

А. В. Сыроквашин
(БГУ им. И. Г. Петровского, Брянск)
ПРИМЕР КОНЕЧНОМЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ
С МАКСИМАЛЬНЫМИ ПОДАЛГЕБРАМИ,
НЕ ЯВЛЯЮЩИМИСЯ ИДЕАЛАМИ
И НЕ СОДЕРЖАЩИМИ ЭНГЕЛЕВЫХ ПОДАЛГЕБР

Рассматриваются только конечномерные алгебры Ли над полем P . Необходимый справочный материал можно найти в [1-2]. В алгебре Ли L Фиттингова 0-компонента преобразования adx пространства L , где x – элемент из L , называется подалгеброй Энгеля элемента x в алгебре Ли L . В работе [3] получено, что максимальный идеал, содержащийся в пересечении всех максимальных подалгебр конечномерной алгебры Ли L , каждая из которых не является идеалом в L и содержит подалгебру Энгеля некоторого своего элемента, нильпотентен. В связи с этим результатом особый интерес представляют алгебры Ли L , имеющие максимальные подалгебры, которые не являются идеалами в L и не содержат подалгебр Энгеля своих элементов. Если алгебра Ли L разрешима, то любая максимальная подалгебра L , не являющаяся идеалом в ней, всегда содержит подалгебру Энгеля для некоторого своего элемента [3]. Вопрос о справедливости этого результата в случае произвольных алгебр Ли оставался открытым.

В данной работе мы приводим пример шестимерной алгебры Ли L над полем P характеристики 2, среди максимальных подалгебр которой есть подалгебры, не являющиеся идеалами в ней и не содержащие подалгебр Энгеля своих элементов. Алгебра Ли L как пространство над полем P характеристики 2 задается базисными векторами x, y, z, e, f, g , для которых произведение Ли определим следующим образом:
 $ex = fz = gy = yz = xy = zx = 0, \quad ey = gx = z, \quad ez = fx = y, \quad fy = gz = x, \quad ef = g, \quad fg = e, \quad ge = f.$
Непосредственная проверка показывает, что пространство L над полем P является алгеброй Ли. Подалгебра $M = Pe \oplus Pf \oplus Pg$ является в алгебре Ли L максимальной подалгеброй, не являющейся идеалом и не содержащей подалгебр Энгеля ни для каких своих элементов. Кроме подалгебры M в алгебре Ли L есть и другие максимальные подалгебры, обладающие указанным свойством. Подалгебра $N = Px \oplus Py \oplus Pz$ является идеалом в L и всякая максимальная подалгебра K в L , такая что $K + N = L$, также не содержит подалгебр Энгеля своих элементов.

Литература

1. Бахтурин, Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. / Ю. А. Бахтурин. – Москва: Наука, 1985. 448 с.
2. Джекобсон, Н. Алгебры Ли. / Н. Джекобсон. – Москва: Мир, 1964. 355.
3. On maximal subalgebras of Lie algebras containing Engel subalgebras / D. Towers // J. Pure Appl. Algebra, 2012. P. 688–693.. – Vol. 131. – P. 269–272.