А. А. Иванютенко, С. И. Жогаль
(ГГУ им. Ф. Скорины, БелГУТ, Гомель)

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ-ДУФФИНГА

Система связанных автоколебательных осцилляторов ван дер Поля-Дуффинга является одной из базовых моделей теории колебаний, иллюстрирующей явление синхронизации и сопутствующие эффекты [1]. При исследовании дополнительно вводится запаздывание по времени δ_1 и δ_2 в первый и второй осцилляторы соответственно. Математическая модель системы имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} - (\lambda_1 - x^2(t-\delta_1))\dot{x}(t-\delta_1) + \beta x^3(t-\delta_1) + (1 - \dfrac{\Delta}{2})x + \varepsilon(x-y) + \mu(\dot{x} - \dot{y}) = 0 \\ \ddot{y} - (\lambda_2 - y^2(t-\delta_2))\dot{y}(t-\delta_2) + \beta y^3(t-\delta_2) + (1 + \dfrac{\Delta}{2})y + \varepsilon(y-x) + \mu(\dot{y} - \dot{x}) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

После последовательности преобразований при допущении, что в нулевом приближении коэффициенты связи μ, ε и параметры неизохронности β и неидентичности $\rho = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}$ малы по сравнению с единицей, получим систему уравнений для амплитуд r_1 и r_2 колебаний парциальных звеньев системы

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = r_1 \cos\delta_1 - r_1^3 \cos\delta_1 \\ \dot{r}_2 = r_2 \cos\delta_2 - r_2^3 \cos\delta_2 \end{cases} \qquad (2)$$

Этим уравнениям отвечает установившееся движение по одинаковым орбитам радиуса $r_1 = r_2 = 1$. Перейдём теперь к возмущённым движениям. В первом приближении можно положить $r_1 = 1 + \tilde{r}_1$ и $r_2 = 1 + \tilde{r}_2$, где тильдой отмечены малые возмущения соответствующих переменных. Подставим сначала эти соотношения в уравнения амплитуд системы с ненулевыми коэффициентами. Пренебрегая членами высшего порядка, получим

$$\begin{cases} \dot{\tilde{r}}_1 = -2\tilde{r}_1 \cos\delta_1 + \rho\cos\delta_1 + 3\beta\sin\delta_1 + \varepsilon\sin\varphi + \mu(\cos\varphi - 1) \\ \dot{\tilde{r}}_2 = -2\tilde{r}_2 \cos\delta_2 - \rho\cos\delta_2 + 3\beta\sin\delta_2 - \varepsilon\sin\varphi + \mu(\cos\varphi - 1) \end{cases} \qquad (3)$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ – разность фаз парциальных звеньев системы. Обратим внимание, что возмущения амплитуд сильно демпфированы, поэтому их значения очень быстро выходят на стационарный уровень. Этот факт позволяет вычислить возмущения, определяющие стационарные орбиты осцилляторов:

$$\begin{cases} \tilde{r}_1 = \dfrac{\mu(\cos\varphi - 1) + 3\beta\sin\delta_1 + \varepsilon\sin\varphi + \rho\cos\delta_1}{2\cos\delta_1} \\ \tilde{r}_2 = \dfrac{\mu(\cos\varphi - 1) + 3\beta\sin\delta_2 - \varepsilon\sin\varphi - \rho\cos\delta_2}{2\cos\delta_2} \end{cases} \qquad (4)$$

Подставим теперь выражения $r_1 = 1 + \tilde{r}_1$ и $r_2 = 1 + \tilde{r}_2$ в фазовое уравнение системы

$$\dot{\varphi} = \tilde{r}_2 \sin\delta_2 - \tilde{r}_1 \sin\delta_1 + \rho\sin\delta_2 + \rho\sin\delta_1 + 2\varepsilon(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)\cos\varphi + 2\mu\sin\varphi + \Delta, \qquad (5)$$

с учётом соотношений (4) получим

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = {} & \frac{\mu(\cos\varphi - 1) + 3\beta\sin\delta_2 - \varepsilon\sin\varphi - \rho\cos\delta_2 + \cos\delta_2}{\cos\delta_2}\sin\delta_2 - \\ & - \frac{\mu(\cos\varphi - 1) + 3\beta\sin\delta_1 + \varepsilon\sin\varphi + \rho\cos\delta_1 + \cos\delta_1}{\cos\delta_1}\sin\delta_1 - ((1-\rho)\sin\delta_2 - (1+\rho)\sin\delta_1) + \\ & + 3\beta(3\beta(\sin\delta_2 - \sin\delta_1) - 2\varepsilon\sin\varphi - \rho(\cos\delta_2 + \cos\delta_1) + \cos\delta_2 - \cos\delta_1) + 2\varepsilon\cos\varphi \times \\ & \times \frac{\mu(\cos\varphi - 1)(\cos\delta_1 - \cos\delta_2) + 3\beta(\sin\delta_2\cos\delta_1 - \sin\delta_1\cos\delta_2) - \varepsilon\sin\varphi(\cos\delta_2 + \cos\delta_1) - 2\rho\cos\delta_1\cos\delta_2}{\mu(\cos\varphi - 1)(\cos\delta_2 + \cos\delta_1) + \varepsilon\sin\varphi(\cos\delta_2 - \cos\delta_1) + 2\rho\cos\delta_1\cos\delta_2} - \\ & - 2\mu\sin\varphi + \Delta \end{aligned} \qquad (6)$$

Это и есть искомое фазовое уравнение. Его анализ позволяет выяснить характер динамики относительной фазы слабо связанных осцилляторов в зависимости от всех существенных факторов: диссипативной связи, инерционной связи, параметров неизохронности, неидентичности и запаздываний.

Литература

1 Кузнецов, А.П. Нелинейные колебания / А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, Н.М.Рыскин. – Москва: Физматлит, 2002. – 292 с.

2 Кузнецов, А.П. Связанные осцилляторы ван дер Поля и ван дер Поля-Дуффинга: фазовая динамика и компьютерное моделирование // А.П.Кузнецов, Н.В.Станкевич, Л.В.Тюрюкина. – Изв. вузов «ПНД». – 2008. – №4. – т. 16. – с. 101 – 136.