М. А. Кочегарова
(МГУ им. А. А. Кулешова, Могилев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ВОЛНОВОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА С НЕЛИНЕЙНЫМ КОНВЕКТИВНЫМ ПОТОКОМ

Известно [1], что I. Ablowitz, A. Zeppetella впервые построили точное волновое решение классического уравнения Фишера, которое имеет вид

$$U_t = U(1-U) + U_{xx}.$$

В настоящей работе на основе прямого метода из [2] исследуются волновые решения уравнения

$$U_t = DU_{xx} + AU + BUU_x + CU^2, \tag{1}$$

где $A, B, C, D > 0$ – произвольные действительные числа. Положим, что

$$U(t,x) = U(\xi) = F^{-1}(\xi),\ \xi = x - \upsilon t,\ F(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1 \exp(\xi), \tag{2}$$

где $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0$ – неизвестные параметры волны, υ – скорость волны. Подставляя (2) в (1) и используя линейную независимость экспонент, получим законы распространения волны (2),

$$\upsilon = A + D,\ \lambda_0 = -\frac{C}{A},\ AB = 2CD. \tag{3}$$

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (1) имело решение (2) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (3). При этом параметр $\lambda_1 > 0$ является произвольным.

Рассмотрим модель, приведенную в книге [3],

$$U_t = kUU_x + U_{xx} + U(1-U), \tag{4}$$

где k – действительное число. Из уравнений (3) найдем

$$\upsilon = 2,\ \lambda_0 = 1,\ k = -2.$$

Вычислим значение волны $U(\xi)$ при $\xi \to \pm\infty$. Имеем

$$U(-\infty) = \frac{1}{\lambda_0} = 1,\ U(+\infty) = 0.$$

Следовательно, решение (2) является типичным кинком, который на фазовой плоскости (ξ, U) соединяет два положения равновесия $U = 1$ и $U = 0$.

Анализ уравнения (1) показывает, что при $B = 0$ оно допускает решение вида

$$U(t,x) = U(\xi) = F^{-1}(\xi),\ F(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1 \exp(\xi) + \lambda_2 \exp(2\xi), \tag{5}$$

где $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ – неизвестные параметры волны. Подставляя (5) в (1) получим

$$\lambda_0 = -\frac{C}{A},\ \upsilon = A - D,\ 3\upsilon = 3D + 2A,\ 2\upsilon = 4D + A,$$

$$\upsilon(2\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1^2) = D(\lambda_1^2 - 4\lambda_0\lambda_2) + A(\lambda_1^2 + 2\lambda_0\lambda_2) + C\lambda_2. \tag{6}$$

Теорема 2. Для того чтобы уравнение (1) имело решение вида (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (6).

Соотношения (6) являются законами распространения волны (5) и представляют собой непротиворечивую систему уравнений. Приведем набор параметров, которые удовлетворяют этой системе:

$$A = 6,\ C = -6,\ D = 1,\ \lambda_0 = 1,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \frac{1}{4},\ \upsilon = 5.$$

Литература

1. Ablowitz I., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher’s equation for a special wave speed // Bull. Math. Biology. 1979. V. 41. P. 835-840.
2. Жестков С. В. Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных. МГУ им. А. А. Кулешова. Могилев. 2006.
3. Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М., Мир. 1983.