Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

В. В. АНИСЬКОВ, И. В. БЛИЗНЕЦ, Р. В. БОРОДИЧ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Гомель, 2011

Учебное издание

АНИСЬКОВ Валерий Валерьевич
БЛИЗНЕЦ Игорь Васильевич
БОРОДИЧ Руслан Викторович

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для студентов 1 курса специальности 1–31 03 01–02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”

Редактор: В. И. Шкредова
Корректор: В. В. Калугина

Подписано в печать ___.___.2011 г. Формат 60×84 $1/_{16}$. Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. ___,___ Уч.-изд. л. ___,___ Тираж ___ экз. Заказ № ___

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины"
Лицензия № 02330/0549481 от 18 мая 2009.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”

В. В. АНИСЬКОВ, И. В. БЛИЗНЕЦ, Р. В. БОРОДИЧ

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для студентов 1 курса специальности 1–31 03 01–02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”

УО «ГГУ им. Ф. Скорины,» 2011

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.174 я 173
А 674

Рецензент:
кафедра алгебры и геометрии учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины.»
Новиков, С. П., Зав. кафедрой «Высшей математики» учреждения образования «Белорусский государственный университет транспорта», к. ф.-м. н., доцент.

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Аниськов, В. В.
А 674 Дискретная математика: практическое пособие для студентов 1 курса специальности 1 -31 03 01–02 — "Математика (научно-педагогическая деятельность)" / В. В. Аниськов, И. В. Близнец, Р. В. Бородич; Мин-во обр. РБ, Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины. — УО "ГГУ им. Ф.Скорины". — 2011. — 47 с.
ISBN

Практическое пособие предназначено студентам 1 курса математического факультета специальности 1–31 03 01–02 — "Математика (научно-педагогическая деятельность)", изучающим дисциплину "Дискретная математика". Может быть использовано для самостоятельного изучения.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.174 я 173

Литература

1 Кемени, Дж. Введение в конечную математику / Дж. Кемени, Дж. Снелл, Дж. Томпсон — М.: Мир, 1965. — 486 с.

2 Гаврилов, Г.П. Сборник задач по дискретной математике / Г.П. Гаврилов, А.А. Сапоженко — М.: Наука, 1977. — 368 с.

3 Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова — М.: Наука, 1984. — 223 с.

4 Аниськов, В.В. Учебно-методические указания по курсу "Дискретная математика и математическая логика" для студентов первого курса математического факультета / В.В. Аниськов, С.П. Новиков, А.Н. Скиба — Гомель: ГГУ, 1996. — 46 с.

5 Карпов, В.Г. Математическая логика и дискретная математика / В.Г. Карпов, В.А. Мощенский — Мн.: Выш. шк., 1977. — 254 с.

6 Мощенский, В.А. Лекции по математической логике / В.А. Мощенский — Мн.: БГУ, 1973. — 160 с.

7 Мощенский, А.В. Математические основы информатики / А.В. Мощенский, В.А. Мощенский — Мн.: БГУ, 2002. — 150 с.

8 Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский — М.: Наука, 1979. — 272 с.

9 Гиндикин, С.Г. Алгебра логики в задачах / С.Г. Гиндикин — М.: Наука, 1972. — 288 с.

Задача 44. Комитет состоит из пяти человек, среди которых первые два имеют право на 2 голоса каждый. Решение принимается большинством голосов. Построить простейшую контактную схему для голосования.

Задача 45. Нужно, чтобы включение света в комнате производилось тремя различными переключателями так, чтобы при нажатии на любой из переключателей свет выключался, если он перед этим был включен, и включался, если он перед этим был выключен. Построить простейшую контактную схему с таким условием.

Задача 46. Построить простейшую контактную схему из четырех переключателей так, чтобы свет горел только тогда, когда включено ровно два переключателя.

Задача 47. Построить простейшую контактную схему из четырех переключателей таким образом, чтобы свет включался нажатием на один из первых трех переключателей, выключался нажатием на четвертый и схема вновь была готова к работе.

Задача 48. Построить простейшую контактную схему из четырех переключателей таким образом, чтобы свет включался нажатием на один из первых двух переключателей, выключался нажатием на один из оставшихся двух и схема вновь была готова к работе.

Содержание

Введение

Данное пособие является пособием для проведения практических занятий по дисциплине “Дискретная математика” для студентов дневного отделения математического факультета специальности 1-31 03 01-02 — “Математика (научно-педагогическая деятельность)”. Согласно действующей учебной программе на эти занятия отведено 16 часов.

Материал задачника разбит на три раздела — “Элементы комбинаторики”, “Булевы функции”, “Схемы из функциональных элементов”.

В начале каждой темы даются краткие теоретические сведения, которых достаточно для решения всех задач темы.

Весь объем задач по каждой теме разбит на две части — обязательные задачи и дополнительные задачи, которые являются, как правило, задачами повышенной трудности и могут быть полезны наиболее сильным студентам.

Многие задачи обязательной части даны с решениями, что позволяет использовать данное пособие для самоподготовки. К многим задачам даны ответы.

Материал задачника апробирован на практических занятиях по указанной дисциплине. Значительная часть задач (это касается в большей мере булевых функций и контактных схем) составлена авторами самостоятельно.

$$
\begin{aligned}
&(A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \overset{3.2}{=} \\
&= ((A \wedge B) \vee \rceil A) \wedge ((A \wedge B) \vee B) \wedge ((A \wedge B) \vee C) \overset{2.2,3.2}{=} \\
&= ((A \vee \rceil A) \wedge (B \vee \rceil A)) \wedge ((A \vee B) \wedge (B \vee B)) \wedge ((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \overset{5.4,4.2}{=} \\
&= 1 \wedge (B \vee \rceil A) \wedge (A \vee B) \wedge B \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \overset{7.2,2.1,5.3}{=} \\
&= (B \vee \rceil A) \wedge B \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \overset{2.1,7.2}{=} \\
&= B \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \overset{2.1}{=} \\
&= B \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee C) \overset{7.2}{=} \\
&= B \wedge (A \vee C) \overset{3.1}{=} \\
&= (B \wedge A) \vee (B \wedge C).
\end{aligned}
$$

Аналогично рассуждая, для второй половины формулы получим такое же упрощение.

$$(B \wedge A) \vee (A \wedge C).$$

Соединив обе части, получим:

$$
\begin{aligned}
&(B \wedge A) \vee (B \wedge C) \vee (B \wedge A) \vee (A \wedge C) \overset{2.2,4.2}{=} \\
&= (B \wedge A) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge C) \overset{3.1,2.1}{=} \\
&= (B \wedge A) \vee (C \wedge (A \vee B)).
\end{aligned}
$$

Для этой формулы соответствующая схема имеет следующий вид (рисунок 11).

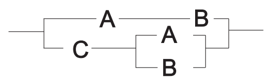

Рисунок 11

Задача 43. Комитет состоит из пяти человек. Решение принимается большинством голосов при условии, что среди проголосовавших оказался председатель. Построить простейшую контактную схему для голосования.

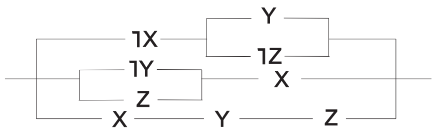

Рисунок 8

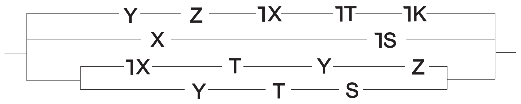

Рисунок 9

Векторное задание функции содержит равное количество единиц и нулей. Следовательно, по количеству символов, нет разницы между СКНФ и СДНФ. Составим, например, СДНФ и упростим ее.

$$(\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \rceil C) \vee (A \wedge B \wedge C) \overset{2.2}{=}$$
$$= (A \wedge B \wedge \rceil C) \vee (A \wedge B \wedge C) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \overset{3.1}{=}$$
$$= (A \wedge B \wedge (C \vee \rceil C)) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \overset{5.4,5.3}{=}$$
$$= (A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \overset{2.1,3.1}{=}$$
$$= (A \wedge B) \vee (((\rceil A \wedge B) \vee (A \wedge \rceil B)) \wedge C).$$

Теперь построим соответствующую схему (рисунок 10).

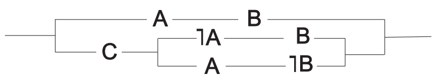

Рисунок 10

Эта схема является решением задачи. Однако можно построить другую схему, которая также является решением задачи, но содержит меньшее число переключателей. Для этого вернемся к предпоследнему шагу упрощения и совершим другие преобразования.

$$(A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \overset{4.2}{=}$$
$$= (A \wedge B) \vee (A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C) \overset{2.2}{=}$$
$$= (A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B) \vee (A \wedge \rceil B \wedge C).$$

Выделим теперь отдельно первую часть формулы и упростим ее.

1 Элементы комбинаторики

1.1 Последовательности и мультимножества

Пусть дано непустое множество M и n — натуральное число. Через M^n обозначается *декартова n-я степень множества M, состоящая из конечных последовательностей вида* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, *где* $a_1 \in M, a_2 \in \in M, \ldots, a_n \in M$. Две последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $(a'_1, a'_2, \ldots \ldots, a'_n)$ считаются *равными* тогда и только тогда, когда $a_1 = a'_1, a_2 = = a'_2, \ldots, a_n = a'_n$.

Последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называют также *строкой, кортежем, n-мерным вектором, набором* или *n-кой.* Число n называется длиной последовательности, элемент a_i называется *i-той компонентой (или i-той координатой).* Последовательность, компоненты которой попарно различны, называется *инъективной (или кортежем без повторений).* Во многих книгах кортеж без повторений называют *размещением.* Это название связано с задачей размещения m объектов по n ящикам.

Каждой последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ соответствует *мультимножество* $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ порядка n, в котором каждый элемент может встречаться несколько раз. Два мультимножества считаются *равными*, если их порядки равны, они состоят из одних и тех же элементов и если каждый элемент всречается одинаковое количество раз в каждом из них. Например, $[1, 2, 2, 3] = [1, 3, 2, 2] = [2, 1, 3, 2]$. Понятно, что каждое конечное множество является и мультимножеством.

Последовательности и мультимножества объединяются общим термином *выборка.* Таким образом, выборка — это либо последовательность, либо мультимножество.

Число размещений из элементов m по n обозначают через A_n^m. Число m-ок, составленных из элементов n-элементного множества, обозначают $\tilde{A}_n^m$.

Подмножества n-элементного множества называют иначе *сочетаниями.* Число всех m-элементных подмножеств n-элементного множества обозначают через C_n^m или $\binom{n}{m}$.

Число всех мультимножеств порядка m, составленных из элементов n-элементного множества, обозначают через H_n^m.

Правило суммы. *Если объект A может быть выбран m способами, а объект B может быть выбран n способами, то выбор "или A, или B"может быть осуществлен $m + n$ способами.*

Правило произведения. *Если объект A может быть выбран m способами и для каждого из таких выборов объект B может быть выбран n способами, то выбор AB в этом порядке может быть осуществлен mn способами.*

При $m \leqslant n$, справедливы следующие равенства:

1) $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$;
2) $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$;
3) $H_n^m = C_{n+m-1}^m$;
4) $\tilde{A}_n^m = n^m$;
5) $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;
6) $C_n^0 = 1$.

Если $m > n$, то считается, что $C_n^m = 0$.

Для любых действительных чисел x, y и натуральных n и k имеет место равенство:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}.$$

Для любых действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ и натурального n имеет место равенство:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1+k_2+\ldots+k_m=n \\ k_i \geqslant 0\ (i=\overline{1,m})}} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m},$$

где суммирование ведется по всем возможным целым неотрицательным разбиениям числа n.

Число всех возможных разбиений n-элементного множества на k непересекающихся подмножеств, имеющих порядки n_1, n_2, $\ldots$, n_k $(0 \leqslant \leqslant n_i \leqslant n)$, выражается формулой

$$C_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Для решения задач этой темы вначале нужно определить, с каким видом выбора мы сталкиваемся. Если это сделано правильно, то решение

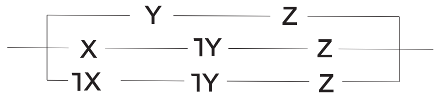

Рисунок 5

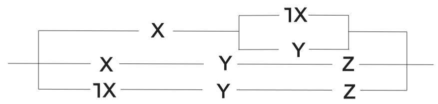

Рисунок 6

Задача 42. В состав комитета входит три человека. Решение принимается большинством голосов. Построить наиболее простую цепь для голосования.

Решение. Составим таблицу истинности для булевой функции, которая зависит от трех переменных (таблица 11).

Таблица 11

A	B	C	f
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Дадим для функции значение 1, если в строке среди значений переменных больше единиц, чем нулей и значение 0 в противном случае.

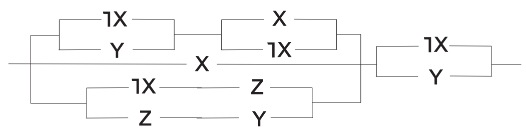

Рисунок 7

горитма решения привести нельзя.

В задачах этой темы в целях простоты обозначений вместо символов $x_1, x_2, \ldots$ будем употреблять большие буквы латинского алфавита.

Задача 40. Для данной схемы построить простейшую (рисунок 3).

Решение. Составим соответствующую данной схеме формулу и упростим ее.

$$X \vee ((X \vee \rceil Y) \wedge (Y \vee \rceil Z)) \vee \rceil Y \vee Z \overset{3.1}{=}$$
$$X \vee ((X \vee \rceil Y) \wedge Y) \vee ((X \vee \rceil Y) \wedge \rceil Z) \vee \rceil Y \vee Z \overset{3.1,2.1}{=}$$
$$X \vee (X \wedge Y) \vee (\rceil Y \wedge Y) \vee (X \wedge \rceil Z) \vee (\rceil Y \wedge \rceil Z) \vee \rceil Y \vee Z \overset{5.1,5.6}{=}$$
$$X \vee (X \wedge Y) \vee (X \wedge \rceil Z) \vee (\rceil Y \wedge \rceil Z) \vee \rceil Y \vee Z \overset{7.1}{=}$$
$$X \vee (X \wedge \rceil Z) \vee (\rceil Y \wedge \rceil Z) \vee \rceil Y \vee Z \overset{7.1,2.1}{=} X \vee \rceil Y \vee Z.$$

Теперь построим по полученной формуле соответствующую схему (рисунок 4).

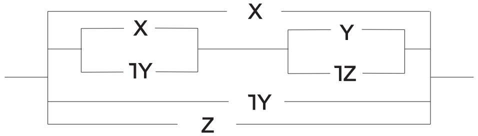

Рисунок 3

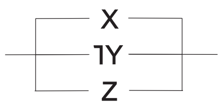

Рисунок 4

Задача 41. Для данной схемы построить простейшую (рисунки 5 — 10).

задачи сводится к применению соответствующей формулы.

Задача 1. Города A и B сооединены 3 различными дорогами. Сколькими способами можно совершить круговой рейс от A к B и обратно? Сколько будет таких способов, если на обратном пути необходимо выбирать новую дорогу?

Решение. Если дорогу выбирать не надо, то это размещение с возвращением: $\widetilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$. Если же нужно выбирать новую дорогу, то получаем размещение без возвращения: $A_3^2 = \dfrac{3!}{1!} = 6$. *Ответ:* 6.

Задача 2. Сколько различных ожерелий можно составить из:

а) 7 бусинок различных размеров?

Решение. Все 7 бусинок различны. Зафиксируем, например, самую маленькую и разорвем на ней ожерелье. Тогда остальные будут составлять размещения без возвращения. Различных таких размещений (т. е. различных вариантов составления ожерелья) будет $A_6^6 = \dfrac{6!}{(6-6)!} = 720$ (Рисунок 1).

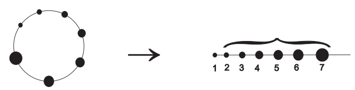

Рисунок 1

Если теперь снова собрать ожерелье, то окажется, что среди полученных вариантов составления будут "симметричные" ввиду того, что ожерелье можно просто повернуть. Эти выборки образуют пары (Рисунок 2).

Значит, разделив пополам, получим 360 различных ожерелий. *От-*

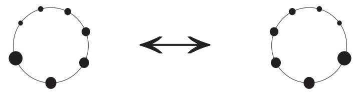
Рисунок 2

вет: 360.

б) из 6 одинаковых бусинок и одной несколько большей? *Ответ:* 1

в) из 5 одинаковых бусинок и еще 2 одинаковых, но несколько больших? *Ответ:* 3.

Задача 3. Сколькими способами можно рассадить за столом n человек? *Ответ:* $(n-1)!$.

Задача 4. Сколькими способами можно расставить 5 человек для выполнения их группового портрета? *Ответ:* 120.

Задача 5. Сколькими способами можно расселить 9 студентов в 3 комнатах, рассчитанных на 3 человека каждая? Сколькими способами можно это сделать, если какие-либо 2 студента не хотят жить вместе? *Ответ:* 1680, 1260.

Задача 6. Некоторая комиссия собиралась ровно 40 раз. Каждый раз на заседаниях присутствовало по 10 человек, причем никакие двое из ее членов не были на заседаниях вместе более одного раза. Доказать, что число членов такой комиссии больше 60.

Задача 7. Пользуясь полиноминальной теоремой, найти:

1) $(x+y+z)^4$;

Решение.

$$(x+y+z)^4 = \sum_{k_1+k_2+k_3=4} \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} = \frac{4!}{4!0!0!}x^4 + \frac{4!}{0!4!0!}y^4 + \frac{4!}{0!0!4!}z^4 +$$
$$+\frac{4!}{3!1!0!}x^3y + \frac{4!}{1!3!0!}xy^3 + \frac{4!}{0!3!1!}y^3z + \frac{4!}{0!1!3!}yz^3 + \frac{4!}{1!0!3!}xz^3 + \frac{4!}{3!0!1!}x^3z +$$
$$+\frac{4!}{2!1!1!}x^2yz + \frac{4!}{1!2!1!}xy^2z + \frac{4!}{1!1!2!}xyz^2 + \frac{4!}{2!2!0!}x^2y^2 + \frac{4!}{2!0!2!}x^2z^2 + \frac{4!}{0!2!2!}y^2z^2 =$$
$$= x^4 + y^4 + z^4 + 4(x^3y + xy^3 + y^3z + yz^3 + xz^3 + x^3z) +$$
$$+12(x^2yz + xy^2z + xyz^2) + 6(x^2y^2 + x^2z^2 + x^2z^2).$$

но отождествить с некоторыми пропозициональными переменными и тогда, согласно принципу суперпозиции, возможно построение более сложных схем.

Между множеством всех контактных схем и множеством всех булевых функций, построенных над базисом $\rceil$, $\vee$, $\wedge$ очевидно взаимнооднозначное соответствие: для каждой контактной схемы можно построить над базисом $\rceil$, $\vee$, $\wedge$ единственную булеву функцию и, с другой стороны, для каждой булевой функции, построенной над базисом $\rceil$, $\vee$, $\wedge$, можно построить единственную контактную схему. Таким образом, для контактных схем можно сформулировать следующие задачи.

Задача синтеза. По известным условиям работы некоторого контактного устройства построить его схему.

Задача анализа. По известной схеме контактного устройства определить условия его работы.

Задача упрощения. Задача упрощения состоит из следующих этапов:

1) решить задачу анализа и построить для данного контактного устройства соответствующую формулу;

2) используя законы для булевых функций, максимально упростить полученную формулу;

3) построить контактную схему, которая соответствует упрощенной формуле и, следовательно, содержит меньшее число контактов.

Среди задач на составление контактных схем следует выделить два наиболее часто встречающихся типа.

Первый тип задач — это так называемые "задачи на голосование". В них требуется составить схему для проведения голосования при соблюдении каких-либо условий. Для решения задач этого типа необходимо составить вначале таблицу истинности. Каждая строка этой таблицы может быть отождествлена с конкретной ситуацией, которая возникает при голосовании. По условию задачи определяется принимается ли в этом случае решение или нет. Если решение принимается, то булева функция имеет в этой строке значение 1. Если же решение не принимается, то значение функции равно 0. Таким образом находится векторное задание функции. Теперь остается составить для нее СДНФ или СКНФ (что короче), упростить и составить по полученной формуле простейшую схему.

Второй тип задач — это задачи на составление электрических схем. Они требуют индивидуального решения и, поэтому, для них общего ал-

1) $\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 x_3 \vee x_1 x_2$;
2) $((x_1 \vee x_2) \wedge x_1) \oplus (x_1 \vee (x_1 x_2))$;
3) $((x_1 \vee x_2) \wedge x_1) \oplus ((x_1 \vee x_2) \wedge \bar{x}_2)$;
4) $(x_3 \Rightarrow x_1) \vee ((x_2 x_3) \Rightarrow x_1)$;

Решение:

$(x_3 \Rightarrow x_1) \vee ((x_2 x_3) \Rightarrow x_1) \overset{6.2}{=}$
$= (\bar{x}_3 \vee x_1) \vee (\overline{x_2 x_3} \vee x_1) \overset{4.4}{=}$
$= (\bar{x}_3 \vee x_1) \vee (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1) \overset{1.2}{=}$
$= \bar{x}_3 \vee x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1 \overset{2.2,\ 4.2}{=}$
$= x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3$.
Ответ:

5) $(x_2 \oplus x_3) \vee (x_1 \wedge x_2) \Rightarrow (x_2 x_3)$;
6) $((x_1 \vee x_2) \Rightarrow (x_2 \vee x_3)) \vee (x_1 x_4)$.

3 Схемы из функциональных элементов

3.1 Контактные схемы

Контактной схемой называется схема, состоящая из следующих элементов:

1) замыкающие контакты (которым соответствуют некоторые пропозициональные переменные);

2) размыкающие контакты (которым соответствуют отрицания некоторых пропозициональных переменных);

3) последовательное соединение контактов (которым соответствует конъюнкция некоторых пропозициональных переменных или их отрицаний);

4) параллельное соединение контактов (которым соответствует дизъюнкция некоторых пропозициональных переменных или их отрицаний).

Поскольку каждый из определенных выше элементов контактной схемы можно рассматривать как некоторую булеву функцию, то их мож-

Проверка: $(1+1+1)^4 = 3 + 4 \cdot 6 + 12 \cdot 3 + 6 \cdot 3 = 81$.

Ответ:

$$x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 4y^3z + 4yz^3 + 4xz^3 + 4x^3z +$$
$$+12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2 + 6x^2y^2 + 6x^2z^2 + 6y^2z^2.$$

2) $(2x + y - z)^3$;

Задача 8. Чему равен коэффициент при $x^2y^3z^2$ в выражении
$$(x + y + z)^7?$$

Решение. Этот коэффициент будет равен
$$\frac{7!}{2!3!2!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210.$$
Ответ: 210.

Задача 9. Чему равен коэффициент при $x^6y^3z^2$ в выражении
$$(x - 2y + 5z)^{11}?$$
Ответ: -924000.

Задача 10. Сколько слагаемых имеется в каждом из выражений:

1) $(x + y + z)^6$;

Решение. Рассмотрим различные разбиения числа 6 на три целых слагаемых, разделив такие разбиения по числу повторяющихся слагаемых.

1). Все слагаемые различны. Например, $6 = 5 + 1 + 0$. Получим различные упорядоченные тройки из трех элементов без возвращения или размещения без возвращения из 3 элементов по 3 элементам.Число всевозможных таких троек равно
$$A_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 6.$$

Такое же число вариантов дадут и следующие разбиения: $6 = 4 + 2 + 0$ и $6 = 3 + 2 + 1$. Значит, в случае различных слагаемых, получим всего 18 вариантов.

2). Среди слагаемых встречается два повторения. Например, $6 = 6 + 0 + 0$. Нетрудно догадаться, что возможны еще два варианта: $6 = 0 + 6 + 0$ и $6 = 0 + 0 + 6$. Также по три варианта дадут разбиения $6 = 4 + 1 + 1$ и $6 = 3 + 3 + 0$. Значит, в этом случае получаем всего 9 вариантов.

3). Три повторения, т. е. когда все слагаемые равны, может быть только в одном варианте: $6 = 2 + 2 + 2$.

Теперь осталось сложить число всевозможных вариантов для всех случаев вместе:

$$18 + 9 + 1 = 28.$$

Ответ: 28.

2) $(a + 2b + 5c + d)^4$; *Ответ:* 35.
3) $(r + s + t + u + v)^6$. *Ответ:* 210.

Задача 11. Доказать следующие равенства:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

Решение.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = C_n^{n-m};$$

2) $\sum\limits_{i=o}^{n} C_n^i = 2^n$;

3) $\sum\limits_{i=o}^{n} (-1)^i C_n^i = 0$;

4) $C_n^k \cdot C_k^r = C_{n-r}^{k-r} \cdot C_n^r$;

5) $C_{2n}^n = \sum\limits_{i=o}^{n} (C_n^i)^2$.

Задача 38. Для следующих булевых функций построить СКНФ, используя таблицы истинности.

1) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow ((x_2 x_3) \Rightarrow (x_1 x_2))$;
2) $((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow \bar{x}_1) \oplus (x_1 \Rightarrow (x_1 x_2))$;
3) $\rceil((x_1 x_2) \Rightarrow \bar{x}_1) \oplus ((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow \bar{x}_2)$;

Решение: Вначале построим таблицу истинности для этой формулы (таблица 10).

Таблица 10

$\rceil$	(	(	x_1	$\wedge$	x_2	)	$\Rightarrow$	$\bar{x}_1$	)	$\oplus$	(	(	x_1	$\oplus$	x_2	)	$\Rightarrow$	$\bar{x}_2$	)
0			0	0	0		1	1		**1**			0	0	0		1	1	
0			0	0	1		1	1		**0**			0	1	1		0	0	
0			1	0	0		1	0		**1**			1	1	0		1	1	
1			1	1	1		0	0		**0**			1	0	1		1	0	

Теперь составляем СКНФ:

$$(x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2).$$

Каждая элементарная дизъюнкция этой СКНФ составлена по соответствующей строке таблицы истинности, в которой функция имеет значение 0. Если в этой строке значение переменной равно 0, то в составляемой дизъюнкции нужно поставить символ самой переменной, а если значение переменной равно 1, то вставить нужно отрицание переменной. Число различных элементарных дизъюнкций равно числу строк таблицы истинности, в которых функция имеет значение 0. Число членов в каждой элементарной дизъюнкции одинаково и равно числу всех переменных, входящих в формулу, т. е. 2.

Ответ: $(x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)$.

4) $(x_3 \Rightarrow x_1) \Rightarrow ((\overline{x_2 \vee x_3}) \Rightarrow x_1)$;
5) $((x_2 \oplus x_3) \Rightarrow (x_1 \vee x_2)) \Rightarrow (x_2 x_3)$;
6) $((x_1 \vee x_2) \Rightarrow (x_2 \vee x_3)) \oplus (x_1 x_4)$.

Задача 39. Для следующих булевых функций построить СКНФ, используя равносильные преобразования:

всех переменных, входящих в формулу, т. е. 3.

Ответ: $(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3)\vee(\bar{x}_1\bar{x}_2x_3)\vee(x_1\bar{x}_2\bar{x}_3)\vee(x_1\bar{x}_2x_3)\vee(x_1x_2\bar{x}_3)\vee x_1x_2x_3)$.

2) $((x_1\Rightarrow x_2)\Rightarrow\bar{x}_1)\oplus(x_1\Rightarrow(x_1x_2))$;
3) $\rceil((x_1x_2)\Rightarrow\bar{x}_1)\oplus((x_1\oplus x_2)\Rightarrow\bar{x}_2)$;
4) $(x_3\Rightarrow x_1)\Rightarrow((\overline{x_2\vee x_3})\Rightarrow x_1)$;
5) $((x_2\oplus x_3)\Rightarrow(x_1\vee x_2))\Rightarrow(x_2x_3)$;
6) $((x_1\vee x_2)\Rightarrow(x_2\vee x_3))\oplus(x_1x_4)$.

Задача 37. Для следующих булевых функций построить СДНФ, используя равносильные преобразования:

1) $(\bar{x}_1\Rightarrow\bar{x}_2)\vee\rceil((x_2x_3)\Rightarrow(x_1x_2))$;
2) $((x_1\vee x_2)\bar{x}_1)\oplus(x_1\Rightarrow(x_1x_2))$;

Решение:

$$
\begin{aligned}
&((x_1\vee x_2)\wedge\bar{x}_1)\oplus(x_1\Rightarrow(x_1\wedge x_2)) \overset{2.1,\ 3.1,\ 6.2}{=}\\
&=(x_1\bar{x}_1\vee x_2\bar{x}_1)\oplus(\bar{x}_1\vee(x_1x_2)) \overset{3.2,\ 5.3,\ 5.4}{=}\\
&=(x_2\bar{x}_1)\oplus((\bar{x}_1\vee x_1)(\bar{x}_1\vee x_2)) \overset{5.3,\ 5.4}{=}\\
&=(x_2\bar{x}_1)\oplus(\bar{x}_1\vee x_2) \overset{6.1}{=}\\
&=((x_2\bar{x}_1)(\rceil(\bar{x}_1\vee x_2))\vee(\rceil(x_2\bar{x}_1)(\bar{x}_1\vee x_2)) \overset{4.1,\ 4.3,\ 4.4}{=}\\
&=(x_2\bar{x}_1)(x_1\bar{x}_2)\vee(\bar{x}_2\vee x_1)(\bar{x}_1\vee x_2) \overset{1.1}{=}\\
&=(\bar{x}_2\vee x_1)(\bar{x}_1\vee x_2) \overset{1.1,\ 3.1}{=}\\
&=\bar{x}_2(\bar{x}_\vee x_2)\vee x_1(\bar{x}_1\vee x_2) \overset{3.1,\ 1.2}{=}\\
&=\bar{x}_2\bar{x}_1\vee\bar{x}_2x_2\vee x_1\bar{x}_1\vee x_1x_2 \overset{5.1,\ 5.6}{=}\\
&=\bar{x}_2\bar{x}_1\vee x_1x_2.
\end{aligned}
$$

Ответ: $\bar{x}_2\bar{x}_1\vee x_1x_2$.

3) $((x_1x_2)\Rightarrow\bar{x}_1)\oplus((x_1\oplus x_2)\Rightarrow\bar{x}_2)$;
4) $(x_3\Rightarrow x_1)\oplus((\overline{x_2\vee x_3})\Rightarrow x_1)$;
5) $((x_2x_3)\vee(x_1\vee x_2))\Rightarrow(x_2x_3)$;
6) $((x_1\vee x_2)(x_2\vee x_3))\oplus(x_1x_4)$.

1.2 Принцип включения и исключения

Пусть имеется множество X из N элементов. Пусть каждый из элементов может обладать некоторыми из свойств $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Через $N(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ $(1\leqslant k\leqslant n)$ обозначим количество элементов из X, которые обладают свойствами $a_1,a_2,\ldots,a_k$ и, может быть, некоторыми другими. Число элементов, не обладающих ни одним из свойств $a_1,a_2,\ldots$ $\ldots,a_k$, обозначим через $N(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n)$. Тогда справедлива следующая формула включений и исключений:

$$
\begin{gathered}
N(\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n)=N-N(a_1)-N(\overline{a}_2)-\ldots-N(a_n)+N(a_1,a_2)+\\
+N(a_1,a_3)+\ldots+N(a_{n-1},a_n)-N(a_1,a_2,a_3)-\\
-N(a_1,a_2,a_4)-\ldots-N(a_{n-2},a_{n-1},a_n)+\ldots\\
+(-1)^nN(a_1,\ldots,a_k).
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

При решении задач этой темы можно использовать не только формулу включений и исключений, но и сведения из темы “Перестановки и сочетания”.

Задача 12. При обследовании читательских интересов, выяснилось, что 60 процентов студентов читает журнал A, 50 процентов студентов читает журнал C, 50 процентов читает журнал B, 30 процентов читают журналы A и B, 20 — журналы B и C, 40 — журналы A и C, 10 — журналы A, B, C. Сколько процентов студентов:

1) не читает ни один журнал?
2) читает в точности 2 журнала?
3) читает не менее 2 журналов?

Решение. Введем следующие обозначения:

$N=100\%$ — процент всех студентов;
$N(A)=60\%$ — процент всех студентов, которые читают журнал A;
$N(B)=50\%$ — процент всех студентов, которые читают журнал B;
$N(C)=50\%$ — процент всех студентов, которые читают журнал C;
$N(A,B)=30\%$ — процент всех студентов, которые читают журналы A и B;

$N(B,C) = 20\%$ — процент всех студентов, которые читают журналы B и C;

$N(A,C) = 40\%$ — процент всех студентов, которые читают журналы A и C;

$N(A,B,C) = 10\%$ — процент всех студентов, которые читают журналы A, B и C;

$N(\overline{A},\overline{B},\overline{C})$ — процент всех студентов, которые не читают ни один журнал.

Тогда: а) процент студентов, которые не читают ни один журнал:

$$N(\overline{A},\overline{B},\overline{C}) = N - N(A) - N(B) - N(C) +$$
$$+ N(A,B) + N(B,C) + N(A,C) - N(A,B,C) =$$
$$100\% - 60\% - 50\% - 50\% + 30\% + 20\% + 40\% - 10\% = 20\%.$$

б) найдем процент студентов, которые читают в точности журналы A и B:

$$N(A,B) - N(A,B,C) = 30\% - 10\% = 20\%,$$

процент студентов, которые читают в точности журналы B и C:

$$N(B,C) - N(A,B,C) = 20\% - 10\% = 10\%,$$

процент студентов, которые читают в точности журналы A и C:

$$N(A,C) - N(A,B,C) = 40\% - 10\% = 30\%.$$

Тогда процент студентов, которые читают в точности два журнала:

$$20\% + 10\% + 30\% = 60\%.$$

в) процент студентов, которые читают не менее двух журналов:

$$60\% + 10\% = 70\%.$$

Ответы: $20\%, 60\%, 70\%$.

Задача 13. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский, 6 — немецкий, 7 — французский, 4 — английский и немецкий, 3 — немецкий и французский, 2 — французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знает только английский? Сколько — только французский? *Ответы:* 11; 1; 3.

Задача 14. На одной из кафедр университета работают 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 10 человек

Второй способ — это использование равносильных преобразований. Вначале исходную формулу упрощают и получают формулу над $\{\vee, \wedge, \rceil\}$. Затем, пользуясь дистрибутивными законами, получают дизъюнктивную, либо конъюнктивную нормальную форму (смотря что требуется в условии задачи) и наконец, используя свойства констант, дополняют полученную нормальную форму до совершенной.

Задача 36. Для следующих булевых функций построить СДНФ используя таблицы истинности:

1) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \wedge ((x_2 x_3) \Rightarrow (x_1 x_2))$;

Решение: Вначале построим таблицу истинности для этой формулы (таблица 9).

Таблица 9

(	$\bar{x}_1$	$\Rightarrow$	$\bar{x}_2$	)	$\wedge$	(	(	x_2	$\wedge$	x_3	)	$\Rightarrow$	(	x_1	$\wedge$	x_2	)	)
	1	1	1		**1**			0	0	0		1		0	0	0		
	1	1	1		**1**			0	0	1		1		0	0	0		
	1	0	0		**0**			1	0	0		1		0	0	1		
	1	0	0		**0**			1	1	1		0		0	0	1		
	0	1	1		**1**			0	0	0		1		1	0	0		
	0	1	1		**1**			0	0	1		1		1	0	0		
	0	1	0		**1**			1	0	0		1		1	1	1		
	0	1	0		**1**			1	1	1		1		1	1	1		

Теперь составляем СДНФ:

$$(\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3) \vee (x_1\bar{x}_2\bar{x}_3) \vee (x_1\bar{x}_2 x_3) \vee (x_1 x_2\bar{x}_3) \vee x_1 x_2 x_3)$$

.

Каждая элементарная конъюнкция этой СДНФ составлена по соответствующей строке таблицы истинности, в которой функция имеет значение 1. Если в этой строке значение переменной равно 1, то в составляемой конъюнкции нужно поставить символ самой переменной, а если значение переменной равно 0, то вставить нужно отрицание переменной. Число различных элементарных конъюнкций равно числу строк таблицы истинности, в которых функция имеет значение 1. Число множителей в каждой элементарной конъюнкции одинаково и равно числу

Конъюнктивной нормальной формой (*КНФ*) называется всякая элементарная дизъюнкция, либо конъюнкция некоторого числа элементарных дизъюнкций.

Дизъюнктивной нормальной формой (*ДНФ*) называется всякая элементарная конъюнкция, либо дизъюнкция некоторого числа элементарных конъюнкций.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (*СКНФ*) называется всякая КНФ, в каждую элементарную дизъюнкцию которой всякая переменная либо ее отрицание входит ровно 1 раз, если эта переменная либо ее отрицание, входит в какую-либо другую элементарную дизъюнкцию этой СКНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (*СДНФ*) называется всякая ДНФ, в каждую элементарную конъюнкцию которой всякая переменная либо ее отрицание входит ровно 1 раз, если эта переменная либо ее отрицание, входит в какую-либо другую элементарную конъюнкцию этой СКНФ.

Для произвольной элементарной конъюнкции всякий ее элемент (т.е. некоторая переменная, либо отрицание некоторой переменной) называется ее *множителем.*

Всякая булева функция, отличная от константы, имеет единственные СДНФ и СКНФ, но может иметь несколько ДНФ и КНФ.

Строятся СКНФ и СДНФ двумя способами. Первый способ — использование таблиц истинности. Для СДНФ выбираются те строки, в которых функция имеет значение 1, и для каждой из таких строк составляются соответствующие элементарные конъюнкции следующим образом: если в рассматриваемой строке некоторая переменная имеет значение 1. то в конъюнкцию вставляют саму переменную, если же эта переменная имеет значение 0, то в конъюнкцию вставляют отрицание этой переменной. Наконец, составленные для каждой из выбранных строк, элементарные конъюнкции соединяются между собой операцией дизъюнкции.

Для СКНФ выбираются те строки, в которых функция имеет значение 0, и для каждой из таких строк составляются соответствующие элементарные дизъюнкции следующим образом: если в рассматриваемой строке некоторая переменная имеет значение 0, то в конъюнкцию вставляют саму переменную, если же эта переменная имеет значение 1, то в конъюнкцию вставляют отрицание этой переменной. Наконец, составленные для каждой из выбранных строк элементарные дизъюнкции соединяются между собой операцией конъюнкции.

знают английский, 7 — немецкий, 6 — французский, 5 — английский и немецкий, 4 — английский и французский, 3 — немецкий и французский. Сколько человек знают все три языка? Сколько — ровно два языка? Сколько — только английский? *Ответы:* 2; 6; 3.

Задача 15. Староста одного класса дал следующие сведения об учениках:

В классе учатся 45 учеников, в том числе 25 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, из них 18 мальчиков и 17 хорошо успевающих школьников. Хорошо учатся и в то же время занимаются спортом 15 мальчиков класса. Всего успевающих мальчиков в классе 16, а всех успевающих учеников класса — 30.

Показать, что сведения, данные старостой, противоречивы.

Решение. Введем следующие обозначения:

a_1 — принадлежность к мужскому полу;
a_2 — успеваемость;
a_3 — занятие спортом.

Тогда:

$N(a_1)$ — число мальчиков;
$N(a_2)$ — число хорошо успевающих учеников класса;
$N(a_3)$ — число учеников, занимающихся спортом;
$N(a_1, a_3)$ — число мальчиков, которые занимаются спортом;
$N(a_1, a_2)$ — число мальчиков, которые хорошо успевают;
$N(a_2, a_3)$ — число хорошо успевающих школьников, которые занимаются спортом;
$N(a_1, a_2, a_3)$ — число мальчиков, которые хорошо успевают и в то же время занимаются спортом;
$N(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ — число девочек, которые плохо учатся и не занимаются спортом.

Теперь обозначим через N число учеников в классе. Все готово для применения формулы принципа включения и исключения:

$$N(\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}) = N - N(a_1) - N(a_2) - N(a_3) +$$
$$+ N(a_1, a_2) + N(a_1, a_3) + N(a_2, a_3) - N(a_1, a_2, a_3) =$$

$$= 45 - 25 - 30 - 28 + 16 + 17 + 18 - 15 = -2.$$

Однако, понятно, что количество неуспевающих девочек, которые не занимаются спортом, не может быть отрицательным числом. Поэтому сведения, поданные старостой, противоречивы.

Задача 16. Найти число перестановок $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из n элементов, в которых ни один элемент не остается на месте. *Ответ:* $(n-k)!$.

Задача 17. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5, 7. *Ответ:* 457.

Задача 18. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15. *Ответ:* 734.

Задача 19. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетным числом? *Ответ:* 100.

Задача 20. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если каждая из них может повториться несколько раз? *Ответ:* 2 058.

Задача 21. Сколькими способами можно переставить цифры числа 1 234 114 546 так, чтобы три одинаковые цифры не стояли друг за другом? *Ответ:* 88 080.

1.3 Рекуррентные соотношения

Рекуррентным соотношением (*рекуррентной формулой*) называется формула вида $a_n = f(n, a_{n-1} \ldots a_{n-k})$ выражающая при $n > k$ каждый член a_n некоторой последовательности $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ через предыдущие k членов a_{n-1}, a_{n-2},…, a_{n-k}. Число k называется *порядком* рекуррентного соотношения.

Последовательность (a_n) называют *решением рекуррентного соотношения*, если при ее подстановке в это рекуррентное соотношение оно

2.2 Разложения булевых функций

Пусть $a \in B = \{0; 1\}$. Для некоторой переменной x и ее некоторого значения a определим величину x^a:

$$x^a = \begin{cases} x, & \text{если } a = 1, \\ \overline{x}, & \text{если } a = 0. \end{cases}$$

Равенство

$$f(\tilde{x}^n) = x_n f(\tilde{x}^{n-1}, 1) \vee \overline{x}_n f(\tilde{x}^{n-1}, 0)$$

называют *разложением булевой функции по переменной.*

Если булева функция $f(\tilde{x}^n)$ не является противоречием, то выражение

$$f(\tilde{x}^n) = \bigvee_{\substack{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1}} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$$

называют ее *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (*СДНФ*).

Если булева функция $f(\tilde{x}^n)$ не является тавтологией, то выражение

$$f(\tilde{x}^n) = \bigwedge_{\substack{a_1, a_2, \ldots, a_k \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0}} (x_1^{\overline{a}_1} \vee x_2^{\overline{a}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{a}_n})$$

называется ее *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (*СКНФ*)

СДНФ и СКНФ можно определить индуктивно.

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция некоторого числа переменных и отрицаний переменных из множества $U = \{u_1, u_2, \ldots \ldots, u_m, \ldots\}$, причем для любой переменной указанного множества в этой конъюнкции может присутствовать либо сама переменная, либо ее отрицание. Любая переменная или ее отрицание также является элементарной конъюнкцией.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция некоторого числа переменных и отрицаний переменных из множества $U = \{u_1, u_2, \ldots \ldots, u_m, \ldots\}$, причем для любой переменной указанного множества в этой дизъюнкции может присутствовать либо сама переменная, либо ее отрицание. Любая переменная или ее отрицание так же является элементарной дизъюнкцией.

12) $((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow (x_2 \oplus x_3)) \Rightarrow (x_1 \oplus x_2)$.

Задача 35. Указать существенные переменные для следующих булевых функций, заданных векторно.

1) $f(\tilde{x}^3) = (11110000)$;

Решение: Составим таблицу истинности для данной булевой функции (таблица 8).

Таблица 8

x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	**1**
0	0	1	**1**
0	1	0	**1**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**0**
1	1	0	**0**
1	1	1	**0**

Анализ таблицы позволяет сделать вывод о том, что переменные x_2 и x_3 являются фиктивными. Следовательно, существенной переменной является только одна переменная x_1.

Ответ: $\{x_1\}$.

2) $f(\tilde{x}^3) = (00110011)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (00111100)$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (01010101)$;
5) $f(\tilde{x}^4) = (1011100111001010)$;

Решение: Поскольку необходимый признак наличия фиктивных переменных — четное количество единиц или нулей — не выполняется, то в данной функции нет фиктивных переменных. Следовательно, все переменные существенны.

Ответ: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

6) $f(\tilde{x}^4) = (0011110011000011)$;
7) $f(\tilde{x}^4) = (0111011101110111)$;
8) $f(\tilde{x}^4) = (0101111100001010)$.

тождественно выполняется.

Решение рекуррентного соотношения называется *частным*, если оно не зависит от произвольной постоянной и каждый его член определяется однозначно, завися лишь от номера.

Решение рекуррентного соотношения k-того порядка называется *общим*, если оно зависит от k произвольных постоянных C_1, $C_2, \ldots$, C_k. Путем подбора этих постоянных можно получить любое частное решение данного рекуррентного соотношения, удовлетворяющее k начальным условиям.

Общее решение рекуррентного соотношения — это общая формула, "собирающая" все частные решения.

Рекуррентное соотношение вида:

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + a_k f(n) + \vartheta(n), \quad (1.2)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$, $\vartheta(n) \not\equiv 0$ называется *линейным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами*.

Рекуррентное соотношение вида:

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + a_k f(n), \quad (1.3)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ называется *линейным однородным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами*.

Уравнение

$$x^k - a_1 x^{k-1} \ldots - a_k = 0 \quad (1.4)$$

называется *характеристическим уравнением* рекуррентного соотношения (1.3).

Общее решение линейного однородного рекуррентного соотношения (1.3) имеет вид

$$\alpha(n) = \sum_{i=1}^{s} (C_{i_1} + C_{i_2} n + \ldots + C_{i_r} n^{r-1}) \lambda_i^n,$$

где C_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant s;\ 1 \leqslant j \leqslant r)$ — комплексные числа, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — различные корни характеристического уравнения соответственно кратности $r_1, r_2, \ldots, r_s$.

Общее решение рекуррентного соотношения (1.2) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного соотношения (1.3) и некоторого частного решения соотношения (1.2).

Для каждого из видов функции $\vartheta(n)$ рекуррентного соотношения (1.2), частное решение имеет определенный вид.

В случае, когда $\vartheta(n) = R_m(n)\lambda^n$, где R_m — многочлен степени m, соответствующий n-му члену последовательности и $\lambda \neq 0$, частное решение соотношения (1.2) имеет вид $Q_m(n)\lambda^n$, где Q_m — многочлен степени m, соответствующий n-му члену последовательности, если λ не является корнем характеристического уравнения и вид $n^r Q_m(n)\lambda^n$, если λ — корень характеристического уравнения кратности r ($r \geqslant 1$).

Задача 22. Показать, что рекуррентное соотношение

$$f(n) = \frac{\dfrac{x}{f(n-1)} + f(n-1)}{2}$$

при начальном условии $f(0) = 2$ можно использовать для вычисления квадратного корня из числа x.

Задача 23. Найти общее решение рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n).$$

Решение. Составим характеристическое уравнение, соответствующее данному рекуррентному соотношению:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Корнями данного характеристического уравнения являются числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$. Кратность каждого из корней — единица. Следовательно, решение данного рекуррентного соотношения запишется в виде:

$$\alpha(n) = \sum_{i=1}^{s} C_{i1}\lambda_i^n = C_{11}\cdot 1^n + C_{21}\cdot 2^n = C_1 + C_2 \cdot 2^n.$$

Проверка:

$$C_1 + C_2 \cdot 2^{n+2} = 3(C_1 + C_2 \cdot 2^{n+1}) - 2(C_1 + C_2 \cdot 2^n);$$

$$C_1 + 4C_2 \cdot 2^n = 3C_1 + 6C_2 \cdot 2^n - 2C_1 - 2C_2 \cdot 2^n;$$

$$C_1 + 4C_2 \cdot 2^n = C_1 + 4C_2 \cdot 2^n.$$

Ответ: $C_1 + C_2 \cdot 2^n$.

Задача 24. Найти частное решение рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = 4f(n+1) - 4f(n),$$

5) $((x_1 \oplus x_2) \oplus x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_2)$;
6) $(x_1 \Rightarrow x_2) \oplus (x_2 \Rightarrow x_3) \oplus (x_3 \Rightarrow x_1)$;
7) $(x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_3)) \oplus (x_3 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_1))$;
8) $(x_1 \Rightarrow (x_2 \oplus x_3))(\bar{x}_1 \Rightarrow (x_3 \oplus x_2))$.

Задача 34. Построить векторные задания для следующих функций:

1) $(x_1 \Rightarrow x_2x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_2x_1)$;

Решение: Для того, чтобы построить векторное задание булевой функции, необходимо построить таблицу истинности для формулы, которая реализует эту функцию (таблица 7).

Таблица 7

(	x_1	$\Rightarrow$	(	x_2	$\wedge$	x_3	)	)	$\vee$	(	x_1	$\Rightarrow$	(	x_2	$\wedge$	x_1	)	)
	0	1		0	0	0			**1**		0	1		0	0	0		
	0	1		0	0	1			**1**		0	1		0	0	0		
	0	1		1	0	0			**1**		0	1		1	0	0		
	0	1		1	1	1			**1**		0	1		1	0	0		
	1	0		0	0	0			**0**		1	0		0	0	1		
	1	0		0	0	1			**0**		1	0		0	0	1		
	1	0		1	0	0			**1**		1	1		1	1	1		
	1	1		1	1	1			**1**		1	1		1	1	1		

Из таблицы истинности получаем:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (11110011).$$

Ответ: (11110011).

2) $(x_1 \Rightarrow x_2x_3)\overline{(x_2 \vee x_3 \Rightarrow x_1)}$;
3) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \overline{x_1x_2})x_1$;
4) $(\overline{x_1x_2 \Rightarrow \bar{x}_1})(\overline{x_1x_2 \Rightarrow \bar{x}_2})$;
5) $(x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow ((x_3 \Rightarrow x_1) \Rightarrow (x_3 \Rightarrow x_2))$;
6) $(\overline{x_1 \Rightarrow \overline{x_2x_3}}) \Rightarrow x_1 \vee x_3$;
7) $(x_1 \Rightarrow x_2x_3)(x_1 \vee x_2)$;
8) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_1)$;
9) $(x_1 \Rightarrow x_2)((x_2 \Rightarrow x_3)(x_3 \Rightarrow x_1))$;
10) $(\overline{x_1 \Rightarrow x_2}) \vee (\overline{x_2 \Rightarrow x_1})$;
11) $((x_1 \oplus x_2)(x_2 \oplus x_3) \Rightarrow x_1) \oplus (x_1 \vee x_2)$;

Построим вначале таблицу истинности для данной формулы (таблица 6).

Таблица 6

$((\bar{x}_2$	$\Rightarrow$	$x_1)$	$\wedge$	$x_3)$	$\vee$	$(x_4$	$\wedge$	$(\rceil$	$(x_2$	$\wedge$	$x_3)$	$\Rightarrow$	x_1	$\wedge$	$x_3))$
1	0	0	0	0	**0**	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	**0**	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	**0**	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	**0**	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	**0**	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	**0**	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	**1**	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	**1**	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	**0**	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	**0**	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	**1**	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	**0**	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	**0**	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	**1**	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	**1**	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

Необходимый признак наличия фиктивной переменной — четное количество единиц или нулей — выполняется. Теперь нужно внимательно просмотреть все строки таблицы истинности. Анализ данной таблицы приводит к наблюдению о том, что:

$$
\begin{aligned}
&f(0,0,0,0) = f(0,0,0,1); f(0,0,1,0) = f(0,0,1,1);\\
&f(0,1,0,0) = f(0,1,0,1); f(0,1,1,0) = f(0,1,1,1);\\
&f(1,0,0,0) = f(1,0,0,1); f(1,0,1,0) = f(1,0,1,1);\\
&f(1,1,0,0) = f(1,1,0,1); f(1,1,1,0) = f(1,1,1,1).
\end{aligned}
$$

По определению, переменная x_4 является фиктивной. После ее удаления, получаем вместо исходной формулы, формулу $((\bar{x}_2 \Rightarrow x_1)x_3) \vee$ $\vee\ (\overline{x_2 x_3} \Rightarrow x_1 x_3)$.

Ответ: $((\bar{x}_2 \Rightarrow x_1)x_3) \vee (\overline{x_2 x_3} \Rightarrow x_1 x_3)$.

4) $((x_1 \vee x_2) \Rightarrow (\bar{x}_1 x_2)) \vee (x_1 \bar{x}_2 x_3)$;

удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 1;\ f(1) = 4$.

Решение. Данному рекуррентному соотношению соответствует характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Это характеристическое уравнение имеет один корень $\lambda_1 = 2$ кратности 2. Следовательно, решение данного рекуррентного соотношения запишется в виде:

$$\alpha(n) = (C_1 + C_2 n) \cdot 2^n.$$

Учитывая начальные значения, получаем систему:

$$\begin{cases} (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot 2^0 = 1; \\ (C_1 + C_2 \cdot 1) \cdot 2^1 = 4 \end{cases}$$

из которой легко получается

$$\begin{cases} C_1 = 1; \\ C_1 + C_2 = 2. \end{cases}$$

Поэтому $C_1 = C_2 = 1$. Следовательно, искомое решение — $(1 + n) \cdot 2^n$.

Проверка:

$$(1 + n + 2) \cdot 2^{n+2} = 4(1 + n + 1) \cdot 2^{n+1} - 4(1 + n) \cdot 2^n;$$

$$4(n + 3) \cdot 2^n = 8(n + 2) \cdot 2^n - 4(1 + n) \cdot 2^n;$$

$$4n \cdot 2^n + 12 \cdot 2^n = 8n \cdot 2^n + 16 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^n - 4n \cdot 2^n;$$

$$4n \cdot 2^n + 12 \cdot 2^n = 4n \cdot 2^n + 12 \cdot 2^n.$$

Из первоначального соотношения получим:

$$f(n) = f(n + 1) - \frac{1}{4} f(n + 2).$$

Теперь проверим, получатся ли заданные в условии задачи значения для начальных условий:

$$f(0) = f(1) - \frac{1}{4} f(2).$$

$$f(0) = 2 \cdot 2^1 - \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 2^2 = 1;$$

$$f(1) = f(2) - \frac{1}{4} f(3);$$

$$f(1) = 3 \cdot 2^2 - \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 2^3 = 4.$$

Ответ: $(1+n) \cdot 2^n$.

Задача 25. Найти частное решение рекуррентного соотношения

$$f(n+1) = \frac{1}{3} f(n) + 2,$$

удовлетворяющее начальному условию $f(0) = 6$.

Решение. Данное рекуррентное соотношение является неоднородным. Решим вначале соответствующее ему однородное рекуррентное соотношение, т. е. рекуррентное соотношение

$$f(n+1) = \frac{1}{3} f(n).$$

Составим характеристическое уравнение для этого рекуррентного соотношения:

$$\lambda - \frac{1}{3} = 0.$$

Это характеристическое уравнение имеет один корень — $\lambda_1 = \dfrac{1}{3}$. Следовательно, общим решением однородного рекуррентного соотношения является выражение

$$C_1 (\frac{1}{3})^n.$$

В исходном неоднородном рекуррентном соотношении $v(n) = 2$. Это выражение запишем в виде

$$R_m(n) \lambda^n = 2 \cdot 1.$$

Следовательно, $m = 0$, $R_0(n) = 2$ и $\lambda = 1$. Поскольку 1 не является корнем характеристического уравнения, то должно существовать решение вида $Q_0(n) \cdot 1^n$, где $Q_0(n)$ — многочлен нулевой степени, т. е. частное решение будем искать в виде $C \cdot 1^n = C$. Подставив в исходное рекуррентное соотношение это выражение, получим:

$$C = \frac{C}{3} + 2.$$

Значит, C = 3. Поэтому общее решение данного в условии рекуррентного соотношения можно получить в виде суммы общего решения соответствующего однородного рекуррентного соотношения и полученного

1) $(x_1 \Rightarrow x_2)(x_3 \Rightarrow x_4) \Rightarrow ((x_1 \vee x_3) \Rightarrow (x_4 \vee x_2))$;
2) $(x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 x_3 \Rightarrow x_2 x_4)$;
3) $((x_1 \Rightarrow x_2)\bar{x}_2) \Rightarrow x_1$;
4) $((x_1 \Rightarrow x_2)(x_3 \Rightarrow x_4)) \Rightarrow (x_1 x_3 \Rightarrow x_2 x_4)$;

Решение:
$((x_1 \Rightarrow x_2)(x_3 \Rightarrow x_4) \Rightarrow (x_1 x_3 \Rightarrow x_2 x_4) \overset{6.2}{=}$
$= (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_3 \vee x_4) \Rightarrow (\overline{x_1 x_3} \vee x_2 x_4) \overset{6.2}{=}$
$= \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_3 \vee x_4)} \vee (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 x_4) \overset{1.2,\ 4.4}{=}$
$= \overline{\bar{x}_1 \vee x_2} \vee \overline{\bar{x}_3 \vee x_4} \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 x_4 \overset{4.1,\ 4.3}{=}$
$= x_1 \bar{x}_2 \vee x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 x_4 \overset{2.1,\ 2.2}{=}$
$= \bar{x}_2 x_1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 x_3 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 x_4 \overset{3.2}{=}$
$= ((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)(x_1 \vee \bar{x}_1)) \vee ((\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3)(x_3 \vee \bar{x}_3)) \vee x_2 x_4 \overset{5.4}{=}$
$= ((\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \wedge 1) \vee ((\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3) \wedge 1) \vee x_2 x_4 \overset{5.3}{=}$
$= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \vee (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3) \vee x_2 x_4 \overset{2.2}{=}$
$= \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 x_4 \overset{3.2}{=}$
$= (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \overset{2.2}{=}$
$= (\bar{x}_2 \vee x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee x_4 \vee \bar{x}_3) \overset{5.4}{=}$
$= (1 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 \vee 1 \vee \bar{x}_3) \overset{5.5}{=} 1 \wedge 1 \overset{5.3}{=} 1.$
Ответ: Данная формула является тавтологией.

5) $((p \Rightarrow q)(q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
6) $(\bar{q} \Rightarrow \bar{p}) \Rightarrow ((\bar{q} \Rightarrow p) \Rightarrow q)$;
7) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$;
8) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow \bar{q}) \Rightarrow \bar{p})$;
9) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_2) \Rightarrow ((\bar{x}_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow x_1)$;
10) $(x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow ((x_3 \Rightarrow x_1) \Rightarrow (x_3 \Rightarrow x_2))$.

Задача 33. Удалить фиктивные переменные из формул, используя таблицы истинности.

1) $((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow (x_2 x_3 x_4 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4)) \oplus (x_1 \vee x_3)$;
2) $(x_1 \Rightarrow x_3) \Rightarrow ((x_1 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_1)$;
3) $((\bar{x}_2 \Rightarrow x_1)x_3) \vee (x_4(\overline{x_2 x_3} \Rightarrow x_1 x_3))$;

Решение:

Решение:

$(\overline{x_1 \Rightarrow \overline{x_2 x_3}}) \Rightarrow x_1 \vee x_3 \overset{6.2}{=} (\overline{\overline{x_1 \Rightarrow \overline{x_2 x_3}}}) \vee x_1 \vee x_3 \overset{4.1}{=}$

$= (x_1 \Rightarrow \overline{x_2 x_3}) \vee x_1 \vee x_3 \overset{6.2}{=} (\bar{x}_1 \vee \overline{x_2 x_3}) \vee x_1 \vee x_3 \overset{1.2}{=}$

$= \bar{x}_1 \vee \overline{x_2 x_3} \vee x_1 \vee x_3 \overset{4.4}{=} \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_1 \vee x_3 \overset{2.2}{=}$

$= \bar{x}_1 \vee x_1 \vee \bar{x}_3 \vee x_3 \vee x_2 \overset{5.4}{=} 1 \vee 1 \vee x_2 \overset{5.5}{=} 1.$

Данная в условии задачи формула оказалась тавтологией.

Для того, чтобы построить таблицу истинности, представим данную формулу с использованием символа $\rceil$:

$$(\rceil(x_1 \Rightarrow \rceil(x_2 x_3))) \Rightarrow x_1 \vee x_3.$$

Теперь построим таблицу истинности (таблица 5).

Таблица 5

$\rceil$	(	x_1	$\Rightarrow$	$\rceil$	(	x_2	$\wedge$	x_3	)	)	$\Rightarrow$	x_1	$\vee$	x_3
0		0	1	1		0	0	0			**1**	0	0	0
0		0	1	1		0	0	1			**1**	0	1	1
0		0	1	1		1	0	0			**1**	0	0	0
0		0	1	0		1	1	1			**1**	0	1	1
0		1	1	1		0	0	0			**1**	1	1	0
0		1	1	1		0	0	1			**1**	1	1	1
0		1	1	1		1	0	0			**1**	1	1	0
1		1	0	0		1	1	1			**1**	1	1	1

Выделенный столбик, соответствующий функции, которая реализуется данной формулой, состоит полностью из 1. Следовательно, эта формула является тавтологией.

Ответ: 1.

7) $(x_1 \Rightarrow x_2 x_3)(x_1 \vee x_2)$;
8) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_3 \vee x_1)$;
9) $(x_1 \Rightarrow x_2)((x_2 \Rightarrow x_3)(x_3 \Rightarrow x_1))$;
10) $(\overline{x_1 \Rightarrow x_2}) \vee (\overline{x_2 \Rightarrow x_1})$;
11) $((x_1 \oplus x_2)(x_2 \oplus x_3) \Rightarrow x_1) \oplus (x_1 \vee x_2)$;
12) $((x_1 \oplus x_2) \Rightarrow (x_2 \oplus x_3)) \Rightarrow (x_1 \oplus x_2)$.

Задача 32. При помощи равносильных преобразований выяснить, какие из следующих формул являются тавтологиями:

частного решения:

$$C_1(\frac{1}{3})^n + 3.$$

Из начального условия $f(0) = 6$ находим, что

$$C_1(\frac{1}{3})^0 + 3 = 6.$$

и поэтому $C_1 = 3$. Теперь частное решение данного в условии задачи рекуррентного соотношения, которое удовлетворяет заданным условиям, будет иметь вид:

$$\alpha(n) = 3 \cdot (\frac{1}{3})^n + 3 = 3 \cdot \big((\frac{1}{3})^n + 1\big).$$

Подставив полученное решение в исходное соотношение, легко сделать проверку (нужно так же проверить и выполнимость начальных условий).

Ответ: $3 \cdot \big((\frac{1}{3})^n + 1\big)$.

Задача 26. Найти частное решение рекуррентного соотношения

$$f(n+1) = f(n) + n + 1,$$

удовлетворяющее начальному условию $f(0) = 1$.

Решение: Соответствующее однородное рекуррентное соотношение имеет вид:

$$f(n+1) = f(n).$$

Его характеристическим уравнением будет уравнение $\lambda = 1$. Его корнем будет $\lambda_1 = 1$. Кратность корня равна 1. Поэтому общим решением однородного рекуррентного соотношения будет выражение

$$C_1 \cdot 1^n = C_1.$$

Поскольку в исходном рекуррентном соотношении

$$v(n) = (n+1) \cdot 1^n = R_1(n) \cdot 1^n$$

и 1 является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного соотношения, то частное решение исходного рекуррентного соотношения будем искать в виде $n(an + b)$. Подставив это выражение в исходное рекуррентное соотношение, получим:

$$(n+1)(a(n+1)+b) = n(an+b)+n+1$$

или, после приведения подобных,

$$2an + a + b = n + 1.$$

Поэтому, приравняв коэффициенты при степенях многочлена, получаем систему

$$\begin{cases} 2a = 1; \\ a + b = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем: $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, общее решение исходного рекуррентного соотношения имеет вид:

$$\alpha(n) = \frac{n}{2}(n+1) + C_1.$$

Подставив в это соотношение начальное условие $f(0) = 1$, получим, что

$$\frac{0}{2}(0+1) + C_1 = 1,$$

откуда $C_1 = 1$. Таким образом, получаем, что для заданного начального условия частным решением исходного рекуррентного соотношения является

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Теперь, как и в предыдущих задачах, осталось сделать проверку.

Ответ: $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1, \quad (n \geqslant 0)$.

Задача 27. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

1) $f(n+3) = -10f(n+2) - 32f(n+1) - 32f(n)$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение для данного рекуррентного соотношения:

$$\lambda^3 + 10\lambda^2 + 32\lambda + 32 = 0.$$

Проверка дает корень $\lambda_1 = -4$. Разделив уголком, получим разложение

$$(\lambda+4)(\lambda^2 + 6\lambda + 8) = 0.$$

Задача 31. Упростить формулы, используя равносильные преобразования и сделать проверку, используя таблицы истинности:

1) $(x_1 \Rightarrow x_2x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_2x_1)$;

Решение:

$$(x_1 \Rightarrow x_2x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_2x_1) \overset{6.2}{=}$$
$$= (\bar{x}_1 \vee x_2x_3) \vee (\bar{x}_1 \vee x_2x_1) \overset{1.2}{=}$$
$$= \bar{x}_1 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_2x_1 \overset{2.2,\ 4.2}{=}$$
$$= \bar{x}_1 \vee x_2x_3 \vee x_2x_1 \overset{3.2}{=}$$
$$= (\bar{x}_1 \vee x_2)(\bar{x}_1 \vee x_1) \vee x_2x_3 \overset{5.4,\ 5.3}{=}$$
$$= \bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_2x_3 \overset{7.1}{=} \bar{x}_1 \vee x_2.$$

Теперь построим таблицу истинности (таблица 4).

Таблица 4

(x_1	$\Rightarrow$	x_2	$\wedge$	x_3)	$\vee$	(x_1	$\Rightarrow$	x_2	$\wedge$	x_1)	$\bar{x}_1$	$\vee$	x_2
0	1	0	0	0	**1**	0	1	0	0	0	1	**1**	0
0	1	0	0	1	**1**	0	1	0	0	0	1	**1**	0
0	1	1	0	0	**1**	0	1	1	0	0	1	**1**	1
0	1	1	1	1	**1**	0	1	1	0	0	1	**1**	1
1	0	0	0	0	**0**	1	0	0	0	1	0	**0**	0
1	0	0	0	1	**0**	1	0	0	0	1	0	**0**	0
1	0	1	0	0	**1**	1	1	1	1	1	0	**1**	1
1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	1	1	0	**1**	1

Выделенные столбцы представляют собой значения функций, реализованных формулами $(x_1 \Rightarrow x_2x_3) \vee (x_1 \Rightarrow x_2x_1)$ и $\bar{x}_1 \vee x_2$. Поскольку эти столбцы равны, то равны и указанные формулы.

Ответ: $\bar{x}_1 \vee x_2$.

2) $(x_1 \Rightarrow x_2x_3)\overline{(x_2 \vee x_3 \Rightarrow x_1)}$;
3) $(\bar{x}_1 \Rightarrow \overline{x_1x_2})x_1$;
4) $\overline{(x_1x_2 \Rightarrow \bar{x}_1)}\overline{(x_1x_2 \Rightarrow \bar{x}_2)}$;
5) $(x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow ((x_3 \Rightarrow x_1) \Rightarrow (x_3 \Rightarrow x_2))$;
6) $\overline{(x_1 \Rightarrow \overline{x_2x_3})} \Rightarrow x_1 \vee x_3$;

Правило раскрытия скобок: (((($\rceil$) $\wedge$) $\vee$) $\Rightarrow$) $\Leftrightarrow$. Для операции $\oplus$ правило раскрытия скобок можно определить так: (((($\rceil$) $\wedge$) $\vee$) $\Rightarrow$) $\oplus$.

Формулы, которые используются в построении данной формулы, называются ее *подформулами*.

Если некоторая формула (или некоторая ее подформула) построена только при помощи одной из операций $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, то скобки в этом случае можно вовсе не использовать (поскольку эти операции обладают свойствами ассоциативности и коммутативности) и выполнять операции в любом порядке. Как правило, в этом случае операции выполняют в обычном порядке, т. е. слева направо.

Каждой формуле $A(x_1, x_2, \dots x_n)$ над множеством F можно сопоставить булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по правилу: для каждого набора $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ по определению полагается $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Такую функцию $f(\tilde{x}^n)$ называют *суперпозицией функций* из множества F.

Говорят, что формула $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ реализует некоторую булеву функцию $f(\tilde{x}^n)$. Эту функцию для A обозначают f_A.

Формулы A и B называют *эквивалентными*, если равны булевы функции, которые реализуют эти формулы, т. е. $f_A = f_B$, при этом пишут $A = B$.

Понятия формулы, эквивалентной формулы и суперпозиции булевых функций позволяют использовать свойства элементарных булевых функций для получения формулы, которая равносильна данной (т. е. реализует ту же функцию), но имеет более простое строение. Такие действия называются *равносильными преобразованиями*.

Формула A называется *тавтологией*, если при любом наборе истинностных значений ее переменных она принимает значение 1.

Если A — тавтология, то пишут: $\models A$.

Формула A называется *противоречием*, если для любого набора истинностных значений ее переменных она принимает значение 0.

Если A — противоречие, то пишут: $\models \overline{A}$.

Формула A равна B тогда и только тогда, когда $\models A \Leftrightarrow B$.

При выполнении равносильных преобразований формул, реализующих булевы функции, над знаком равенства будем писать номера тех перечисленных выше свойств элементарных булевых функций, которые используются на данном этапе преобразований. Например:

$$x_1 \Rightarrow (x_2 x_1) \overset{6.2}{=} \bar{x}_1 \vee (x_2 x_1) \overset{2.1,3.2}{=} (\bar{x}_1 \vee x_1) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2) \overset{5.3,5.4}{=} \bar{x}_1 \vee x_2.$$

Вторая скобка представляет собой квадратный трехчлен, который можно разложить на линейные множители, и представить последнее уравнение в виде:

$$(\lambda + 4)(\lambda + 4)(\lambda + 2) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \lambda + 4 = 0; \\ \lambda + 4 = 0; \\ \lambda + 2 = 0. \end{array}\right.$$

Следовательно, в нашем случае, получаем корень $\lambda_1 = -4$ кратности 2 и корень $\lambda_2 = -2$ кратности 1. Следовательно, общим решением исходного рекуррентного соотношения будет соотношение

$$(C_1 + C_2 n) \cdot (-4)^n + C_3(-2)^n.$$

Проверка:

$$(C_1 + C_2(n+3)) \cdot (-4)^{n+3} + C_3(-2)^{n+3} =$$
$$= -10((C_1 + C_2(n+2)) \cdot (-4)^{n+2} + C_3(-2)^{n+2}) - 32((C_1 + C_2(n+1)) \cdot (-4)^{n+1} +$$
$$+ C_3(-2)^{n+1}) - 32((C_1 + C_2 n) \cdot (-4)^n + C_3(-2)^n);$$

$$-64(C_1 + C_2(n+3)) \cdot (-4)^n - 8C_3(-2)^n =$$
$$= -10(16(C_1 + C_2(n+2)) \cdot (-4)^n + 4C_3(-2)^n) - 32(-4(C_1 + C_2(n+1)) \cdot (-4)^n -$$
$$-2C_3(-2)^n) - 32((C_1 + C_2 n) \cdot (-4)^n + C_3(-2)^n);$$

$$-64(C_1 + C_2(n+3)) \cdot (-4)^n - 8C_3(-2)^n =$$
$$= -64(C_1 + C_2(n+3)) \cdot (-4)^n - 8C_3(-2)^n.$$

Ответ: $(C_1 + C_2 n) \cdot (-4)^n + C_3(-2)^n$.

2) $f(n+3) = -3f(n+2) - 3f(n+1) - f(n)$.

Задача 28. Найти a_n по рекуррентным соотношениям и начальным условиям:

1) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0;\ a_1 = 10;\ a_2 = 16;$
2) $a_{n+3} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0;\ a_1 = 3;\ a_2 = 7;\ a_3 = 27.$

Решение. Данное рекуррентное соотношение запишем в виде

$$f(n+3) = 3f(n+1) - 2f(n).$$

Составляем соответствующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Проверка показывает, что $\lambda_1 = 1$ — корень. После деления уголком, получаем разложение

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0.$$

После разложения второй скобки:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0.$$

Следовательно, получаем корень $\lambda_1 = 1$ кратности 2 и корень $\lambda_2 = -2$ кратности 1. Тогда общее решение исходного рекуррентного соотношения будет иметь вид:

$$C_1 + C_2 n + C_3(-2)^n.$$

Воспользуемся теперь начальными условиями:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 2\cdot C_3 = 3; \\ C_1 + 2\cdot C_2 + 4\cdot C_3 = 7; \\ C_1 + 3\cdot C_2 - 8\cdot C_3 = 27. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим следующие значения:

$$C_1 = -\frac{73}{9};\ \ C_2 = \frac{84}{9};\ \ C_3 = -\frac{8}{9}.$$

Следовательно:

$$a_n = -\frac{73}{9} + \frac{84}{9}n - \frac{8}{9}(-2)^n.$$

Теперь осталось сделать проверку.

Ответ: $a_n = -\dfrac{73}{9} + \dfrac{84}{9}n - \dfrac{8}{9}(-2)^n.$

3) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 27\cdot 5^n;\ a_1 = -9;\ a_2 = 45;$
4) $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_11 - 6a_n = 6n^2 - 4n - 17;\ a_1 = 3;\ a_2 = 15 :\ a_3 = 41.$

Задача 29. Найти общее решение рекуррентного соотношения:

1) $f(n+3) = 3f(n+1) - 2f(n);$

6.4. $x \Leftrightarrow y = (x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y) = (y \vee \overline{x})(\overline{y} \vee x).$

7. Справедливы следующие правила:

7.1. $x \vee xy = x$ — правило поглощения конъюнкции;
7.2. $x(x \vee y) = x$ — правило поглощения дизъюнкции;
7.3. $xy \vee x\overline{y} = x$ — правило склеивания.

8. Имеют место следующие равенства:

8.1. $0 \Rightarrow x = 1;$
8.2. $1 \Rightarrow x = x;$
8.3. $x \Rightarrow 0 = \overline{x};$
8.4. $x \Rightarrow 1 = 1.$

Через F обозначается некоторое непустое множество булевых функций, а через F_0 — множество элементарных булевых функций.

Формула над множеством F булевых функций определяется индуктивно. Каждая функция $f(\tilde{x}^n)$ из множества F называется *формулой* над F. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — формулы над F или переменные из некоторого множества переменных U, то выражение $f(A_1, A_1, \ldots, A_n)$ называется *формулой* над F.

Например, $x \vee y$ и $y \vee (x \oplus z)$ — формулы над F_0; $x_1 \vee \wedge x_2$, $\vee(x_1 \Rightarrow x_2)$ — не формулы. Обычно, всюду, где это возможно, вместо $x \wedge y$, употребляется запись xy, если конечно при этом не возникает разночтений. Для таблиц истинности такое обозначение, как правило, не используется.

Если A и B — некоторые формулы и $f(A, B) \in F_0$, то говорят, что к формулам A и B применена операция булевой алгебры. Таким образом, в множество операций булевой алгебры входят элементарные булевы функции: дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквиваленция, сумма по модулю 2. Кроме этих операций в булевой алгебре существуют еще две операции, которые также являются элементарными булевыми функциями, но применимы только к одной формуле — взятия отрицания: $\bar{A}$ и тождественная операция: A.

Иногда вместо записи $\bar{A}$ используется запись $\rceil A$. Это обозначение оказывается удобным, если отрицание применяется к большой формуле, либо отрицаний достаточно много. Особенно удобным такое обозначение оказывается при составлении таблиц истинности.

2.1. $x \wedge y = y \wedge x$;
2.2. $x \vee y = y \vee x$;
2.3. $x \oplus y = y \oplus x$.

3. Дистрибутивные законы:

3.1. $x(y \vee z) = xy \vee xz$;
3.2. $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$;
3.3. $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$.

4. Свойства операций $\rceil, \wedge, \vee$:

4.1. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$;
4.2. $x \wedge x = x \vee x = x$.

Законы де-Моргана:

4.3. $\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}$;
4.4. $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

5. Свойства констант:

5.1. $x\overline{x} = \overline{x}x = 0$;
5.2. $x0 = 0x = 0$;
5.3. $x1 = 1x = x$;
5.4. $x \vee \overline{x} = \overline{x} \vee x = 1$;
5.5. $x \vee 1 = 1 \vee x = 1$;
5.6. $x \vee 0 = 0 \vee x = x$;
5.7. $x \oplus x = 0$;
5.8. $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$;
5.9. $x \oplus 1 = 1 \oplus x = \bar{x}$.

6. Выражение $\oplus$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ через $\rceil$, $\vee$, $\wedge$:

6.1. $x \oplus y = x\overline{y} \vee \overline{x}y = y\overline{x} \vee \overline{y}x$;
6.2. $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$;
6.3. $x \Leftrightarrow y = xy \vee \overline{x}\,\overline{y} = \overline{x}\,\overline{y} \vee xy$;

2) $f(n+3) = 2f(n+2) - f(n+1) - 4f(n)$;
3) $f(n+3) = 3f(n+2) + 3f(n+1) - 10f(n)$;
4) $f(n+3) = 7f(n+1) - 6f(n)$.

Задача 30. Найти частное решение неоднородного рекуррентного соотношения, заданного начальными условиями:

1) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 41 \cdot 3^n$;
2) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 12 \cdot 6^n$;
3) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 6 \cdot 5^n$;
4) $a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 19 \cdot 5^n$.

2 Булевы функции

2.1 Булевы функции и их свойства

Функция $f : B^n \to B$, где $B = \{0, 1\}$ называется *булевой функцией* или *функцией алгебры логики.*

Наборами значений переменных являются упорядоченные n-ки, составленные из элементов множества $\{0, 1\}$.

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — булева функция и $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — некоторая n-ка из B^n, то $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ есть *значение этой функции на наборе* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Выражение $\tilde{x}^n = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *векторным заданием аргумента.*

Булеву функцию можно задавать с помощью таблицы, в которой в первых n столбцах стоят все возможные наборы значений переменных, а в $n+1$ столбце — значения самой булевой функции. Наборы значений переменных принято располагать в так называемом естественном порядке. Для того, чтобы понять принцип такого расположения, достаточно привести пример булевой функции от трех переменных (таблица 1).

Таблица 1

x_1	x_2	x_3		f
0	0	0		**1**
0	0	1		**1**
0	1	0		**0**
0	1	1		**1**
1	0	0		**0**
1	0	1		**1**
1	1	0		**1**
1	1	1		**0**

Задание значений переменных в естественном порядке позволяет использовать более компактное векторное задание булевой функции. Например, $f(\tilde{x}^3) = (11010110)$.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *существенно зависит* от переменной x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, если существует такой набор $(a_1, a_2, \ldots \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, что

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Эта переменная x_i называется *существенной*. Переменная, которая не является существенной, называется *фиктивной*.

Пусть булева функция $f(\tilde{x}^n)$ задана таблично и для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n$ переменная x_i является ее фиктивной переменной. Вычеркивание из этой таблицы всех строк, которые соответствуют наборам $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, где $(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ — некоторые наборы переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ и столбца, в котором стоит переменная x_i, задает булеву функцию $f_1(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ от $n-1$ переменных. Такое вычеркивание называется *удалением фиктивной переменной* x_i.

Необходимым признаком наличия в формуле фиктивной переменой является четное количество единиц или нулей в таблице истинности.

Операция, обратная операции удаления фиктивной переменной, называется *операцией введения фиктивной переменной.*

Две булевы функции называются *равными*, если одна из них может быть получена из другой путем удаления или введения фиктивных переменных.

Равенство булевых функций можно определить и по-другому. Две булевы функции называются равными, если на одних и тех же наборах значений их переменных, значения этих функций равны. Если две булевы функции заданы векторно, то они будут равны тогда и только тогда, когда совпадают их векторные задания.

Элементарными булевыми функциями называются функции, заданные с помощью таблиц 2 и 3.

Таблица 2

x	$\overline{x}$	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1

Таблица 3

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

x — *тождественная функция*;
$\bar{x}$ — *отрицание*;
0 — *константа* 0;
1 — *константа* 1;
$x \wedge y$ — *конъюнкция*;
$x \vee y$ — *дизъюнкция*;
$x \Rightarrow y$ — *импликация* (x — *посылка*, y — *заключение*);
$x \Leftrightarrow y$ — *эквиваленция*;
$x \oplus y$ — *сумма по модулю* 2.

Справедливы следующие утверждения:

1. Ассоциативные законы:

1.1. $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$;
1.2. $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$;
1.3. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

2. Коммутативные законы: