В. А. Васильев
(ГГУ им. Ф. Скорины, Гомель)

О p-НИЛЬПОТЕНТНОСТИ ОДНОГО КЛАССА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Рассматриваются только конечные группы. Напомним, что подгруппа M группы G называется модулярной подгруппой в G, если выполняются следующие условия:

(1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ для всех $X \le G, Z \le G$ таких, что $X \le Z$;

(2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ для всех $Y \le G, Z \le G$ таких, что $M \le Z$.

Отметим, что модулярная подгруппа является модулярным элементом (в смысле Куроша, [1]) решетки всех подгрупп группы. Понятие модулярной подгруппы впервые анализировалось в работе Р. Шмидта [2] и оказалось полезным в вопросах классификации составных групп. В частности, в монографии Р. Шмидта [1] модулярные подгруппы были использованы для получения новых характеризаций различных классов групп. Подгруппа, порожденная двумя модулярными подгруппами, сама является модулярной подгруппой (см. гл. 5, раздел 5.1 в [1]). Таким образом, каждая подгруппа H группы G обладает наибольшей содержащейся в ней модулярной подгруппой H_{mG} группы G. Мы называем подгруппу H_{mG} модулярным ядром подгруппы H. Базируясь на понятии модулярного ядра, введем следующее обобщение понятия модулярной подгруппы.

Определение 1.1. *Подгруппу H группы G назовем m-добавляемой в G, если в G существует такая подгруппа K, что $G = HK$ и $H \cap K \le H_{mG}$.*

Легко видеть, что всякая модулярная подгруппа является m-добавляемой и, в то же время, существуют группы, в которых класс m-добавляемых подгрупп шире, чем класс всех её модулярных подгрупп.

Нами была доказана следующая теорема.

Теорема 1.2 *Пусть G – группа и P – силовская p-подгруппа группы G, где p – простой делитель $|G|$. Предположим, что по крайней мере одно из следующих утверждений выполняется:*

(i) $(p-1, |G|) = 1$ и каждая максимальная подгруппа из P, не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является m-добавляемой в G.

(ii) $(p-1, |G|) = 1$ и каждая циклическая подгруппа из P простого порядка или порядка 4 (если $p = 2$ и P неабелева), не имеющая p-нильпотентного добавления в G, является m-добавляемой в G.

Тогда G является p-нильпотентной группой.

Литература

1. Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1994. – 572 p.
2. Schmidt, R. Modulare Untergruppen endlicher Gruppen / R. Schmidt // J. Ill. Math. – 1969. – Vol. 13. – P. 358–277.