sigma_0} \xi_{2p}^{\sigma_0},$$

где ξ^{σ} — двухкомпонентные паулиевские спиноры, а оператор $V_{(2)}$ согласно [9] записывается через переменную $\Delta = \mathbf{k}(-)\mathbf{p}$ — передачу импульса в пространстве Лобачевского следующим образом:

$$(2.5) \quad \hat{V}_{(2)}(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}; \mathbf{p}) = -g^2 \frac{2m}{\Delta_0 - m} - g^2 \frac{(\sigma_1 \Delta)(\sigma_2 \Delta) - (\sigma_1 \sigma_2) \Delta^2}{\Delta^2} -$$

$$- g^2 \frac{i(\sigma_1 + \sigma_2)}{m^2} [\mathbf{p} \times \Delta] \left\{ \frac{2p_0}{\Delta_0 - m} + \frac{1}{\Delta^2} \right\} - g^2 \frac{2}{m^2} \times$$

$$\times \frac{p_0^2(\Delta_0 + m) + 2p_0(\mathbf{p} \Delta) - 2m^3}{\Delta_0 - m} - g^2 \frac{2p^2}{m^2} - g^2 \{i(\sigma_1 + \sigma_2) \times$$

$$\times [\mathbf{p} \times \Delta]\}^2 / \Delta^2 m^2,$$

Переменная $\Delta_{\mu} \equiv (\Lambda_0^{-1} k)_{\mu}$ (2.5) определена следующим образом:

$$(2.6) \quad \Delta = (\Lambda_0^{-1} k) = \mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}^0}{m} \left[k_0 - \frac{\mathbf{k} \mathbf{p}}{p_0 + m} \right] \equiv \mathbf{k}(-)\mathbf{p},$$

$$(2.7) \quad \Delta_0 = (\Lambda_0^{-1} k)_0 = \frac{k_0 p_0 - \mathbf{k} \mathbf{p}}{m},$$

$$(2.8) \quad t = (p - k)^2 = 2m^2 - 2m\Delta_0.$$

Как мы видим, первые два члена квазинотенциала $V_{(2)}(\mathbf{k}(-)\mathbf{p}; \mathbf{p})$ (2.5) являются локальными функциями в импульсном пространстве Лобачевского, т. е. зависят лишь от разности двух векторов $\mathbf{k}(-)\mathbf{p} = \Delta$ [15] в этом пространстве. Остальные содержат, кроме вектора передачи импульса Δ в пространстве Лобачевского, еще и зависимость от $\mathbf{p}$.

Произведем теперь аналогичную пересадку поляризационных спинорных индексов и у волновой функции $\Psi_{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{p})$. Это осуществляется с помощью вигнеровских поворотов [9, ч. III]

$$(2.9) \quad \Psi_{\sigma_0 \sigma_0}^{\sigma_0 \sigma_0}(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma_1, \sigma_2 = \pm 1/2} D_{\sigma_0 \sigma_1}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{\lambda \mathbf{p}}, p_1)\} \times$$

$$\times D_{\sigma_1 \sigma_2}^{1/2} \{V^{-1}(\Lambda_{\lambda \mathbf{p}}, p_2)\} \Psi_{\sigma_1 \sigma_2}(\mathbf{p}).$$

После того как спины частиц и их поляризационные индексы «пересажены» на один импульс $\mathbf{p}$ (чему отвечает их квантование на одну ось, выбранную вдоль вектора $\mathbf{p}$), мы имеем право провести сложение спинов [14, 9] и

перейти к волновой функции, характеризуемой полным спином S и его проекцией σ_p^0 [9, ч. III]:

$$(2.10) \quad \Psi_{S, \sigma_p^0}^0(\mathbf{p}) = \sum_{\substack{\sigma_{0, 1p}, \sigma_{0, 2p} \\ \sigma_{0, 2p} = \pm 1/2}} \langle 1/2, 1/2; \sigma_{0, 1p} \sigma_{0, 2p} | S \sigma_p^0 \rangle \Psi_{\sigma_{0, 1p} \sigma_{0, 2p}}^0(\mathbf{p}).$$

Для интересующего нас состояния с полным спином $S=0$ и $\sigma_p^0=0$ мы находим, что соответствующая ему волновая функция есть

$$(2.11) \quad \Psi_{0,0}^0(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \Psi_{\frac{1}{2}, \frac{0}{p}}^0 - \frac{1}{2} \Psi_{-\frac{1}{2}, \frac{0}{p}}^0 \right\}.$$

Как было показано в [9, ч. III], после пересадки в уравнении (1.1) всех спиновых индексов σ_i, σ_j' на один импульс $\mathbf{p} = \Delta_{p, m\lambda_p}$ и последующего сложения спинов уравнение (1.1) для состояния с нулевым спином $S=0$ приобретает вид

$$(2.12) \quad 2\Delta_{p, m\lambda_p}^0 (M - 2\Delta_{p, m\lambda_p}^0) \Psi^{S=0}(\Delta_{p, m\lambda_p}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \Delta_{k, m\lambda_p}}{2\Delta_{k, m\lambda_p}^0} V^{S=0}(\Delta_{k, m\lambda_p}(-) \Delta_{p, m\lambda_p}; \mathbf{p}) \Psi^{S=0}(\Delta_{k, m\lambda_p}),$$

где

$$(2.13) \quad V^{S=0}(\Delta_{k, m\lambda_p}(-) \Delta_{p, m\lambda_p}; \mathbf{p}) = \\ = \sum_{\substack{\sigma_{0, 1p}, \sigma_{0, 2p} \\ \sigma_{0, 2p} = \pm 1/2}} \sum_{\substack{\sigma_{0, 1p}, \sigma_{0, 2p} \\ \sigma_{0, 2p} = \pm 1/2}} \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \sigma_{0, 1p} \sigma_{0, 2p} | 00 \right\rangle \times \\ \times V_{\substack{\sigma_{0, 1p} \sigma_{0, 2p} \\ \sigma_{0, 2p} = \pm 1/2}}^{\substack{\sigma_{0, 1p} \sigma_{0, 2p} \\ \sigma_{0, 2p} = \pm 1/2}}(\Delta_{k, m\lambda_p}(-) \Delta_{p, m\lambda_p}; \mathbf{p}) \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \sigma_{0, 1p} \sigma_{0, 2p} | 00 \right\rangle.$$

Простые вычисления показывают, что второе слагаемое в (2.5) вносит в матричный элемент (2.13) вклад, равный

$$(2.14) \quad -g^2 2\Delta^2 / \Delta^2 = -2g^2,$$

а третье и последнее слагаемые дают нулевой вклад. Четвертый член в (2.5), содержащий лишь члены, описывающие орбитальное движение, может быть с помощью равенства

$$(2.15) \quad \frac{\mathbf{k} \mathbf{p}}{\Delta_0 - m} = \frac{k_0 \mathbf{p}_0 - m^2}{\Delta_0 - m} - m$$

преобразован к виду

$$(2.16) \quad 2 \frac{g^2}{m^2} \frac{\mathbf{p}_0 (\Delta_0 + m) + 2\mathbf{p}_0 (\mathbf{p} \Delta) - 2m^3}{\Delta_0 - m} = \\ = 2g^2 \left[\left(\frac{\mathbf{p}_0 k_0 - m^2}{m} \right) \frac{1}{\Delta_0 - m} - \frac{\mathbf{p}_0^2}{m^2} \right]$$

Собирая вместе первое и пятое слагаемые из (2.5) и складывая их с (2.14) и с (2.16), мы находим, что

$$(2.17) \quad V_0^{s=0}(\mathbf{k}(-)\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{p}}) = g^2 \left(2m - \frac{4\overset{0}{p}_0 \overset{0}{k}_0}{m} \right) \frac{1}{\Delta_0 - m}.$$

В результате уравнение (2.13) может быть записано в виде

$$(2.18) \quad 2\overset{0}{p}_0 (M - 2\overset{0}{p}_0) \Psi_M^{s=0}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2\overset{0}{k}_0} (4\overset{0}{p}_0 \overset{0}{k}_0 - 2m^2) \times \\ \times V_0(\mathbf{k}(-)\overset{0}{\mathbf{p}}) \Psi_M^{s=0}(\mathbf{k}),$$

где

$$(2.19) \quad V_0(\mathbf{k}(-)\overset{0}{\mathbf{p}}) = -\frac{2g^2}{Q^2} = -\frac{2g^2}{2m^2 - 2m\Delta_0}.$$

Разлагая $\Psi_M^{s=0}(\overset{0}{\mathbf{p}})$ и V_0 по парциальным волнам (согласно [12] такое разложение носит инвариантный характер, см. подробнее в [9, ч. III]):

$$(2.20) \quad \Psi_M^{s=0}(\overset{0}{\mathbf{p}}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{1}{|p|} \varphi_{Ml}(\overset{0}{p}) P_l(\overset{0}{n}_0),$$

$$(2.21) \quad V^{s=0}(\mathbf{k}(-)\overset{0}{\mathbf{p}}, \overset{0}{\mathbf{p}}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{4\pi} V_l(\overset{0}{k}, \overset{0}{p}) P_l(\cos \widehat{\overset{0}{\mathbf{n}}_0 \overset{0}{\mathbf{n}}_k}),$$

мы для $\varphi_{Ml}(\overset{0}{p})$ находим уравнение ($\overset{0}{p} = |\overset{0}{\mathbf{p}}|$)

$$(2.22) \quad 2\overset{0}{p}_0 (M - 2\overset{0}{p}_0) \varphi_{Ml}(\overset{0}{p}) = \frac{g^2}{(2\pi)^2} \int \frac{d\overset{0}{k}_0}{2\overset{0}{k}_0} (2\overset{0}{p}_0 \overset{0}{k}_0 - m^2) \times \\ \times Q_l \left(\frac{\overset{0}{k}_0 \overset{0}{p}_0 - m^2}{\overset{0}{k} \overset{0}{p}} \right) \varphi_{Ml}(\overset{0}{k}).$$

В нерелятивистском пределе $\overset{0}{k}_0 \rightarrow mc^2 + k^2/2m$,

$$(2.23) \quad Q_l \left(\frac{k_0 p_0 - m^2 c^4}{pkc^2} \right) \rightarrow Q_l \left(\frac{k^2 + p^2}{2kp} \right),$$

и уравнение переходит в уравнение Шредингера в импульсном представлении

$$(2.24) \quad \left(\frac{p^2}{2m} + E_{св} \right) \varphi_{E, l}(\overset{0}{p}) = -\frac{g^2}{(2\pi)^2} \times \\ \times \int \frac{d\overset{0}{k}}{2\overset{0}{k}} Q_l \left(\frac{k^2 + p^2}{2kp} \right) \varphi_{E, l}(\overset{0}{k}).$$

Легко показать, что аналогичное (2.18) уравнение возникает, и если в исходное уравнение (1.2) мы подставим волновую функцию, выбранную

в виде

$$(2.25) \quad \Psi_M^{\sigma_1 \sigma_2}(\vec{p}) = \bar{u}_q^{\sigma_1}(p_1) \gamma_5 \bar{u}_{\bar{q}}^{\sigma_2}(p_2) \frac{\varphi_M(\vec{p})}{2p_0}, \quad \vec{p}_0 = \frac{P p_1}{M},$$

а квазипотенциал — в том же виде (2.1) и (2.2). Действительно, в этом случае имеем

$$(2.26) \quad (M - 2\vec{p}_0) \bar{u}_q(p_1) \gamma_5 \bar{u}_{\bar{q}}(p_2) \varphi_M(\vec{p}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^{(3)}\vec{k}}{(2k_0)^2} \bar{u}_q(p_1) \gamma^\mu u_q(k_1) u_{\bar{q}}(k_2) \gamma_\mu \times \\ \times \bar{u}_{\bar{q}}(p_2) V_0(\vec{k}(-)\vec{p}) \bar{u}_q(k_1) \gamma_5 \bar{u}_{\bar{q}}(k_2) \varphi_M(\vec{k}).$$

Умножая слева на $u_{\bar{q}}(p_2) \gamma_5 u_q(p_1)$ и суммируя по поляризациям, получаем

$$2(2\vec{p}_0)^2 (M - 2\vec{p}_0) \varphi_M(\vec{p}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2k_0)^2} A(p, k) V_0(\vec{k}(-)\vec{p}) \varphi_M(\vec{k}),$$

где

$$(2.27) \quad A(p, k) = \text{Sp} \{ (\hat{p}_2 - m) \gamma_5 (\hat{p}_1 + m) \gamma^\mu (\hat{k}_1 + m) \gamma_5 (\hat{p}_2 - m) \gamma_\mu \} = \\ = -4 \{ 4(p_1 p_2)(k_1 k_2) + 4m^2(k_1 k_2) + 4m^2(p_1 p_2) - \\ - 2m^2(p_1 + p_2)(k_1 + k_2) + 4m^2 \},$$

$$(2.28) \quad A(p, k) = 4 \cdot 2p_0 2k_0 (2p_0 k_0 - m^2).$$

Подстановка (2.28) в (2.26) и приводит к уравнению (2.18).

Обратимся теперь к вопросу изучения асимптотики волновой функции, удовлетворяющей уравнению (2.18). Ограничимся вначале рассмотрением сферически-симметричного s -состояния и перейдем в (2.18) к новым переменным — быстрой кварков χ путем перехода к параметризации импульсов

$$(2.29) \quad \vec{p}_0 \equiv \Delta_{p, m\lambda_p}^0 = m \text{ch } \chi_p; \quad k_0 \equiv \Delta_{k, m\lambda_k}^0 = m \text{ch } \chi_k, \\ \vec{p}^0 \equiv \Delta_{p, m\lambda_p} = \vec{n}_p m \text{sh } \chi_p; \quad \vec{k}^0 \equiv \Delta_{k, m\lambda_k} = \vec{n}_k m \text{sh } \chi_k, \\ \vec{n}_p = \vec{p}/|\vec{p}|; \quad \vec{n}_k = \vec{k}/|\vec{k}|.$$

В результате интегрирования по полярному углу в (2.18) мы приходим к уравнению

$$(2.30) \quad \text{ch } \chi_p \left(\frac{M}{2m} - \text{ch } \chi_p \right) \varphi_M(\chi_p) = \\ = \frac{m^2}{2(2\pi)^3} \int_0^{\chi_p + \chi_k} d\chi_k [\text{ch}(\chi_p - \chi_k) + \text{ch}(\chi_p + \chi_k) - 1] \times \\ \times \int_{|\chi_p - \chi_k|}^{\chi_p + \chi_k} dy \text{sh } y V_0(2m \text{sh } y/2) \varphi_M(\chi_k).$$

Здесь мы перешли с помощью соотношения

$$(2.31) \quad \Psi_M^{s=0}(|\Delta_{p,ml_p}|) \equiv \Psi_M^{s=0}(m \operatorname{sh} \chi_p) = \frac{4\pi}{m \operatorname{sh} \chi_p} \Phi_M(\chi_p)$$

к новой волновой функции $\Phi(\chi_p)$ и в квазипотенциале воспользовались следующей параметризацией квадрата переданного импульса:

$$(2.32) \quad q^2 = (p_1 - k_1)^2 = 2m^2 - 2m\Delta_0 = 2m^2 - 2m \sqrt{m^2 + (\vec{p}(-)\vec{k})^2} = \\ = -(2m \operatorname{sh} y/2)^2 = -Q^2,$$

где

$$(2.33) \quad \operatorname{ch} y = \operatorname{ch} \chi_p \operatorname{ch} \chi_k - (\mathbf{n}_p \mathbf{n}_k) \operatorname{sh} \chi_p \operatorname{sh} \chi_k.$$

В терминах этих переменных для квазипотенциала электромагнитного взаимодействия имеем выражение

$$(2.34) \quad V_0^{\text{КЭД}}(2m \operatorname{sh} y/2) = \frac{4\pi\alpha}{q^2} = -\frac{\pi\alpha}{m^2 \operatorname{sh}^2 y/2},$$

а для квазипотенциала, соответствующего в КХД одноглюонному обмену, соответственно

$$(2.35) \quad V_0^{\text{КХД}}(2m \operatorname{sh} y/2) = -\frac{(4\pi)^2}{\beta_0 Q^2 \ln Q^2/\Lambda^2} = \\ = -\frac{(2\pi)^2}{2\beta_0 m^2 \operatorname{sh}^2 y/2 \ln \left(\frac{2m}{\Lambda} \operatorname{sh} y/2 \right)},$$

где $\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}h_f$.

Асимптотику волновой функции при $|\Delta_{p,ml_p}| \rightarrow \infty$ можно найти из интегрального уравнения (2.30), если мы совершим в его правой части непосредственно под знаком интеграла переход к пределу $\chi_p \rightarrow \infty$. Таким образом, получаем

$$(2.36) \quad \Phi_M(\chi_p) \simeq \frac{m^2 \operatorname{sh} \chi_p V_0(2m \operatorname{sh} \chi_p/2)}{(2\pi)^2 (M/2m - \operatorname{ch} \chi_p)} \int_0^\infty d\chi_k \chi_k \Phi_M(\chi_k).$$

Из (2.36) мы заключаем, что в случае квазипотенциала квантовой электродинамики (КЭД) (2.34) асимптотика КЭД имеет вид

$$(2.37) \quad \Phi_M^{\text{КЭД}}(\chi_p) \simeq \frac{\alpha \operatorname{sh} \chi_p}{2\pi (\operatorname{ch} \chi_p - M/2m)} \frac{1}{(\operatorname{ch} \chi_p - 1)} \int_0^\infty d\chi_k \chi_k \times \\ \times \Phi_M^{\text{КЭД}}(\chi_k) \simeq \text{const} / \operatorname{ch} \chi_p,$$

а в случае КХД

$$(2.38) \quad \Phi_M^{\text{КХД}}(\chi_p) \simeq \frac{\operatorname{sh} \chi_p}{4 \cdot 2\beta_0 \left(\operatorname{ch} \chi_p - \frac{M}{2m} \right)} \frac{1}{(\operatorname{ch} \chi_p - 1)} \times \\ \times \frac{1}{\ln \left(\frac{2m}{\Lambda} \operatorname{sh} \frac{\chi_p}{2} \right)} \int_0^\infty d\chi_k \chi_k \Phi_M^{\text{КХД}}(\chi_k) \simeq \frac{\text{const}}{\chi_p \operatorname{sh} \chi_p}.$$

3. ФОРМУЛИРОВКА УРАВНЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Совершим теперь в уравнении (2.18) переход к релятивистскому конфигурационному представлению, введенному ранее в [15] с помощью разложения волновой функции $\Psi_M(p)$ на группе Лоренца:

$$(3.1) \quad \Psi_M(p) = \int d^3r \xi^*(p, r) \Psi_M(r),$$

$$(3.2) \quad \Psi_M(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p_0} \xi(p, r) \Psi_M(p),$$

где функции [16]

$$(3.3) \quad \xi(p, r) = \left[\frac{p_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{n}}{m} \right]^{-1-irm}; \quad \mathbf{r} = r\mathbf{n}; \quad n^2 = 1,$$

реализуют основную серию унитарных неприводимых представлений группы $SO(3,1)$ и образуют полную и ортогональную систему функций на массовом гиперboloиде (1.5). С помощью соотношения [15]

$$(3.4) \quad \hat{H}_0 \xi(p, r) = 2(p) \xi(p, r),$$

где

$$(3.5) \quad \hat{H}_0 = 2m \operatorname{ch} \left(\frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{2i}{r} \operatorname{sh} \left(\frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\Delta_{\theta, \varphi}}{mr^2} \exp \left(\frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

— конечно-разностный оператор свободного гамильтониана, уравнение (2.18) можно записать в виде

$$(3.6) \quad \hat{H}_0 (M - \hat{H}_0) \Psi_M(r) = \left\{ \hat{H}_0 \frac{V_0(r)}{2m^2} \hat{H}_0 - V_0(r) \right\} \Psi_M(r).$$

Как мы видим из (3.6), в спиновом случае взаимодействие входит в уравнение весьма сложным образом.

Рассмотрим теперь парциальное разложение волновой функции

$$(3.7) \quad \Psi_M^{S=0}(r) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{1}{r} \varphi_{M,l}^{S=0}(r) P_l(n)$$

и ограничимся лишь s -состоянием. Для $\varphi_{M,l=0}^{S=0}(r)$ радиальное уравнение имеет вид

$$(3.8) \quad \hat{H}_0^{\text{rad}} (M - \hat{H}_0^{\text{rad}}) \varphi_{M,l=0}^{S=0}(r) = \left[\hat{H}_0^{\text{rad}} \frac{V_0(r)}{2m^2} \hat{H}_0^{\text{rad}} - V_0(r) \right] \varphi_{M,l=0}^{S=0}(r),$$

где для $l=0$

$$(3.9) \quad \hat{H}_{0,l=0}^{\text{rad}} = 2m \operatorname{ch} \left(\frac{i}{m} \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе нами получено ковариантное уравнение для волновой функции связанного состояния системы кварка и антикварка со спином $1/2$, находящихся в синглетном состоянии с полным спином $S=0$.

Это уравнение может рассматриваться как уравнение для описания относительного движения кварков в π -мезоне. Нами получен вид асимптотики волновой функции в импульсном представлении при больших значениях относительного импульса. В следующей работе мы детально исследуем поведение волновой функции и спектры масс связанного состояния.

Авторы благодарны В. Г. Кадышевскому, С. П. Кулешову, А. В. Сидорову и И. Л. Соловцеву за полезные обсуждения.

Литература

- [1] *Salpeter E. E., Bethe H. A.* — Phys. Rev., 1951, 84, № 6, 1232–1248.
- [2] *Logunov A. A., Tavkhelidze A. N.* — Nuovo Cim., 1963, 29, № 2, 380–400.
- [3] *Логунов А. А., Саврин В. И., Тюрин И. Е., Хрусталева О. А.* — ТМФ, 1971, 6, № 2, 157–165.
- [4] *Кадышевский В. Г.* — ЖЭТФ, 1968, 46, № 2, 654–662.
- [5] *Kadyshevsky V. G.* — Nucl. Phys., 1968, B6, № 12, 125–148.
- [6] *Mateev V. A., Muradyan R. M., Tavkhelidze A. N.* Relativistically covariant equations for two particles in quantum field theory. Preprint JINR E2-3498. Dubna: JINR, 1967.
- [7] *Faustov R. N.* — Annals of Physics, 1973, 78, № 1, 176–189.
- [8] *Kadyshevsky V. G., Mateev M. D.* — Nuovo Cim., 1968, 55A, № 2, 275–300.
- [9] *Skachkov N. B.* Covariant three-dimensional equation for fermion-antifermion system. Part I. Preprint E2-84-294. Dubna: JINR, 1981; Part II — E2-84-308. Dubna: JINR, 1981; Part III — E2-84-399. Dubna: JINR, 1981.
- [10] *Savrin V. I., Skachkov N. B.* Relativistic potential with QCD large Q^2 -behaviour and the elastic form factors of mesons. Preprint TH 2822-CERN. Geneva: CERN, 1980; Nuovo Cim., 1980, 29, № 4, 363–368.
- [11] *Linkevich A. D., Savrin V. I., Skachkov N. B.* The structure functions of relativistic systems composed of two particles with 1/2 spins. Preprint E2-84-611. Dubna: JINR, 1981.
- [12] *Широков Ю. М.* — ЖЭТФ, 1958, 35, № 4, 1005–1013.
- [13] *Kvinikhidze A. N., Stoyanov D. Ts.* Retarded part of the two-time Green function and two-body relativistic problem. Preprint E2-5746. Dubna: JINR, 1971.
- [14] *Широков Ю. М.* — ЖЭТФ, 1951, 21, № 6, 748–760. *Чешков А. А., Широков Ю. М.* — ЖЭТФ, 1963, 44, № 6, 1982–1992.
- [15] *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.* — Nuovo Cim., 1968, 55A, № 2, 233–257. *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б.* — ЭЧАЯ, 1972; 2, № 3, 635–678.
- [16] *Шапиро И. С.* — ДАН СССР, 1956, 106, № 4, 647–649.

Объединенный институт
ядерных исследований

Поступила в редакцию
14.XII.1981 г.

COVARIANT THREE-DIMENSIONAL EQUATION FOR π -MESON WAVE FUNCTION IN COMPOSITE MODEL OF SPINOR QUARKS

SAVRIN V. I., SKACHKOV N. B., TYUMENKOV G. Yu.

Covariant one-time equation is derived which describes zero-spin states of a system of two spinor quarks. For the quasipotential chosen in the form of the one-gluon exchange amplitude, the asymptotics of the wave function is investigated.