МАТЕМАТИКА

УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_74

О СВЕРХРАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С *Z*-ДОБАВЛЕНИЯМИ К НОРМАЛИЗАТОРАМ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

В.С. Монахов[1], **И.К. Чирик**[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Университет гражданской защиты МЧС Беларуси*, *Минск*

ON SUPERSOLVABILITY OF A FINITE GROUP WITH *Z*-SUPPLEMENTS TO THE NORMALIZERS OF SYLOW SUBGROUPS

V.S. Monakhov[1], **I.K. Chirik**[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*University of Civil Protection of the Ministry for Emergency Situations of the Republic of Belarus*, *Minsk*

Аннотация. Исследуется конечная группа, в которой нормализатор каждой силовской подгруппы обладает холловым добавлением с циклическими силовскими подгруппами. В частности, устанавливается, что такие группы сверхразрешимы.

Ключевые слова: *конечная группа*, *силовская подгруппа*, *нормализатор*, *циклическая подгруппа*, *добавление*.

Для цитирования: *Монахов*, *В.С.* О Сверхразрешимости конечной группы с *Z*-добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп / В.С. Монахов, И.К. Чирик // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 74–77. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_74

Abstract. We study a finite group in which the normalizer of each Sylow subgroup has a Hall supplement with cyclic Sylow subgroups. In particular, it is established that such groups are supersoluble.

Keywords: *finite group*, *Sylow subgroup*, *normalizer*, *cyclic subgroup*, *supplement.*

For citation: *Monakhov*, *V.S.* On supersolvability of a finite group with *Z*-supplements to the Sylow normalizers / V.S. Monakhov, I.K. Chirik // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 74–77. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_74 (in Russian)

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Все обозначения и используемые определения стандартны и соответствуют принятым в [1]–[2]. *Добавление* к подгруппе X в группе G называется подгруппа Y такая, что $G = XY$. Если $X \cap Y = 1$, то подгруппа Y называется *дополнением* к подгруппе X в группе G.

В 1967 г. В.А. Ведерников [3] установил разрешимость группы, у которой порядки всех классов сопряженных силовских подгрупп есть степени простых чисел. Поскольку порядок класса сопряженных подгрупп совпадает с индексом нормализатора любой подгруппы из этого класса, то теорему В.А. Ведерникова можно сформулировать так: *если нормализатор каждой силовской подгруппы обладает добавлением*, *которое является силовской подгруппой группы*, *то группа разрешима*. В 2005 г. Го Веньбинь и Шам [4], используя классификацию простых групп, показали, что в этой ситуации можно ограничиться только нормализаторами силовских 2- и 3-подгрупп. Строение группы с ограничениями на добавления к нормализаторам силовских подгрупп изучалось в работах [5]–[9]. Группы с холловыми добавлениями исследовались в работах [10]–[12].

Группа, в которой каждая силовская подгруппа циклическая, называется *z-группой*. Согласно теореме Цассенхауза [13, IV.2.11] коммутант z-группы является циклической холловой подгруппой и фактор-группа по коммутанту тоже циклическая.

В настоящей работе изучается группа, в которой нормализатор каждой силовской подгруппы обладает холловым z-добавлением. В частности, доказывается, что такая группа сверхразрешима.

1 Вспомогательные результаты

Добавление, которое является z-подгруппой, будем называть z-добавлением. Силовскую p-подгруппу группы X будем обозначать через X_p, а $\pi(X)$ – множество всех простых чисел, делящих порядок группы X.

***Лемма* 1.1** [1, 1.65]. *Для группы G и ее силовской p-подгруппы G_p справедливы следующие утверждения*:

(1) *если N – нормальная подгруппа группы G*, *то $G_p \cap N$ – силовская p-подгруппа в N*, *а G_pN / N – силовская p-подгруппа в G / N*;

(2) $N_{G/N}(G_pN/N) = N_G(G_p)N/N$.

Пусть π – некоторое множество простых чисел. Напомним, что подгруппа H группы G называется π*-холловой* подгруппой, если $\pi(H) \subseteq \pi$, а индекс $|G:H|$ не делится на простые числа из π. Подгруппа H группы G называется *холловой* подгруппой, если H– π-холлова подгруппа для некоторого множества π простых чисел. Циклическая группа порядка m обозначается через C_m, а запись $X \rtimes Y$ означает, что XY – группа, X и Y – ее подгруппы, X – нормальная подгруппа и $X \cap Y = 1$.

***Лемма* 1.2** [1, 4.34]. *Пусть в группе G существует* π*-холлова подгруппа* G_π. *Если N – нормальная подгруппа группы G, то* $G_\pi \cap N$ – π*-холлова подгруппа в N, а* $G_\pi N/N$ – π*-холлова подгруппа в* G/N.

***Лемма* 1.3.** *Пусть A и B – подгруппы группы G, подгруппа A холлова в G и G = AB.*

(1) *Если N – нормальная подгруппа группы G, то* $N = (N \cap A)(N \cap B)$ *и* $N \cap A$ – $\pi(A)$*-холлова подгруппа в N.*

(2) *Если группа G разрешима и H – подгруппа в G, то* $H = (A \cap H)^x (B \cap H)^y$ *для некоторых x и* $y \in G$, *где* $(A \cap H)^x$ – $\pi(A)$*-холлова подгруппа в H.*

Доказательство. (1) По лемме 1.2 подгруппа $A \cap N$ является $\pi(A)$-холловой подгруппой в N, поэтому $|N : A \cap N|$ не делится на простые числа из $\pi(A)$. Так как $|G| = |A||B| / |A \cap B|$ и $|BN| = |B||N| / |B \cap N|$, то

$$|G:B| = |A : A \cap B| = |G : BN||BN : B| = \\ = |G:BN||N : B \cap N|$$

и $|N : B \cap N|$ делится только на простые числа из $\pi(A)$. Таким образом, $A \cap N$ и $B \cap N$ – подгруппы взаимно простых индексов в N, значит, $N = (N \cap A)(N \cap B)$.

(2) Пусть $\pi = \pi(A)$ и H_π – π-холлова подгруппа в H. По условию группа G разрешима, поэтому $H_\pi \le A^x$ для некоторого $x \in G$ и $H_\pi = H \cap A^x$. Пусть $\pi' = \pi(G) \setminus \pi$ и $H_{\pi'}$ – π'-холлова подгруппа в H. Так как π'-холлова подгруппа $B_{\pi'}$ из B является π'-холловой подгруппой в G, то $H_{\pi'} \le (B_{\pi'})^y$ для некоторого $y \in G$ и $H_{\pi'} \le H \cap B^y$. Таким образом,

$$H = H_\pi H_{\pi'} \le (H \cap A^x)(H \cap B^y) \le H$$

и $H = (H \cap A^x)(H \cap B^y)$.

***Лемма* 1.4.** *Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Предположим, что нормализатор каждой силовской подгруппы группы G обладает холловым z-добавлением. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *нормализатор каждой силовской подгруппы из N обладает холловым в N z-добавлением*;

(2) *нормализатор каждой силовской подгруппы из* G/N *обладает холловым в* G/N *z-добавлением*;

(3) *если группа G разрешима и X – подгруппа группы G, то нормализатор каждой силовской подгруппы из X обладает холловым в X z-добавлением*.

Доказательство. (1) Пусть G_p – силовская p-подгруппа группы G. Тогда $N_p = G_p \cap N$ – силовская p-подгруппа в N по лемме 1.1 (1). По условию $G = N_G(G_p)K$, где K – холлово z-добавление к $N_G(G_p)$. По лемме 1.3 (1)

$$N = (N \cap N_G(G_p))(N \cap K).$$

Подгруппа $N \cap K$ является холловой в N и $N \cap K$ – z-подгруппа. Кроме того,

$$N \cap N_G(G_p) \le N_N(N_p),$$

поэтому $N = N_N(N_p)(N \cap K)$.

(2) Пусть G_pN/N – силовская p-подгруппа в группе G/N. По условию $G = N_G(G_p)K$, где K – холлова z-подгруппа. Так как

$$N_G(G_p)N/N = N_{G/N}(G_pN/N)$$

по лемме 1.1 (2), то

$$G/N = (N_{G/N}(G_pN/N))(KN/N).$$

Подгруппа KN/N холлова в G/N по лемме 1.2 и $KN/N \simeq K/K \cap N$ z-подгруппа.

(3) Пусть X – подгруппа разрешимой группы G и X_p – силовская p-подгруппа в X. Пусть G_p – силовская p-подгруппа группы G, содержащая X_p. По условию $G = N_G(G_p)K$, где K – холлова в G z-подгруппа. По лемме 1.3 (2) подгруппа $X = (X \cap N_G(G_p))^a (X \cap K)^b$ для некоторых $a, b \in G$ и $(X \cap K)^b$ – $\pi(K)$-холлова подгруппа в X. Поскольку подгруппа $(X \cap N_G(G_p))^a$ p-замкнута и X_p^a – силовская p-подгруппа в X и в $(X \cap N_G(G_p))^a$, то $(X \cap N_G(G_p))^a \le N_X(X_p^a)$ и $X = (N_X(X_p^a))((X \cap K)^b)$. □

***Замечание* 1.1.** Пусть $\mathfrak{X}$ – класс, состоящей из всех групп, в которых нормализатор каждой силовской подгруппы обладает холловым z-добавлением. Ясно, что каждая диэдральная группа принадлежит $\mathfrak{X}$. Группа $S_3 \times X$, где X – произвольная 2-группа, тоже принадлежит $\mathfrak{X}$. Здесь S_3 – симметрическая группа степени 3. Из леммы 1.4 следует, что $\mathfrak{X}$ – наследственный гомоморф. В группе $S_3 \times S_3$ нормализатор силовской

2-подгруппы не обладает холловым z-добавлением, поэтому класс $\mathfrak{X}$ не замкнут относительно прямых произведений. В частности, $\mathfrak{X}$ не является формацией и не является классом Фиттинга.

***Пример* 1.1.** Группа $G = C_{28} \rtimes C_6$ ([14, SmallGroup(168,9)]) задается следующим образом:

$$G = \langle a,b,c \mid a^4 = b^7 = c^6 = 1,$$
$$ab = ba, cac^{-1} = a^{-1}, cbc^{-1} = b^5 \rangle.$$

В этой группе силовская 2-подгруппа $\langle a^4, c^3 \rangle$ является диэдральной группой порядка 8. Ее нормализатор совпадает с нормализатором силовской 3-подгруппы $\langle c^2 \rangle$ и является нильпотентной $\{2,3\}$-холловой подгруппой. Силовская 7-подгруппа $\langle b \rangle$ нормальна. Поэтому $G \in \mathfrak{X}$, причем группа G не является z-группой и ненильпотентна.

2 Сверхразрешимость группы с холловыми *z*-добавлениями к силовским нормализаторам

***Теорема* 2.1.** *Если в группе G нормализатор каждой силовской подгруппы обладает холловым z-добавлением, то группа G содержит холлову нормальную z-подгруппу H, фактор-группа* G/H *нильпотентна и каждая силовская подгруппа в* G/H *нециклическая. В частности, группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Если силовская 2-подгруппа G_2 группы G циклическая, то G 2-нильпотентна [13, IV.2.8]. Пусть G_2 нециклическая. Тогда холлово z-добавление к нормализатору каждой силовской подгруппы имеет нечетный порядок. По теореме Кондратьева [15], доказательство которой использует классификацию простых групп, группа G 2-нильпотентна. Поэтому G разрешима. Согласно лемме 1.4 (2,3) каждая подгруппа и каждая фактор-группа группы G удовлетворяет условию теоремы. По индукции каждая собственная в G подгруппа сверхразрешима. Если G несверхразрешима, то $G = P \rtimes U$, P – нециклическая силовская в G подгруппа и других нормальных в G силовских подгрупп нет [2, теорема 26.3]. Если Q – силовская подгруппа, отличная от P, то P не содержится в $N_G(Q)$, поэтому подгруппа P должна быть циклической, противоречие. Значит, группа G сверхразрешима.

Пусть группа G ненильпотентна и не является z-группой и пусть $\pi(G) = \tau \cup \sigma$, где τ – множество всех простых чисел r, для которых силовская r-подгруппа группы G циклическая, а $\sigma = \pi(G) \setminus \tau$. Так как G не является z-группой, то $\sigma \neq \varnothing$. Поскольку G ненильпотентна, то существует ненормальная в G силовская подгруппа Q и холлово z-добавление к $N_G(Q)$ будет неединичной подгруппой. Значит, $\tau \neq \varnothing$.

Пусть $G_{\{r\cup\sigma\}} = G_r G_\sigma$ – $\{r \cup \sigma\}$-холлова подгруппа в G для $r \in \tau$. Если G_r не нормальна в $G_r G_\sigma$, то холлово z-добавление к $N_{G_r G_\sigma}(G_r)$ в подгруппе $G_r G_\sigma$ содержит G_q для некоторого $q \in \sigma$ и подгруппа G_q должна быть циклическая, противоречие. Поэтому G_r нормальна в $G_r G_\sigma$. Если r – наибольшее в τ, то G_r нормальна в G_τ и G_r нормальна в G. Согласно лемме 1.4 (2) фактор-группа G/G_r удовлетворяет условию теоремы. По индукции G/G_r содержит холлову нормальную z-подгруппу H/G_r, фактор-группа $(G/G_r)/(H/G_r)$ нильпотентна и каждая силовская подгруппа в

$$(G/G_r)/(H/G_r) \cong G/H$$

нециклическая. Поэтому $H = G_\tau$ – нормальная в G холлова z-подгруппа и каждая силовская в G/G_τ подгруппа нециклическая. □

***Следствие* 2.1.1** [5]. *Если в группе G нормализатор каждой силовской подгруппы обладает циклическим холловым добавлением, то группа G сверхразрешима.*

***Замечание* 2.1.** В условиях теоремы ограничиться нормализаторами силовских 2- и 3-подгрупп нельзя. Примером служит простая группа $PSL(2,11)$, в которой нормализаторы силовских 2- и 3-подгрупп обладают холловыми z-дополнениями порядка 55.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Монахов*, *В.С.* Введение в теорию конечных групп и их классов / В.С. Монахов. – Минск: Вышэйшая школа, 2006. – 207 с.

2. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 271 с.

3. *Ведерников*, *В.А.* О признаках разрешимости и сверхразрешимости конечных групп / В.А. Ведерников // Сибирский математический журнал. – 1967. – Т. 8, № 6. – С. 1236–1244.

4. *Guo*, *W.* A note on finite groups whose normalizers of Sylow 2-, 3-sugroups are prime power indices / W. Guo, K.P. Shum // J. Applied Algebra and Discrete Structures. – 2005. – Vol. 3, № 1. – P. 1–9.

5. *Buchthal*, *D.* On factorized groups / D. Buchthal // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 183. – P. 423–430.

6. *Perin*, *D.* Finite groups with nicely supplemented Sylow normalizers / D. Perin // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 183. – P. 431–435.

7. *Zhang*, *J.* Sylow numbers of finite groups / J. Zhang // J. Algebra. – 1995. – Vol. 176. – P. 111–123.

8. *Го*, *Вэньбинь*. Конечные группы с заданными индексами нормализаторов силовских

подгрупп / Вэньбинь Го // Сибирский математический журнал. – 1996. – Т. 37, № 2. – С. 295–300.

9. *Chigiram*, *N*. Numbers of Sylow subgroups and *p*-nilpotency of finite groups / N. Chigiram // J. Algebra. – 1998. – Vol. 201, № 1. – P. 71–85.

10. *Монахов*, *В.С*. Конечные группы с холловыми добавлениями к примитивным подгруппам / В.С. Монахов // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 2. – С. 359–368.

11. *Монахов*, В.С. О разрешимости группы с холловыми добавлениями к нормализаторам силовских подгрупп / В.С. Монахов, Т.В. Бородич // Математические заметки. – 2009. – Т. 85, № 2. – С. 227–233.

12. *Ли*, *Б*. Конечные группы, в которых нормализаторы силовских подгрупп имеют нильпотентные холловы добавления / Б. Ли, В. Го, Х. Цзяньхун // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 50, № 4. – С. 841–849.

13. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.

14. The GAP Group: GAP – Groups, Algorithms, and Programming. Ver. GAP 4.11.0 [Electronic resource]: A system for computational discrete algebra. – Mode of access: https://www.gap-system.org. – Date of Access: 29.02.2020.

15. *Кондратьев*, *А.С*. Критерий 2-нильпотентности конечных групп / А.С. Кондратьев // В кн.: Подгрупповая структура групп. Свердловск: УрО АН СССР. – 1988. – С. 82–84.

Поступила в редакцию 25.11.2021.

Информация об авторах

Монахов Виктор Степанович – д.ф.-м.н., профессор

Чирик Ирина Константиновна – к.ф.-м.н., доцент