Т. И. Остапко
(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)

СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ ПЕНЛЕВЕ – ТИПА

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\left(a_0x^2 + a_1x + a_2\right)y + b_0x^2 + b_1x + b_2}{\left(c_0x^2 + c_1x + c_2\right)y + d_0x^2 + d_1x + d_2}, \\ y' = \dfrac{\left(\alpha_0y^2 + \alpha_1y + \alpha_2\right)x + \beta_0y^2 + \beta_1y + \beta_2}{\left(\gamma_0y^2 + \gamma_1y + \gamma_2\right)x + \delta_0y^2 + \delta_1y + \delta_2}. \end{cases} \tag{1}$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, i = \overline{0,2}$ — функции, аналитические по z, $|c_0| + |d_0| \neq 0$, $|\gamma_0| + |\delta_0| \neq 0$.

Найдем условия, при которых система (1) обладает свойством Пенлеве.

Если $a_0x^2 + a_1x + a_2$ и $c_0x^2 + c_1x + c_2$, $\alpha_0y^2 + \alpha_1y + \alpha_2$ и $\gamma_0y^2 + \gamma_1y + \gamma_2$ не имеют общих корней, то согласно [1] для наличия свойства Пенлеве необходимо, чтобы система (1) имела вид

$$\begin{cases} x' = \left(\left(a_0x^2 + a_1x + a_2\right)y + b_0x^2 + b_1x + b_2\right)/\left(c_2y + d_0x^2 + d_1x + d_2\right), \\ y' = \left(\left(\alpha_0y^2 + \alpha_1y + \alpha_2\right)x + \beta_0y^2 + \beta_1y + \beta_2\right)/\left(\gamma_2x + \delta_0y^2 + \delta_1y + \delta_2\right), \end{cases} \tag{2}$$

где считаем $d_0x^2 + d_1x + d_2 = d_0(x - S_1)(x - S_2)$, $c_2 \cdot \gamma_2 \neq 0$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $\gamma_2 = 1$ и $c_2 = 1$. С помощью метода малого параметра устанавливаем, что необходимо требовать, чтобы $a_0 = a_1 = \alpha_0 = \alpha_1 = 0$. Пусть $S_1 \neq S_2$. Выполнив замену $x = \varepsilon\upsilon + S_1$, $y = \varepsilon\omega$, $z = z_0 + \varepsilon^2 t$, при $\varepsilon \to 0$ получим упрощенную систему, которая имеет свойство Пенлеве, если

$S_i + \delta_2 \neq 0$, $S_j + \delta_2 = 0$, $b_0S_i^2 + b_1S_i + b_2 = 0$, $i = 1,2$, $j = 1,2$, $i \neq j$

и выполняется одно из следующих соотношений

а)
$$1 - \delta_1 d_0(S_j - S_i) = 0, \quad b_0S_j^2 + b_1S_j + b_2 = -\alpha_2S_j - \beta_2, \tag{3}$$

б) $b_0S_j^2 + b_1S_j + b_2 = 0$, $\alpha_2S_j + \beta_2 = 0$,

в) $b_0S_j^2 + b_1S_j + b_2 = 0$, $\delta_1 = 0$

или

$$S_i + \delta_2 \neq 0, \quad i = 1,2, \quad b_0S_1^2 + b_1S_1 + b_2 = b_0S_2^2 + b_1S_2 + b_2 = 0. \tag{4}$$

Если $S_1 = S_2$, то полагая $x = \varepsilon\upsilon + S_1$, $y = \varepsilon^2\omega$, $z = z_0 + \varepsilon^3 t$, при $\varepsilon \to 0$ получим упрощенную систему. Она имеет свойство Пенлеве, если $b_0S_1^2 + b_1S_1 + b_2 = 0$.

Теорема 1. Для того чтобы система (2) имела свойство Пенлеве, необходимо, чтобы $a_0 = a_1 = \alpha_0 = \alpha_1 = 0$ и выполнялись условия (3) или (4) при $S_1 \neq S_2$ и $b_0S_1^2 + b_1S_1 + b_2 = 0$ при $S_1 = S_2$.

Литература

1. Зенченко, А. С. Системы дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве: дис. ... канд. физ – мат. наук: 24.12.04 / А. С. Зенченко. — Минск, 2004. — 101 л.