*УДК 512.542*

*И.В. БЛИЗНЕЦ*

# О КРИТИЧЕСКИХ $p$-КОМПОЗИЦИОННЫХ ФОРМАЦИЯХ

The minimal $p$-composition non-$\mathfrak{H}$-formations are described where $\mathfrak{H}$ is a formation of classical types.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Символом $C^p(G)$ обозначается [1] пересечение всех централизаторов всех главных $p$-факторов $H/K$ группы $G$ ($C^p(G)=G$, если группа $G$ таковых главных факторов не имеет). Напомним, что формацией называется класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Символ $\mathcal{K}(G)$ обозначает множество всех тех простых групп, которые изоморфны композиционным факторам группы $G$. Будем использовать также следующую терминологию из [2].

Пусть $p$ – произвольное простое число. Всякая функция $f{:}\{p, p'\} \mapsto$ {формации групп} называется $p$-композиционным спутником. Для произвольного $p$-композиционного спутника $f$ символом $CF_p(G)$ обозначается класс групп

$$\{G|G/O_p(G)\in f(p') \text{ и } G/C^p(G)\in f(p), \text{ если } Z_p\in \mathcal{K}(G)\}.$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=CF_p(f)$, то говорят, что она $p$-композиционна, а $f$ – $p$-композиционный спутник этой формации.

В теории формаций конечных групп важную роль играют экстремальные объекты различных типов и, в частности, минимальные не $\mathfrak{H}$-формации. Напомним [2], что $p$-композиционная формация $\mathfrak{F}$ называется минимальной $p$-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией, если $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{H}$, но в классе групп $\mathfrak{H}$ содержатся все собственные $p$-композиционные формации из $\mathfrak{F}$.

Общая проблема изучения формаций такого рода поставлена А.Н. Скибой и Л.А. Шеметковым [2]. В данной работе дается решение такой задачи в случае, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная локальная формация классического типа.

Структуру доказательства основного результата отражают следующие доказанные нами леммы.

**Лемма 1.** *Пусть $\mathfrak{H}=\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ – непустая формация. Пусть $H$ – канонический $p$-композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$. Тогда*

$$H(a)=\begin{cases}\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}, & \text{если } a=Z_p,\\ \mathfrak{H}, & \text{если } a=(Z_p)'.\end{cases}$$

**Лемма 2.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – локальная формация, $\mathfrak{H}=\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$. Тогда в том и только в том случае $\mathfrak{F}$ является минимальной $p$-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F}=c_p\mathrm{form}(G)$, где $G$ – такая монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$, что $p\in\pi(P)$ и либо $G=[P]H$, где $P=C_G(P)$ – абелева $p$-группа, а $H$ – такая монолитическая группа с монолитом $Q=H^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}}$, что $Q\not\subseteq\Phi(H)$ либо $Z_p\notin\mathcal{K}(P)$.*

**Лемма 3.** *Пусть $\mathfrak{M}$ – непустая абелева формация, $\mathfrak{H}=\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае является минимальной $p$-композиционной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F}=c_p\mathrm{form}(G)$, где $G$ – такая монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$, что $p\in\pi(P)$, и либо $Z_p\notin\mathcal{K}(P)$, либо $G=[P]H$, где $C_G(P)=P$ – абелева $p$-группа, а $H$ – группа одного из следующих типов: а) $H$ – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом*

$Q = H^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{M}}$; *б) H – минимальная не* $\mathfrak{M}$*-группа, причем H либо группа кватернионова порядка 8, либо неабелева группа порядка* $q^3$ *простой нечетной экспоненты q, либо циклическая q-группа.*

**Лемма 4.** *Пусть G – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом* $R \not\subseteq O_p(G)$. *И пусть* $\mathfrak{H}$ *– такая p-композиционная формация, что* $R=G^{\mathfrak{H}}$. *Тогда* $c_p\mathrm{form}(G)$ *– минимальная p-композиционная не* $\mathfrak{H}$*-формация.*

**Лемма 5.** *Пусть* $G=[P]H$, *где* $P=C_G(P)$ *– минимальная нормальная p-подгруппа группы G, H – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом Q. Тогда формация* $\mathfrak{F}=c_p\mathrm{form}(G)$ *–* $c_p$*-неприводима и ее максимальная p-композиционная подформация* $\mathfrak{M}$ *имеет такой внутренний p-композиционный спутник m, что*

$$m(a) = \begin{cases} \mathrm{form}(H/Q), & \text{если } a = Z_p, \\ \mathrm{form}(G/O_p(G)), & \text{если } a = (Z_p)'. \end{cases}$$

На основе лемм 1–5 и теоремы работы [3] получена

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathfrak{H}$ *– локальная формация классического типа, и H – ее канонический p-композиционный спутник. Тогда* $\mathfrak{F}$ *в том и только в том случае является минимальной p-композиционной не* $\mathfrak{H}$*-формацией, когда* $\mathfrak{F}=c_p\mathrm{form}(G)$, *где G – такая монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$, *что либо* $Z_p \notin \mathcal{K}(P)$, *либо* $Z_p \in \mathcal{K}(P)$ *и выполняется одно из следующих условий:*

1) $G=P$ *– группа порядка* $p \notin \pi(\mathfrak{H})$;

2) $G=[P]H$, $P=C_G(P)$ *– абелева p-группа и а) H – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом* $Q = H^{Z_p}$; *б) H – минимальная не* $(H(Z_p))$*-группа, причем H либо группа кватернионова порядка 8, либо неабелева группа порядка* $q^3$ *простой нечетной экспоненты q, либо циклическая q-группа.*

Данная теорема имеет много следствий. Здесь мы приведем лишь два из них.

*Следствие* 1. *Пусть* $\mathfrak{S}$ *– формация разрешимых групп. Тогда* $\mathfrak{F}$ *в том и только в том случае является минимальной p-композиционной не* $\mathfrak{S}$*-формацией, когда* $\mathfrak{F}=c_p\mathrm{form}(G)$, где *G – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом* $P=G^{\mathfrak{S}}$, *и справедливо следующее утверждение:* $G=[P]H$, $P=C_G(P)$ *– абелева p-группа, и H – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом* $Q=H^{\mathfrak{S}}$.

*Следствие* 2. *Пусть* $\mathfrak{N}$ *– формация нильпотентных групп. Тогда* $\mathfrak{F}$ *в том и только в том случае является минимальной p-композиционной не* $\mathfrak{N}$*-формацией, когда* $\mathfrak{F}=c_p\mathrm{form}(G)$, *где G – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом* $P=G^{\mathfrak{N}}$, и справедливо следующее утверждение: $G=[P]H$, $P=C_G(P)$ – абелева *p-группа, и H – монолитическая группа с нефраттиниевым монолитом* $Q = H^{\mathfrak{N}_p}$.

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York, 1992.
2. Скиба А.Н., Шеметков Л.А. // Укр. мат. журн. 52. № 6. 2000. С. 783.
3. Близнец И.В., Скиба А.Н. // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. № 1(1). Вопр. алгебры. 1999. № 15. С. 147.

Поступила в редакцию 08.07.2002.

***Игорь Васильевич Близнец*** – аспирант кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины. Научный руководитель – доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры и геометрии ГГУ им. Ф. Скорины А.Н. Скиба.