Ю. В. Погерило
(ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно)

ОБ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СВОЙСТВОМ ПЕНЛЕВЕ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x' = yA(x) + C(x), \quad y'^2 = y^4 B(x), \qquad (1)$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ многочлены по x с постоянными коэффициентами. Найдем необходимые и достаточные условия, при которых решения системы (1) не имеют подвижных критических особых точек.

Система

$$x' = yA(x), \quad y'^2 = y^4 B(x) \qquad (2)$$

инвариантна относительно замены переменных $(t, x, y) \to (\varepsilon t, x, \varepsilon^{-1} y)$ и, следовательно, является упрощенной в смысле Пенлеве для (1). Поэтому для отсутствия у решений системы (1) подвижных критических особых точек необходимо, чтобы этим же свойством обладали решения системы (2).

Используя метод малого параметра [1], метод сравнения с классическими уравнениями Пенлеве, непосредственное интегрирование, получим, что справедлива

Теорема 1. *Для того, чтобы система (2) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она линейным преобразованием x и y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из видов:*

$$x' = 0, \quad y'^2 = xy^4,$$

или

$$x' = y\left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right), \quad y'^2 = y^4,$$

где a_2, a_1, a_0 – постоянные.

Рассмотрим системы (1), соответствующие полученным упрощенным системам вида (2). Аналогично, используя метод малого параметра, метод сравнения с классическими уравнениями Пенлеве, непосредственное интегрирование, получим, что справедлива

Теорема 2. *Для того, чтобы система (1) обладала свойством Пенлеве, необходимо и достаточно, чтобы она линейным преобразованием x и y и аналитической заменой независимой переменной t приводилась к одному из видов:*

$$x' = a_1 x, \quad y'^2 = xy^4,$$

или

$$x' = y\left(a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) + c_2 x^2 + c_1 x + c_0, \quad y'^2 = y^4,$$

где a_2, a_1, a_0, c_2, c_1, c_0 – постоянные.

Литература

1 Айнс, Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. − Харьков: ГНТИУ, 1939. − 719 с.