УДК 512.542 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_94

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННОЙ СИСТЕМОЙ ФОРМАЦИОННЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

А.К. Фурс

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

FINITE GROUPS WITH A GIVEN SYSTEM OF FORMATION MAXIMAL SUBGROUPS

A.K. Furs

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. В работе изучаются конечные группы, которые имеют три или четыре попарно несопряженные максимальные подгруппы, принадлежащие данной насыщенной формации. Получены новые признаки принадлежности конечной группы насыщенным формациям сверхразрешимого типа.

Ключевые слова: *конечная группа*, *максимальная подгруппа*, *ненормальная подгруппа*, *сверхразрешимая группа*, w-*сверхразрешимая группа*, *насыщенная формация*.

Для цитирования: *Фурс*, *А.К.* Конечные группы с заданной системой формационных максимальных подгрупп / А.К. Фурс // Проблемы физики, математики и техники. – 2022. – № 1 (50). – С. 94–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_94

Abstract. We study finite groups that have three or four pairwise non-conjugate maximal subgroups belonging to a given saturated formation. New criteria for the belonging of a finite group to saturated formations of a supersoluble type are obtained.

Keywords: *finite group*, *maximal subgroup*, *non-normal subgroup*, *supersoluble group*, w-*supersoluble group*, *saturated formation*.

For citation: *Furs*, *A.K.* Finite groups with a given system of formation maximal subgroups / A.K. Furs // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2022. – № 1 (50). – P. 94–100. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_94 (in Russian)

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Для лучшего понимания и удобства чтения работы можно использовать монографии [1], [2]. Максимальные подгруппы занимают центральное место при изучении влияния свойств заданной системы подгрупп на строение группы. В [3] В.А. Белоноговым был получен замечательный результат: если группа G имеет 3 попарно несопряженные нильпотентные максимальные подгруппы, то G нильпотентна. Отметим, что Б. Хефлинг для данного натурального числа $n \geq 3$ привел пример [4, Example 2.4] несверхразрешимой группы, которая имеет n классов попарно несопряженных сверхразрешимых максимальных подгрупп. С другой стороны, А.Ф. Васильевым в [5] было доказано, что если разрешимая группа содержит три попарно несопряженные ненормальные сверхразрешимые максимальные подгруппы, то она сверхразрешима. В настоящей работе нами получено следующее обобщение этого результата.

***Теорема* А**. *Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, состоящая из групп с нильпотентным коммутантом. Если разрешимая группа G имеет* 3 *попарно несопряженные ненормальные максимальные подгруппы*, *принадлежащие $\mathfrak{F}$*, *то G принадлежит $\mathfrak{F}$*.

Из теоремы А можно извлечь новые, ранее неизвестные следствия для конкретных формаций. Приведем некоторые из них. Напомним [6], что подгруппа H группы G называется модулярной в G, если:

1) $\langle X, H \cap V\rangle = \langle X, H\rangle \cap V$ для всех $X \leq G$, $V \leq G$ таких, что $X \leq V$;

2) $\langle H, W \cap V\rangle = \langle H, W\rangle \cap V$ для всех $W \leq G$, $V \leq G$ таких, что $H \leq V$.

Подгруппа R группы G называется субмодулярной в G [7], если R можно соединить с G рядом подгрупп $R = R_0 \leq R_1 \leq \ldots \leq R_{t-1} \leq R_t = G$ таких, что R_{i-1} модулярна в R_i для $i = 1, \ldots, t$.

Сверхразрешимая группа называется сильно сверхразрешимой [8], если ее любая силовская подгруппа субмодулярна в ней.

Согласно [8] класс $s\mathfrak{U}$ всех сильно сверхразрешимых групп образует S-замкнутую насыщенную формацию.

***Следствие* А.1.** *Если в разрешимой группе G имеется по крайней мере* 3 *попарно* *несопряженные ненормальные сильно сверхразрешимые максимальные подгруппы, то сама G сильно сверхразрешима.*

***Следствие* A.2.** *Если в разрешимой группе G имеется по крайней мере 3 попарно несопряженные ненормальные максимальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, то сама G имеет нильпотентный коммутант.*

Для формулировки следующей теоремы B приведем необходимые сведения из работы [9].

Подгруппа R группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если либо $R = G$, либо R можно соединить с G цепью подгрупп

$$R = R_0 < R_1 < \cdots < R_{k-1} < R_k = G$$

такой, что $|R_{j+1} : R_j|$ – простое число для любого $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Группа G называется w-сверхразрешимой [9], если любая силовская подгруппа группы G является $\mathbb{P}$-субнормальной в G. Класс $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ всех w-сверхразрешимых групп образует наследственную насыщенную формацию.

***Теорема* B**. *Если группа G имеет* 3 *попарно несопряженные* w*-сверхразрешимые максимальные подгруппы и ее обобщенный коммутант* $G^{\mathcal{A}}$ *нильпотентен, то группа G является* w*-сверхразрешимой.*

Исходным результатом заключительной теоремы C работы служит следующая теорема, полученная А.Ф. Васильевым в заметке [10]: Если группа G содержит 4 попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы, из которых 2 нормальны, а 2 ненормальны в G, то G сверхразрешима.

***Теорема* C.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– насыщенная формация, составленная из метанильпотентных групп. Если группа G имеет* 4 *попарно несопряженные максимальные подгруппы, принадлежащие* $\mathfrak{F}$, *из которых* 2 *нормальны, а* 2 *ненормальны в G, то G принадлежит* $\mathfrak{F}$.

***Следствие* C.1.** *Если группа G имеет* 4 *попарно несопряженные максимальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, причем* 2 *из них нормальны, а* 2 *ненормальны в G, то G имеет нильпотентный коммутант.*

***Следствие* C.2.** *Если группа G имеет* 4 *попарно несопряженные метанильпотентные максимальные подгруппы, из которых* 2 *нормальны, а* 2 *ненормальны в G, то G метанильпотентна.*

1 Предварительные сведения

В основе работы лежат стандартные обозначения и определения, которые можно найти [1], [2]. Для удобства читателя мы приведем некоторые из них.

Символ $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел, $\pi \subseteq \mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Если G – группа, то $\pi(G)$ обозначает множество всех простых делителей порядка G. Подгруппа H группы G называется π-подгруппой, если $\pi(H) \subseteq \pi$. $O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа G, $O_{p',p}(G)$ – наибольшая нормальная p-нильпотентная подгруппа G (p-нильпотентный радикал G) для $p \in \mathbb{P}$; $F(G)$ – наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа (подгруппа Фиттинга) группы G; $\Phi(G)$ – подгруппа Фраттини группы G; $G = N \rtimes M$ – полупрямое произведение подгрупп M и n ($N \trianglelefteq G$ и $N \cap M = 1$); 1 – единичная группа (подгруппа).

Пусть для класса групп $\mathfrak{F}$ выполняется,

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \trianglelefteq G$, то $G / N \in \mathfrak{F}$;

2) если $N_i \trianglelefteq G$ и $G / N_i \in \mathfrak{F}$ $(i = 1, 2)$, то $G / N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ называется формацией. Из определения формации следует, что в любой группе G всегда найдется наименьшая нормальная подгруппа $G^{\mathfrak{F}}$ такая, что $G / G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$.

Формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, если из $G / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется S-замкнутым (наследственным), если из $L \leq G \in \mathfrak{F}$ получаем $L \in \mathfrak{F}$.

Напомним [11, с. 751], что A-группой называется разрешимая группа с абелевыми силовскими подгруппами. Класс $\mathcal{A}$ всех A-групп образует наследственную формацию. $\mathcal{A}$-корадикал $G^{\mathcal{A}}$ группы G называется также обобщенным коммутантом [9].

Будем использовать следующие обозначения:

$\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп;

$\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ – класс всех групп, имеющих нильпотентный коммутант

$\mathfrak{N}^2$ – класс всех метанильпотентных групп.

$\mathfrak{G}$ – класс всех групп,

$\mathfrak{S}_\pi$ – класс всех разрешимых π-групп для $\pi \subseteq \mathbb{P}$,

$\mathfrak{G}_p = \mathfrak{G}_\pi$ для $\pi = \{p\}$;

$\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π-групп;

$\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп.

Отображение $f : \mathbb{P} \to \{\text{формации}\}$ называется локальной функцией. С помощью f определяется класс групп $LF(f)$, который состоит из всех групп G, у которых $G / C_G(H / K) \in f(p)$ для каждого главного фактора H / K и любого $p \in \pi(H / K)$. Если формация $\mathfrak{F} = LF(f)$ для некоторой локальной функции f, то $\mathfrak{F}$ называется локальной.

Пусть $\mathfrak{F} = LF(f)$. Локальная функция f – внутренняя для $\mathfrak{F}$, если $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$ для каждого простого числа p; внутренняя функция H локальной формации $\mathfrak{F}$ называется кононической локальной функцией для $\mathfrak{F}$, если $H(p) = \mathfrak{N}_p H(p)$ для каждого простого p. Важное свойство кононической локальной функции H: для любой внутренней локальной функции f, задающей $\mathfrak{F} = LF(f)$ выполняется $f(p) \subseteq H(p)$ для каждого простого p.

***Лемма* 1.1** [1, A. Теорема 15.6]. *Пусть G – примитивная разрешимая группа и M – максимальная подгруппа с $M_G = 1$.*

(1) *В G есть только одна минимальная нормальная подгруппа N, $N = C_G(N) = F(G)$ и $G = N \rtimes M$.*

(2) *Если $p \in \pi(N)$, то $O_p(M) = 1$.*

(3) *Все дополнения к N в G сопряжены в G.*

***Лемма* 1.2** [2, лемма 4.5]. *Пусть f – локальная функция определяет локально формацию $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда группа $G \in \mathfrak{F}$, когда $G / O_{p',p}(G) \in f(p)$ для каждого $p \in \pi(G)$.*

***Лемма* 1.3** [9, Предложение 2.8]. *Любая* w-*сверхразрешимая группа имеет силовскую башню сверхразрешимого типа* (*дисперсивна по Оре*).

***Лемма* 1.4** [9, Теорема 2.13]. *Пусть группа G* – w-*сверхразрешимая группа. Тогда*:

(1) *Каждая метанильпотентная подгруппа G сверхразрешима.*

(2) *Каждая бипримарная подгруппа G сверхразрешима.*

(3) *G имеет нильпотентный обобщенный коммутант.*

***Лемма* 1.5** [9, Теорема 2.10]. *Формация $\mathrm{w}\mathfrak{U} = LF(f)$, где f – локальная функция такая, что $f(p)$ совпадает с формацией всех разрешимых групп, имеющих абелевы силовские подгруппы, экспонента которых делит $p-1$ для каждого простого p.*

2 Доказательства теорем

Доказательство теоремы A. Пусть разрешимая группа G – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда в G имеются три попарно несопряженные ненормальные максимальные подгруппы M_1, M_2, M_3 такие, что $M_i \in \mathfrak{F}$ для каждого $i \in \{1,2,3\}$, но $G \notin \mathfrak{F}$. Ясно, что G ненильпотентна.

Из разрешимости G следует, что любая ее минимальная нормальная подгруппа является абелевой. Зафиксируем K одну из таких подгрупп. Покажем, что $G / K \in \mathfrak{F}$. Возможны два случая.

1. Пусть $G = KM_i$ для некоторого $i \in \{1,2,3\}$. Тогда $G / K = KM_i / K \simeq M_i / M_i \cap K \in \mathfrak{F}$.

2. Пусть $K \subseteq M_i$ для любого $i = 1,2,3$. Заметим, что M_1 / K, M_2 / K, M_3 / K – попарно несопряженные максимальные подгруппы факторгруппы G / K. Из $M_i \in \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ – формация следует, что $M_i / K \in \mathfrak{F}$ для любого $i = 1,2,3$. Учитывая $|G / K| \lhd |G|$ и выбор группы G, получаем $G \in \mathfrak{F}$.

Итак, для каждой минимальной нормальной подгруппы K группы G имеет место $G^{\mathfrak{F}} \subseteq K$. Это возможно только в одном случае, если K – единственная минимальная нормальная подгруппа G. Отсюда и насыщенности формации $\mathfrak{F}$ заключаем, что $\Phi(G) = 1$. Пусть R – максимальная подгруппа G, дополняющая K в G. Нетрудно видеть, что $R_G = 1$. Тогда G – примитивная группа. Ввиду (1) леммы 1.1 $G = K \rtimes R$, где K – минимальная нормальная подгруппа G, являющаяся p-подгруппой для некоторого простого числа p, при этом $K = C_G(K) = F(G)$ и $R \in \mathfrak{F}$ – максимальная подгруппа G с $R_G = 1$.

По (3) леммы 1.1 все дополнения к K являются максимальными подгруппами в G и сопряжены в ней. Учитывая эти факты, будем полагать, что $K \subseteq M_i$, где $i = 1,2$. Применяя тождество Дедекинда, имеем

$$M_i = M_i \cap K \rtimes R = K(M_i \cap R)$$

для каждого $i = 1,2$. Из $K = C_G(K)$ и $K \subseteq M_i$ вытекает, что $O_{p',p}(M_i)$ является p-группой для любого $i = 1,2$.

Вспомним, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Класс $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ ввиду [1, IV (b), пример 3.4] является насыщенной формацией и может быть задан локальной внутренней функцией g со значениями $g(p) = \mathfrak{A}$ для каждого простого p. Отсюда и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ следует, что локальная формация $\mathfrak{F}$ определяется внутренней локальной функцией f, у которой $f(p) \subseteq \mathfrak{A}$. Рассмотрим локальную функцию H, имеющую значения $H(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для каждого простого p. Тогда по [1, IV (a), предложение 3.8] получаем, что H – каноническое локальное задание формации $\mathfrak{F}$.

Учитывая, что $M_i = K \rtimes (M_i \cap R) \in \mathfrak{F}$ по лемме 1.2 получаем, что $M_i \cap R \in H(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для $i = 1,2$. Теперь из свойств формации $H(p)$ вытекает p-замкнутость подгруппы $M_i \cap R$ для $i = 1,2$. Далее заметим, что $M_1 \cap R$ и $M_2 \cap R$ являются попарно несопряженными ненормальными максимальными подгруппами в R. Из разрешимости R и несопряженности $M_1 \cap R$ и $M_2 \cap R$ по теореме Оре получаем, что

$$R = (M_1 \cap R)(M_2 \cap R).$$

Пусть R_p – силовская p-подгруппа, $R_{p'}$ – холлова p'-подгруппа группы R. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $R_p \subseteq M_i \cap R$, $i=1,2$. Тогда подгруппа R_p является нормальной подгруппой в двух несопряженных максимальных подгруппах группы *R*. Из $R=(M_1 \cap R)(M_2 \cap R)$ следует, что $O_p(R)=R_p$. Ввиду леммы 1.1 получаем, что $O_p(R)=R_p=1$. Следовательно, $M_i \cap R$ является p'-подгруппой $M_i \cap R \in f(p) \subseteq \mathfrak{A}$ для $i=1,2$. В этом случае $R=(M_1 \cap R)(M_2 \cap R)$ является произведением двух ненормальных абелевых подгрупп *R*. Из [12] следует, что *R* нильпотентна. Но тогда максимальная подгруппа $M_i \cap R$ является нормальной в *R*. Получили противоречие с ненормальностью $M_i \cap R$ в *R*. Этот случай не возможен.

2. Предположим, что $R_{p'} \subseteq M_i$, $i=1,2$. Из $M_i \cap R \in H(p) \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{A}$ следует, что $R_{p'} \in f(p) \subseteq \mathfrak{A}$. Отсюда следует, что $M_i \cap R$ является *p*-замкнутой группой для $i=1,2$. В этом случае по лемме 11.6 из [2] получаем, что

$$R_p=(M_1 \cap R)_p(M_2 \cap R)_p.$$

Из $R_{p'} \subseteq N_G(R_p)$ следует, что R_p нормальна в *R*. Из леммы 1.1 вытекает, что $R_p=1$. Следовательно, $R=R_{p'} \in f(p) \subseteq H(p)$. Из $G/K \in \mathfrak{F}$ и $F_p(G)=K$ по лемме 1.2 получаем, что $G \in \mathfrak{F}$.

3. Пусть $R_p \subseteq M_1 \cap R$ и $R_{p'} \subseteq M_2 \cap R$. Если R_p нормальна в *R*, то по лемме 1.1 получаем $R_p=1$. Тогда $M_i \cap R$ является p'-подгруппой для $i=1,2$. Далее, рассуждая как и в случае 1, получаем противоречие. Пусть R_p не является нормальной подгруппой в *R*. Пусть $(M_i \cap R)_R$ – ядро подгруппы $M_i \cap R$ в *R*, $i=1,2$. Для краткости обозначим $A=(M_1 \cap R)_R$ и $B=(M_2 \cap R)_R$. Предположим, что $A \neq 1$ и $B \neq 1$. Возможны два случая.

а) Пусть $A \cap B=1$. Рассмотрим R/A. Так как максимальные подгруппы $M_1 \cap R$ и $M_2 \cap R$ не сопряжены в *R*, по теореме Оре получаем, что $(M_2 \cap R)A=R$. Откуда следует,

$$R/A=(M_2 \cap R)A/A \simeq$$
$$\simeq M_2 \cap R/M_2 \cap R \cap A \in H(p).$$

Аналогично доказывается, что $R/B \in H(p)$. Отсюда и из $H(p)$ – формация следует, что $R/A \cap B \simeq R \in H(p)$. Рассуждая, как и выше получаем, $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

б) Будем считать, что $A \cap B \neq 1$. Возьмем $S \subseteq A \cap B$ – минимальную нормальную подгруппу *R*. Из $O_p(R)=1$ следует, *S* – *q*-группа, где $q \neq p$. Рассматривая нормальную подгруппу *K* как R/S-модуль над полем F_p из *p* элементов мы можем перейти к новой группе $T=[K]R/S$. Учитывая выполнимость для *T* условий теоремы, из $|T|<|G|$ и выбора группы *G*, получаем, что $T=[K](R/S) \in \mathfrak{F}$.

Тогда по лемме 1.2 следует $T/F_p(T) \in H(p)$. Заметим, что $F_p(T)$ является *p*-группой. Ввиду $H(p)=\mathfrak{N}_p H(p)$ получаем, что $R/S \in H(p)=\mathfrak{N}_p f(p)$. Учитывая, что $f(p) \subseteq \mathfrak{A}$, имеем $R_pS/S \triangleleft R/S$. Тогда $R_pS \triangleleft R$. По лемме Фраттини $N_R(R_p)S=R$. Вспомним, что $N_R(R_p)=M_1 \cap R$ и $S \subseteq M_1 \cap R$. Получили противоречие.

Будем считать, что либо $A=1$, либо $B=1$. В этом случае *R* является примитивной группой. Тогда *R* имеет единственную минимальную подгруппу *L*, причем $L=C_R(L)$. Из $O_p(R)=1$ следует, что L – q-подгруппа, где $q \neq p$. Предположим, что $A=1$. Из несопряженности подгрупп $M_1 \cap R$ и $M_2 \cap R$ получаем, что $L \subseteq M_2 \cap R$. Ввиду $M_2 \cap R \in H(p)=\mathfrak{N}_p f(p)$ следует, что $O_p(M_2 \cap R)=1$ и $M_2 \cap R$ – абелева группа. Из $L=C_R(L)$ следует, что $M_2 \cap R=L$. Получили противоречие с тем, что $M_2 \cap R$ является ненормальной максимальной подгруппой в *R*. Предположим, что $B=1$. Тогда из $R_p \subseteq M_1 \cap R$ и $L=C_R(L)$ следует, что $R_p=1$. Далее, рассуждая как и выше, получаем противоречие. □

Доказательство теоремы B. Пусть разрешимая группа *G* – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда в *G* имеются три попарно несопряженные максимальные подгруппы M_1, M_2, M_3, принадлежащие $\mathrm{w}\mathfrak{U}$, но сама *G* не является w-сверхразрешимой группой.

Рассматривая минимальную нормальную подгруппу *L* группы *G*, мы, как и в теореме *A*, можем рассмотреть следующие два случая:

1) $G=LM_i$ для некоторого $i=1,2,3$ и

2) $L \subseteq M_i$ для любого $i=1,2,3$.

Рассуждая аналогично теореме *A*, получим $G/L \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ для любой минимальной нормальной подгруппы *L* группы *G*.

По лемме 1.5 формация $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ насыщена. Применяя стандартное рассуждение, получаем $\Phi(G)=1$ и L – единственная минимальная нормальная подгруппа *G*, причем *L* дополняется в *G* максимальной подгруппой *R* с $R_G=1$. Это означает, что *G* – примитивная группа. По лемме 1.1 $G=L \rtimes R$, где L – *p*-подгруппа для некоторого простого числа *p*, причем *L* – самоцентрализуемая подгруппа, совпадающая с подгруппой Фиттинга $F(G)$. Еще отметим, что $R \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Зафиксируем q – наибольший простой делитель среди всех делителей $|G|$. Из $M_i \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и леммы 1.3 следует, что подгруппа M_i является дисперсивной по Оре, $i = 1, 2, 3$. В частности, M_i будет q-замкнутой для любого $i = 1, 2, 3$. Заметим, $G = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_1$. Тогда, согласно известному результату Кегеля, группа G также будет q-замкнутой. Учитывая, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, получаем $q = p$. Тогда из $G = L \rtimes R$ и леммы 1.1 вытекает, что L – силовская p-подгруппа, а R – p'-подгруппа в G.

Ранее было установлено, что все дополнения к L в G имеют единичное ядро. По теореме Оре они сопряжены в G. Поэтому дальше будем предполагать, что $L \subseteq M_i$ для $i = 1, 2$.

Применяя тождество Дедекинда, получим $M_i = M_i \cap [L]R = [L](M_i \cap R)$ для каждого $i = 1, 2$. Из $L = C_G(L)$ и $L \subseteq M_i$ следует, что $O_{p',p}(M_i)$ является p-группой для любого $i = 1, 2$.

По лемме 1.5 формация $\mathrm{w}\mathfrak{U}$ может быть задана локальной функцией f такой, что $f(q) = (G \in \mathfrak{S} \mid \mathrm{Syl}(G) \subseteq \mathfrak{A}(q-1))$ для каждого простого числа q.

Поэтому из w-сверхразрешимости M_i и леммы 1.2 вытекает, что $M_i \cap R \in f(p)$ для $i = 1, 2$. Из $O_p(M_i \cap R) = 1$ следует $(M_i \cap R)_q \in \mathfrak{A}_{(p-1)}$ для любой силовской q-подгруппы группы $M_i \cap R$ и $i = 1, 2$. Далее заметим, что $M_1 \cap R$, $M_2 \cap R$ являются несопряженными максимальными подгруппами в R. Следовательно, $R = (M_1 \cap R)(M_2 \cap R)$. По условию обобщенный коммутант $G^{\mathcal{A}}$ нильпотентен. Из $L = F(G)$ и минимальности L следует, что $G^{\mathcal{A}} = L$. Отсюда получаем, что все силовские подгруппы R являются абелевыми. Учитывая этот факт и то, что $R = (M_1 \cap R)(M_2 \cap R)$, и любая силовская q-подгруппа R по лемме 11.6 из [2] может факторизована подходящими силовская q-подгруппами из $M_1 \cap R$ и $M_2 \cap R$ для любого $q \in \pi(G)$ получаем, что $R \in f(p)$. Из $G/L \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$ и $G/O_{p',p}(G) \simeq R \in f(p)$ по лемме 1.2 выводим $G \in \mathrm{w}\mathfrak{U}$. Получили заключительное противоречие. □

Доказательство теоремы C. Пусть G – контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Тогда в G имеются четыре попарно несопряженные максимальные подгруппы M_1, M_2, M_3, M_4, принадлежащие $\mathfrak{F}$. Для определенности будем считать, что M_1 и M_2 нормальны, а M_3 и M_4 ненормальны в группе G. При этом сама группа G формации $\mathfrak{F}$ не принадлежит.

Из M_1 и M_2 нормальны в G следует, что $G = M_1M_2$. Хорошо известно, что класс $\mathfrak{N}^2$ является формацией Фиттинга. Из метанильпотентности нормальных подгрупп M_1 и M_2 вытекает метанильпотентность, значит, разрешимость группы G.

Зафиксируем какую-нибудь минимальную нормальную подгруппа L группы G. Пусть $L \subseteq M_i$ для каждого $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда все условия нашей теоремы для G/L реализуются. Поэтому из выбора группы G следует $G/L \in \mathfrak{F}$. Случай $G = LM_i$ для некоторого $i = 1, 2, 3, 4$ разбирается аналогично, как в теоремах A и B. В итоге мы получаем следующие свойства минимального контрпримера G:

а) $L = G^{\mathfrak{F}}$ – единственная минимальная нормальная подгруппа G, L – p-группа для некоторого простого p и $L = C_G(L) = F(G)$.

б) $\Phi(G) = 1$ и $G = L \rtimes M$, причем $M \in \mathfrak{F}$.

Из L – единственная минимальная нормальная подгруппа G, следует, что $L \subseteq M_i$ для $i = 1, 2$. Учитывая, что все максимальные подгруппы G, не содержащие L, сопряжены в G, то можно считать, что $L \subseteq M_3$.

Применяя тождество Дедекинда, имеем
$$M_i = M_i \cap LM = L(M_i \cap M)$$
для каждого $i = 1, 2, 3$. Из $L = C_G(L)$ и $L \subseteq M_i$ получаем, что $O_{p',p}(M_i)$ – p-группа для каждого $i = 1, 2, 3$.

Вспомним, что формация $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$. В этом случае $\mathfrak{F}$ имеет каноническое локальное задание функцией H со значениями $H(q) = \mathfrak{N}_q f(q)$, где $f(p) \subseteq \mathfrak{N}$ для любого простого q. Здесь f – некоторая внутренняя локальная функция, определяющая локально $\mathfrak{F}$.

Поэтому из $M_i = [L](M_i \cap M) \in \mathfrak{F}$ и леммы 1.2 вытекает, что $M_i \cap M \in \mathfrak{N}_p f(p)$ для $i = 1, 2, 3$. Отсюда и из строения формации $H(p)$ следует, что $M_i \cap M$ является p-замкнутой группой для $i = 1, 2, 3$. Далее заметим, что $M_1 \cap M, M_2 \cap M$, $M_3 \cap M$ – попарно несопряженные максимальные подгруппы в M. Следовательно,
$$R = (M_1 \cap R)(M_2 \cap R).$$
Учитывая это и фиттинговость формации всех p-замкнутых групп получаем p-замкнутость M. По (2) леммы 1.1 получаем, что $O_p(M) = 1$.

Следовательно, $O_p(M_i) \cap M = 1$. Это означает, что $M_i \cap M \in f(p)$ для каждого $i = 1, 2, 3$.

Из M_i нормальна в G вытекает $M_i \cap M$ нормальна в M для $i = 1, 2$. Из

$$M = (M_1 \cap R)(M_2 \cap M)$$

и $M_i \cap M \in \mathfrak{N}$ $(i = 1, 2)$ получаем $M \in \mathfrak{N}$. Ввиду того, что M_3 – ненормальная максимальная подгруппа в G и $N \subseteq M_3$, нетрудно видеть, что $M_3 \cap M$ – ненормальная максимальная подгруппа в M. Учитывая нильпотентность M и $M_3 \cap M \neq 1$, приходим к окончательному противоречию с тем, что $M_3 \cap M$ является ненормальной максимальной подгруппой в M. □

3 Заключительные замечания

Приведем примеры показывающие существенность условий в доказанных выше теоремах. В теореме A условие разрешимости нельзя отбросить. Например, в знакопеременной группе A_5 степени 5 имеется три попарно несопряженные ненормальные максимальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант, но коммутант A_5 не является нильпотентным. Отметим, что в теореме A число рассматриваемых попарно несопряженных максимальных подгрупп не может быть уменьшено. Например, в симметрической группе S_4 степени 4 имеется две несопряженные ненормальные максимальные подгруппы, имеющие нильпотентный коммутант (силовская 2-подгруппа и максимальная подгруппа, изоморфная симметрической группе S_3). Но сама группа S_4 имеет ненильпотентный коммутант, изоморфный знакопеременной группе A_4.

В теореме *B* требование нильпотентности обобщенного коммутанта является существенным, на что указывает следующий пример.

***Пример* 3.1.** Пусть P – экстраспециальная группа порядка 3^3. Нетрудно проверить, P имеет по крайней мере три абелевы нормаль-ные максимальные подгруппы P_i порядка 3^2, но сама группа P неабелева. Пусть $F = F_{19}$ – поле из 19 элементов. Согласно [1, теорема B, 10.7], P имеет точный неприводимый FP-модуль L. Пусть $G = [L]P$ – полупрямое произведение P с L. Тогда в $G = [L]P$ имеется по крайней мере три попарно несопряженные максимальные подгруппы $M_i = [L]P_i$. По теореме Машке L – вполне приводимый FP_i-модуль для каждого i, т. е. $L = L_1 \times \ldots \times L_k$, где L_j – неприводимый FP_i-модуль для любого $j = 1, \ldots k$. Из 3^2 делит 19-1 следует, что поле F содержит примитивный корень степени 3^2. Тогда по [1, теорема B, 9.2] неприводимый FP_i-модуль L_j имеет размерность 1. Это означает, что подгруппа $M_i = [L]P_i$ сверхразрешима, а значит, w-сверхразрешима для каждого i. Таким образом, в группе G имеется по крайней мере три попарно несопряженные w-сверхразрешимые максимальные подгруппы. С другой стороны, из $L = F(G)$ и неабелевости P следует, что обобщенный коммутант $G^{\mathcal{A}}$ группы $G = [L]P$ не является нильпотентным, а сама G не w-сверхразрешима.

Пример 3.1 также указывает на существенность требования наличия двух несопряженных ненормальных максимальных подгрупп, принадлежащих формации $\mathfrak{F}$ в теореме C. Рассматривая случай $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$, нетрудно проверить, что в группе $G = [L]P$ из примера 3.1 имеется по крайней мере четыре попарно несопряженные сверхразрешимые максимальные подгруппы, из которых три нормальны, одна ненормальна в G, но сама группа G не является сверхразрешимой.

***Пример* 3.2.** Пусть $H \simeq S_3$ – симметрическая группа степени 3 и V – точный неприводимый FH-модуль над полем $F = F_7$. Существование такого модуля гарантирует [1, B, теорема 10.6]. Возьмем группу $G = [V]H$. Из свойств модуля V вытекает, что $V = F(G)$. Отсюда и неабелевости H следует, что группа G несверхразрешима. Рассмотрим подгруппы $R_1 = VG_2$, $R_2 = VG_3$ и $R_3 = H$, где G_2 и G_3 – силовские 2,3-подгруппы группы G соответственно. Непосредственной проверкой устанавливаем, что R_1, R_2 и R_3 являются попарно несопряженными сверхразрешимыми максимальными подгруппами группы G, причем R_1, R_3 ненормальны, а R_2 нормальна в G. Поэтому требование существования двух нормальных сверхразрешимых максимальных подгрупп в теореме C является существенным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Doerk*, *K*. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New-York: Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

2. *Шеметков*, *Л.А*. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Москва: Наука, 1978. – 272 с.

3. *Белоногов*, *В.А*. Конечные группы с парой несопряженных нильпотентных максимальных подгрупп / В.А. Белоногов // Докл. Акад. наук СССР. – 1965. – Т. 161, № 6. – С. 1255–1256.

4. *Höfling*, *B*. On the number of conjugacy classes of maximal subgroups in a finite soluble group / B. Höfling // Arch. Math. – 1999. – Vol. 72. – P. 1–8.

5. *Васильев*, А.Ф. О некоторых свойствах локальных формаций / А.Ф. Васильев // Вопросы алгебры. – 1985. – Вып. 1. – С. 4–9.

6. *Schmidt*, *R*. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–377.

7. *Zimmermann*, *I*. Submodular Subgroups in Finite Groups / I. Zimmermann // Math. Z. – 1989. – Vol. 202. – P. 545–557.

8. *Васильев*, *В.А*. Конечные группы с субмодулярными силовскими подгруппами / В.А. Васильев // Сибирский математический журнал. – 2015. – Т. 56, № 6. – С. 1277–1288.

9. *Васильев*, *А.Ф*. О конечных группах сверхразрешимого типа / А.Ф. Васильев, Т.И. Васильева, В.Н. Тютянов // Сибирский математический журнал. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

10. *Васильев*, *А.Ф*. О конечных группах с заданной системой сверхразрешимых максимальных подгрупп / А.Ф. Васильев // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2005. – № 5 (32). – С. 154–155.

11. *Huppert*, *B*. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin: Springer, 1967. – 794 s.

12. *Vasil'ev*, *A.F*. On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups / A.F. Vasil'ev // Acta Applicandae Mathematicae. – 2005. – Vol. 85, № 1. – P. 305–311.

Поступила в редакцию 19.10.2021.

Информация об авторах

Фурс Андрей Константинович – аспирант