

УДК 517.538.52+517.538.53

АППРОКСИМАЦИИ ЭРМИТА-ПАДЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

А.П. Старовойтов

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

HERMITE-PADE APPROXIMANTS OF THE SYSTEM MITTAG-LEFFLER FUNCTIONS

A.P. Starovoitov

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе изучаются асимптотические свойства интегралов Эрмита. В частности, при $j=1,2,\dots,k$ и $n \rightarrow \infty$ найдены асимптотики диагональных аппроксимаций Эрмита-Паде $\pi_{kn,kn}^j(z; e^{jz})$ для системы экспонент $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$. Аналогичные результаты получены и для системы вырожденных гипергеометрических функций $\{{}_1F_1(1, \gamma; jz)\}_{j=1}^k$.

Ключевые слова: интегралы Эрмита, совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита-Паде, асимптотические равенства.

The paper deals with asymptotic properties of Hermite integrals. In particular, the asymptotics of diagonal Hermite-Pade approximations $\pi_{kn,kn}^j(z; e^{jz})$ for the system of exponents $\{e^{jz}\}_{j=1}^k$ are determined when $j=1,2,\dots,k$ and $n \rightarrow \infty$. Similar results are proved for the system of confluent hypergeometric functions $\{{}_1F_1(1, \gamma; jz)\}_{j=1}^k$.

Keywords: Hermite integrals, joint Pade approximations, Hermite-Pade approximations, asymptotic equality.

Введение

Рассмотрим набор вырожденных гипергеометрических функций

$$\begin{aligned} F_\gamma^j(z) &= {}_1F_1(1, \gamma; \lambda_j z) = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda_j^p}{(\gamma)_p} z^p, \quad j=1, 2, \dots, k, \end{aligned} \quad (0.1)$$

где γ – произвольное комплексное число, отличное от $0, -1, -2, \dots$, $(\gamma)_0=1$, $(\gamma)_p = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+p-1)$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные комплексные числа. Принимая во внимание равенство $(\gamma)_p = \Gamma(\gamma+p)/\Gamma(\gamma)$, где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера, видим, что гипергеометрические функции (0.1) являются функциями Миттаг-Леффлера [1, гл. 5, § 2.7, равенство 16]. При $\gamma=1$ набор (0.1) представляет собой систему экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$.

В данной статье исследуется асимптотика совместных приближений функций (0.1) рациональными дробями с общим знаменателем (аппроксимациями Эрмита-Паде). Впервые такие конструкции рациональных функций (для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$) рассматривались Ш. Эрмитом [2] в связи с доказательством трансцендентности числа e . Строгое определение появилось позже [3], [4]. В настоящее время интерес к таким аппроксимациям значительно возрос [5]–[9].

Традиционными приложениями аппроксимаций Эрмита-Паде являются теория аппроксимации аналитических функций [10], [11] и теория диофантовых приближений чисел [12]. В частности, они активно применяются в исследованиях алгебраической природы математических констант (значений дзета функции Римана в натуральных точках, постоянной Эйлера и др. [12]). Вместе с тем, совместные рациональные аппроксимации оказались полезными в спектральной теории несимметричных разностных операторов [13], [14] и в теории случайных матриц [15]–[17].

Зафиксируем произвольные целые неотрицательные числа n, m_1, m_2, \dots, m_k . По определению полагаем $m = \sum_{i=1}^k m_i$, $n_j = n + m - m_j$, $j=1, 2, \dots, k$. Известно [4], что для любого набора $\{f_j(z)\}_{j=1}^k$ голоморфных в нуле функций при $j=1, 2, \dots, k$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$, $\deg Q_m \leq m$, $\deg P_{n_j}^j \leq n_j$, для которых

$$\begin{aligned} R_{n,m}^j(z) &= Q_m(z)f_j(z) - P_{n_j}^j(z) = \\ &= A_j z^{n+m+1} + \dots \end{aligned} \quad (0.2)$$

Если $k=1$, то согласно теореме Паде [3, теорема 1.1.1] многочлены $Q_m(z)$, $P_n^1(z)$ определяются с точностью до однородной константы,

а их отношение задает единственную рациональную функцию $\pi_{n,m}(z, f_1) = P_n^1(z) / Q_m(z)$, которую называют *аппроксимацией Паде* для $f_1(z)$.

При $k \geq 2$ дроби

$$\pi_{n,m}^j(z) = \pi_{n_j,m}^j(z; f_j) = P_{n_j}^j(z) / Q_m(z), \quad j = 1, 2, \dots, k$$

условиями (0.2) определяются, вообще говоря, не однозначно. В случае единственности множества $\{\pi_{n,m}^j(z)\}_{j=1}^k$ его элементы называют *аппроксимациями Эрмита-Паде (совместными аппроксимациями Паде)* для системы функций $\{f_j(z)\}_{j=1}^k$.

Единственность имеет место, например, для совершенных систем функций (определение и примеры совершенных систем см. в [4]). В частности, при $\gamma = 1$ система $F_1^j(z) = e^{\lambda_j z}$, $j = 1, 2, \dots, k$ является совершенной [4, теорема 2.1]. Без формального определения этот факт был установлен Эрмитом.

Эрмит [2] ввел в рассмотрение интегралы, которые после небольших преобразований [4] приводят к решению системы (0.2) для набора экспонент $\{F_1^j(z) = e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$:

$$Q_m(z) = \frac{z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^\infty [x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx,$$

$$P_{n_j}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_{\lambda_j}^\infty [x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx, \quad (0.3)$$

$$R_{n,m}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+m+1}}{(n+m)!} \int_0^{\lambda_j} [x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx.$$

В первых двух интегралах (0.3) интегрирование осуществляется по контуру, идущему в $+\infty$ и $Re z > 0$. При $Re z \leq 0$ значения $Q_m(z)$, $P_{n_j}^j(z)$ находятся с помощью аналитического продолжения. В интеграле, определяющем $R_{n,m}^j(z)$, интегрирование проводится по любой кривой, соединяющей точки 0 и λ_j .

При $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, \dots, k$ и $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$ значения $Q_m(1)$, $P_{n_j}^j(1)$ являются рациональными числами и легко вычисляются, а $R_{n,m}^j(1)$ убывает к нулю при $n \rightarrow \infty$. Эти и другие свойства интегралов (0.3) были виртуозно использованы Эрмитом для обоснования трансцендентности числа e [2], [18]. Несколько усложнив рассуждения Эрмита, Линдеман (1882 год) доказал трансцендентность числа π , решив, тем самым, одну из самых старых задач математики – «задачу о квадратуре круга». Предложенное им доказательство [18] существенно опирается на соответствующие свойства интегралов (0.3), порожденных системой функций $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где λ_j – различные алгебраические числа.

Важным стимулом для дальнейшего изучения свойств интегралов Эрмита (0.3) стала задача Е.М. Никишина об исследовании сходимости аппроксимаций Эрмита-Паде для системы экспонент. Ее решение было получено А.И. Аптекаревым [19], который описал асимптотику поведения первого из интегралов в (0.3) и, опираясь на полученный результат, показал, что при $n+m \rightarrow +\infty$ для любого $j = 1, 2, \dots, k$ $\pi_{n,m}^j(z; e^{\lambda_j z})$ сходится равномерно на компактах в \mathbb{C} к $e^{\lambda_j z}$. Ранее при $k=1$ равномерная сходимость $\pi_{n,m}(z; e^z)$ к e^z была доказана Перроном [20].

В [21] А.И. Аптекарев существенно обобщил предыдущие результаты. Он установил, что система $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^k$ является совершенной при произвольном $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, кроме того, для фиксированных n и m_j таких, что $n \geq m_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, k$, общий знаменатель $\tilde{Q}_m(z)$ и остаток $\tilde{R}_{n,m}^j(z)$ в этом случае имеют вид:

$$\tilde{Q}_m(z) = \frac{z^{kn+n+\gamma}}{\Gamma(kn+n+\gamma)} \times \quad (0.4)$$

$$\times \int_0^\infty [x^{n+\gamma-1} \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx,$$

$$\tilde{R}_{n,m}^j(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{kn+n+1}}{(\lambda_j)^{\gamma-1} (\gamma)^{kn+n}} \times \quad (0.5)$$

$$\times \int_0^{\lambda_j} [x^{n+\gamma-1} \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}] e^{-zx} dx,$$

где интегралы имеют тот же смысл, что и в формулах (0.3). В [21], в частности, показано, что при $|z| \leq L$ и $n+m \rightarrow +\infty$

$$\tilde{Q}_m(z) = \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i m_i}{n+m+\gamma-1} z\right\} \times \quad (0.6)$$

$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{n+m}\right)\right).$$

Здесь и далее L – положительная постоянная.

Из (0.6) вытекает [21] равномерная сходимость $\pi_{n,m}^j(z; F_\gamma^j)$ к $F_\gamma^j(z)$ на компактах в \mathbb{C} при $n+m \rightarrow +\infty$ и $j = 1, 2, \dots, k$.

В данной работе изучаются асимптотические свойства обобщенных интегралов Эрмита, определяющих в (0.5) функции $\tilde{R}_{n,m}^j(z)$. В частности, при $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$ и $n \rightarrow \infty$ для произвольного набора $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ различных и отличных от нуля действительных чисел найдена асимптотика аппроксимаций Эрмита-Паде для системы функций Миттаг-Леффлера $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^k$.

В случае, когда $k=1$ и $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ асимптотические свойства аппроксимаций Паде

$\pi_{n,m}(z; F_\gamma)$ функций $F_\gamma(z) = F_\gamma^1(z) = F_1(1, \gamma; z)$ исследовались в [22]. В этой работе установлено, что для любого $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq L$ при $m \leq n$ и $n + m \rightarrow \infty$

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,m}(z; F_\gamma) = (-1)^m \frac{m!(\gamma)_n e^{2mz/(n+m)}}{(\gamma)_{n+m} (\gamma)_{n+m+1}} z^{n+m+1} (1 + o(1)). \quad (0.7)$$

При $\gamma = 1$ равенство (0.7) ранее было доказано Д. Браессом [23].

Первый результат об асимптотике аппроксимаций Эрмита-Паде к набору из двух марковских функций был получен В.А. Калягиным [24]. Главный член асимптотики, а также сходимость аппроксимаций Эрмита-Паде для набора марковских функций, порожденных системой Анжелеско, были исследованы в работе А.А. Гончара и Е.А. Рахманова [25]. Вопросы единственности, а также свойства главного члена асимптотики аппроксимаций Эрмита-Паде марковских функций для системы Никишина интенсивно исследовались рядом авторов [26]–[32]. Отметим также работы А.И. Аптекарева [33], [34] и А.И. Аптекарева с соавторами [35], [36], в которых рассматривались близкие задачи.

1 Формулировка основных результатов

Далее, считаем, что $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – отличные от нуля различные действительные числа. Обозначим через $\{\lambda_j^*\}_{j=0}^k$ множество чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^k \cup \{0\}$, занумерованных в порядке возрастания, т. е. $\lambda_0^* < \lambda_1^* < \dots < \lambda_k^*$, и определим функции:

$$\varphi(x) = (x - \lambda_0^*)(x - \lambda_1^*) \dots (x - \lambda_k^*) = x(x - \lambda_1^*) \dots (x - \lambda_k^*),$$

$$S(x) = \ln \left((-1)^{k+i+1} \varphi(x) \right), x \in (\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*),$$

$$S(\lambda_i^*) = -\infty, i = 0, 1, \dots, k.$$

Многочлен $\varphi(x)$ имеет нули в точках $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$. Следовательно, на каждом из интервалов $(\lambda_0^*, \lambda_1^*), (\lambda_1^*, \lambda_2^*), \dots, (\lambda_{k-1}^*, \lambda_k^*)$ производная $\varphi'(x)$ обращается в ноль. Пусть x_1, x_2, \dots, x_k – нули $\varphi'(x)$, занумерованные в порядке возрастания, т. е. $x_i \in (\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Так как $\deg \varphi'(x) = k$, то других нулей у $\varphi'(x)$ нет. Нетрудно заметить, что на интервале $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение в точке x_i , т. е. $S(x) < S(x_i)$ при $x \in (\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*) \setminus \{x_i\}$. На каждом из интервалов $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$

$$S'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

$$S''(x) = \frac{\varphi''(x)\varphi(x) - [\varphi'(x)]^2}{\varphi^2(x)}$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x - \lambda_1^*)^2} - \dots - \frac{1}{(x - \lambda_k^*)^2}.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$S''(x_i) = \varphi''(x_i) / \varphi(x_i) < 0.$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1.1. Пусть $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$ и $\pi_{kn, kn}^j(z; e^{\lambda_j z})$ – аппроксимации Эрмита-Паде для системы экспонент $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные и отличные от нуля действительные числа. Тогда для любого комплексного z , $|z| \leq L$ при $j = 1, 2, \dots, k$ и $n \rightarrow +\infty$

$$e^{\lambda_j z} - \pi_{kn, kn}^j(z; e^{\lambda_j z}) = (-1)^{kn} \text{sign}(\lambda_j) \frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!} e^{\lambda_j z} e^{\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z} \times$$

$$\times \sum_i^* (-1)^{(i+1)n} \sqrt{\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} e^{nS(x_i)} e^{-zx_i} (1 + O_i(1/n)),$$

где в сумме \sum_i^* суммирование распространяется только на те значения i из $\{1, 2, \dots, k\}$, для которых x_i лежит в интервале с концами в точках 0 и λ_j .

Теорема 1.2. Пусть $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$ и $\pi_{kn, kn}^j(z; F_\gamma^j)$ – аппроксимации Эрмита-Паде для системы функций Миттаг-Леффлера $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные и отличные от нуля действительные числа. Тогда для любого комплексного z , $|z| \leq L$ при $j = 1, 2, \dots, k$ и $n \rightarrow +\infty$

$$F_\gamma^j(z) - \pi_{kn, kn}^j(z; F_\gamma^j) = (-1)^{kn} \text{sign}(\lambda_j) \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j z} e^{\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z} \times$$

$$\times \sum_i^* (-1)^{(i+1)n} \sqrt{\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} \times$$

$$\times e^{nS(x_i)} e^{-zx_i} \left(\frac{x_i}{\lambda_j} \right)^{\gamma-1} (1 + O_i(1/n)),$$

где в сумме \sum_i^* суммирование распространяется только на те значения i из $\{1, 2, \dots, k\}$, для которых x_i лежит в интервале с концами в точках 0 и λ_j .

В частности, при $k = 1$ и $\lambda_1 = 1$

$$\varphi(x) = x(x - 1),$$

$$S(x) = \ln[-x(x - 1)], \quad x \in (0, 1),$$

$$x_1 = 1/2, \quad S(x_1) = -\ln 4, \quad S''(x_1) = -8.$$

Поэтому из теоремы 1.2 следует, что

$$F_\gamma(z) - \pi_{n,n}(z; F_\gamma) = (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(\gamma)_{2n}} e^z \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}} (1 + O(1/n)). \quad (1.1)$$

Напомним, что бесконечно малые (б. м.) $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$, $\{\beta_n\}_{n=0}^\infty$ называют эквивалентными ($\alpha_n \sim \beta_n$), если $\alpha_n / \beta_n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow +\infty$.

Применяя при действительных $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ формулу Стирлинга и учитывая равенство $(\gamma)_k = \Gamma(k + \gamma) / \Gamma(\gamma)$, нетрудно показать, что при $n \rightarrow +\infty$

$$\frac{n!(\gamma)_n}{(\gamma)_{2n+1}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2^{2n+\gamma}}.$$

Это значит, что при $n = m$ и $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ асимптотические равенства (0.7) и (1.1) согласуются. Таким образом, в диагональном случае получено другое доказательство теоремы 1 из [22], которое, к тому же, справедливо и при $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Подробнее остановимся на следствиях из теорем 1.1 и 1.2 в случае, когда $k = 2, 3$, $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, \dots, k$.

Следствие 1.1. Пусть $\{e^z, e^{2z}\}$ – набор из двух экспонент и $n = m_1 = m_2$. Тогда для любого комплексного z , $|z| \leq L$ при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{2n,2n}^1(z; e^z) &= \\ &= \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n e^{z/\sqrt{3}} (1 + o(1)), \\ e^{2z} - \pi_{2n,2n}^1(z; e^{2z}) &= \\ &= \frac{z^{3n+1}}{(3n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \times \\ &\times \left\{ e^{z/\sqrt{3}} + (-1)^n e^{-z/\sqrt{3}} \right\} (1 + o(1)). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Следствие 1.2. Пусть $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^3$ – набор из двух функций Миттаг-Леффлера при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ и $n = m_1 = m_2$. Тогда для любого комплексного z , $|z| \leq L$ при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} F_\gamma^1(z) - \pi_{2n,2n}^1(z; F_\gamma^1) &= \\ &= \frac{z^{3n+1}}{(\gamma)_{3n}} e^z \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n e^{z/\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} (1 + o(1)), \\ F_\gamma^2(z) - \pi_{2n,2n}^2(z; F_\gamma^2) &= \frac{z^{3n+1}}{2^{\gamma-1}(\gamma)_{3n}} e^{2z} \sqrt{\frac{2\pi}{9n}} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^n \times \\ &\times \left\{ e^{\frac{z}{\sqrt{3}}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} + (-1)^n e^{-\frac{z}{\sqrt{3}}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\gamma-1} \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Для доказательства следствий 1.1 и 1.2 достаточно заметить, что при $k = 2$, $\lambda_j = j$, $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x(x-1)(x-2), \\ x_1 &= 1 - 1/\sqrt{3}, \quad x_2 = 1 + 1/\sqrt{3}, \\ S(x_1) &= S(x_2) = \ln \left[2 / (3\sqrt{3}) \right], \\ S''(x_1) &= S''(x_2) = -9. \end{aligned}$$

При $\gamma = 1$ равенства, аналогичные (1.2) и (1.3), ранее другим методом были получены в [37]. В них вместо б. м. $\sqrt{2\pi/9n} \cdot [2/(3\sqrt{3})]^n$ в качестве множителя правой части стоит эквивалентная ей б. м. $B((n+1)/2; n+1)$, где $B(\cdot; \cdot)$ – бета-функция Эйлера.

Следствие 1.3. Пусть $\{e^{jz}\}_{j=1}^3$ – набор из трёх экспонент и $n = m_1 = m_2 = m_3$. Тогда для любого комплексного z , $|z| \leq L$ при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} e^z - \pi_{3n,3n}^1(z; e^z) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} e^z \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} (1 + o(1)), \\ e^{2z} - \pi_{3n,3n}^1(z; e^{2z}) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} e^{2z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} (1 + o(1)), \\ e^{3z} - \pi_{3n,3n}^1(z; e^{3z}) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(4n)!} e^{3z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} \left\{ e^{\sqrt{5}z/2} + e^{-\sqrt{5}z/2} \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Следствие 1.4. Пусть $\{F_\gamma^j(z)\}_{j=1}^3$ – набор из трёх функций Миттаг-Леффлера при $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, 3$ и $n = m_1 = m_2 = m_3$. Тогда для любого комплексного z , $|z| \leq L$ при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} F_\gamma^1(z) - \pi_{3n,3n}^1(z; F_\gamma^1) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(\gamma)_{4n}} e^z \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{\gamma-1} (1 + o(1)), \\ F_\gamma^2(z) - \pi_{3n,3n}^2(z; F_\gamma^2) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(\gamma)_{4n}} e^{2z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} e^{\sqrt{5}z/2} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^{\gamma-1} (1 + o(1)), \\ F_\gamma^3(z) - \pi_{3n,3n}^3(z; F_\gamma^3) &= \\ &= (-1)^n \frac{z^{4n+1}}{(\gamma)_{4n}} e^{3z} \sqrt{\frac{\pi}{5n}} \times \\ &\times \left\{ e^{\frac{\sqrt{5}z}{2}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)^{\gamma-1} + e^{-\frac{\sqrt{5}z}{2}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{6}\right)^{\gamma-1} \right\} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Для доказательства следствий 1.3 и 1.4 достаточно заметить, что при $k = 3$ и $\lambda_j = j$, $j = 1, 2, 3$ в теоремах 1.1 и 1.2

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x(x-1)(x-2)(x-3), \\ x_1 &= (3-\sqrt{5})/2, \quad x_3 = (3+\sqrt{5})/2, \\ x_2 &= 3/2, \quad S(x_1) = S(x_3) = 0, \quad S(x_2) = \ln(9/16), \\ S''(x_1) &= S''(x_3) = -10, \quad S''(x_2) = -80/9. \end{aligned}$$

2 Доказательство теорем 1.1 и 1.2

Интегралы вида

$$F(\lambda) = \int_I f(x) e^{\lambda S(x)} dx \quad (2.1)$$

называют интегралами Лапласа. Здесь I либо отрезок $[a, b]$, либо интервал (a, b) , λ – большой параметр. Будем считать, что функция $S(x)$ принимает только действительные значения. Функция $f(x)$ может быть комплекснозначной. Считаем также, что $f(x)$ и $S(x)$ непрерывны при $x \in I$. Нас интересует асимптотическое поведение интеграла $F(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Следующее утверждение [38, § 43, п. 1, лемма 1] дает грубую экспоненциальную оценку для интеграла Лапласа.

Утверждение 2.1. Пусть $I = (a, b)$ – конечный или бесконечный интервал, $S(x) \leq c$ при $x \in I$ и интеграл (2.1) сходится абсолютно при некотором $\lambda_0 > 0$. Тогда при $\text{Re} \lambda \geq \lambda_0$

$$|F(\lambda)| \leq c_1 e^{c \text{Re} \lambda},$$

где c_1 – положительная постоянная.

В дальнейшем ограничимся случаем, когда $S(x)$ достигает наибольшего значения на отрезке $I = [a, b]$ в единственной точке, лежащей внутри этого отрезка. Справедливо [38, § 43, п. 4, теорема 2] следующее

Утверждение 2.2. Пусть $S(x) < S(x_0)$, $x \neq x_0$, $a < x_0 < b$, $S''(x_0) \neq 0$ и функции $f(x)$, $S(x)$ бесконечно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда при $\lambda \rightarrow +\infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$F(\lambda) = \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_0)}} e^{(\lambda_0) \lambda} \{f(x_0) + O(\lambda^{-1})\}. \quad (2.2)$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.2. Теорема 1.1 получается из теоремы 1.2, если положить $\gamma = 1$.

Лемма 2.1. Пусть $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$ и $\tilde{R}_{n,m}^j(z)$ – функции, определяемые равенством (0.5) для системы $\{F_j^\gamma(z)\}_{j=1}^k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные и отличные от нуля действительные числа. Тогда для любого комплексного z , $|z| \leq L$ при $j = 1, 2, \dots, k$ и $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{n,m}^j(z) &= (-1)^{kn} \text{sign}(\lambda_j) \frac{z^{kn+n+1}}{(\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j z} \times \\ &\times \sum_i^* (-1)^{(i+1)n} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} e^{nS(x_i)} e^{-zx_i} \left(\frac{x_i}{\lambda_j}\right)^{\gamma-1} \times \\ &\times (1 + O_i(1/n)), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где в сумме \sum_i^* суммирование распространяется только на те значения i из $\{1, 2, \dots, k\}$, для которых x_i лежит в интервале с концами в точках 0 и λ_j .

Доказательство. В условиях леммы

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{n,m}^j(z) &= \frac{z^{kn+n+1}}{(\lambda_j)^{\gamma-1} (\gamma)_{kn+n}} e^{\lambda_j z} \times \\ &\times \int_0^{\lambda_j} x^n (x - \lambda_1)^n \dots (x - \lambda_k)^n x^{\gamma-1} e^{-zx} dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Интеграл в правой части равенства (2.4) обозначим через $I_j(z)$ и представим в виде

$$I_j(z) = \text{sign}(\lambda_j) \sum_i^* I_j^i(z), \quad (2.5)$$

где

$$I_j^i(z) = \int_{\lambda_{i-1}^*}^{\lambda_i^*} x^n (x - \lambda_1)^n \dots (x - \lambda_k)^n x^{\gamma-1} e^{-zx} dx$$

и сумма \sum_i^* состоит только из тех интегралов I_j^i ,

у которых область интегрирования $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$ принадлежит промежутку с концами в точках 0 и λ_j .

Заметим, что

$$\begin{aligned} I_j^i(z) &= (-1)^{kn+(i+1)n} \times \\ &\times \int_{\lambda_{i-1}^*}^{\lambda_i^*} x^{\gamma-1} e^{-zx} e^{n \ln[(-1)^{kn+(i+1)n} x(x-\lambda_1) \dots (x-\lambda_k)]} dx = \\ &= (-1)^{kn+(i+1)n} \int_{\lambda_{i-1}^*}^{\lambda_i^*} x^{\gamma-1} e^{-zx} e^{nS(x)} dx. \end{aligned}$$

В последнем интеграле разобьем область интегрирования $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$ на три части: $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_{i-1}^* + \tau]$, $[\lambda_{i-1}^* + \tau, \lambda_i^* - \tau]$, $[\lambda_i^* - \tau, \lambda_i^*)$, где $0 < \tau < 1$ и выбрано так, чтобы $x_i \in [\lambda_{i-1}^* + \tau, \lambda_i^* - \tau]$. Поскольку на интервале $(\lambda_{i-1}^*, \lambda_i^*)$ функция $S(x)$ принимает наибольшее значение в единственной точке x_i , то, в силу утверждения 2.1, несобственные интегралы по первому и третьему промежуткам экспоненциально малы по сравнению с $e^{nS(x_i)}$. Асимптотика интеграла по отрезку $[\lambda_{i-1}^* + \tau, \lambda_i^* - \tau]$ вычисляется по формуле (2.2), если положить в ней $f(x) = x^{\gamma-1} e^{-zx}$. Поэтому при $n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} I_j^i(z) &= (-1)^{kn+(i+1)n} \sqrt{-\frac{2\pi}{nS''(x_i)}} \times \\ &\times e^{nS(x_i)} x_i^{\gamma-1} e^{-zx_i} (1 + O_i(1/n)). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенств (2.4), (2.5) следует (2.3). Лемма 2.1 доказана.

Утверждения теоремы 1.2 легко получить, опираясь на лемму 2.1. Для этого нужно воспользоваться равенствами (0.2) и учесть, что при $n = m_1 = m_2 = \dots = m_k$ и $n \rightarrow +\infty$ из (0.6) следует, что

$$\tilde{Q}_m(z) = \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{k+1} z\right\} (1 + o(1)).$$

Теорема 1.2 доказана.

В заключении заметим, что при целых $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ теорема 1.1 позволяет получать эффективные

оценки для совместных приближений рациональными числами значений показательной функции $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_k}$. В этом смысле полученные результаты могут быть полезными в теории диофантовых приближений [39].

ЛИТЕРАТУРА

1. Прудников, А.П. Интегралы и ряды / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. – М. : Наука, 1981.
2. *Hermite, C.* Sur la fonction exponentielle / C. Hermite // C.R. Akad. Sci. (Paris) – 1873. – Vol. 77. – P. 18–293.
3. *Бейкер, Дж.* Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения / Дж. Бейкер мл., П. Грейвс-Моррис. – М. : Мир, 1986.
4. *Никишин, Е.М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность / Е.М. Никишин, В.Н. Сорокин. – М. : Наука, 1988.
5. *Аптекарев, А.И.* Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены / А.И. Аптекарев, В.И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402) – С. 37–122.
6. *Аптекарев, А.И.* Аппроксимации Эрмита-Паде и ансамбли совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, А.Э. Койзлаарс // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66, № 6 (402) – С. 123–190.
7. *Суетин, С.П.* Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда / С.П. Суетин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 1 – С. 45–142.
8. *Boyd, J.P.* Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: a Chebyshev-Hermite-Pade method / J.P. Boyd // J. of Comput. and Appl. Math. – 2009. – Vol. 223, № 2 – P. 693–702.
9. *Beckermann, B.* How well does the Hermite-Pade approximation smooth the Gibbs phenomenon? / B. Beckermann, V. Kalyagin, Ana C. Matos, F. Wielonsky // Math. Comput. – 2011. – Vol. 80, № 274. – P. 931–958.
10. *Сорокин, В.Н.* Циклические графы и теорема Аперри / В.Н. Сорокин // Успехи матем. наук. – 2002. – Т. 57, № 3 – С. 99–134.
11. *VanAssche, W.* Continued fractions: from analytic number theory to constructive approximation / W. VanAssche // Contemp. Math., Amer. Math. Soc. – 1999. – Vol. 236. – P. 325–342.
12. *Аптекарев, А.И.* Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения. Сборник статей. Совр. пробл. матем. Т. 9 / А.И. Аптекарев (ред.) – М. : МИАН, 1988.
13. *Калягин, В.А.* Аппроксимации Эрмита-Паде и спектральный анализ несимметричных операторов / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1994. – Т. 185, № 6. – С. 79–100.
14. *Aptekarev, A.I.* Higher-order three-term recurrences and asymptotics of multiple orthogonal polynomials / A.I. Aptekarev, V.A. Kalyagin, E.B. Saff // Constr. Approx. – 2009. – Vol. 30, № 2. – P. 175–223.
15. *Bleher, P.M.* Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials / P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Int. Math. Res. Not. – 2004. – Vol. 3. – P. 109–129.
16. *Aptekarev, A.I.* Large n limit of Gaussian random matrices with external source, Part II / A.I. Aptekarev, P.M. Bleher, A.B.J. Kuijlaars // Comm. Math. Phys. – 2005. – Vol. 259, № 2. – P. 367–389.
17. *Аптекарев, А.И.* Глобальный режим распределения собственных значений случайных матриц с ангармоническим потенциалом и внешним источником / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // ТМФ. – 2009. – Т. 159, № 1. – С. 34–57.
18. *Клейн, Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. Т.1 / Ф. Клейн. – М. : Наука, 1933.
19. *Аптекарев, А.И.* О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент / А.И. Аптекарев // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.
20. *Perron, O.* Die Lehre von den Kettenbrüchen / O. Perron. – Leipzig-Berlin : Teubner, 1929.
21. *Аптекарев, А.И.* Об аппроксимациях Паде к набору $\{ {}_1F_1(1, c; \lambda_i z) \}_{i=1}^k$ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 1981. – № 2. – С. 58–62.
22. *Старовойтов, А.П.* Аппроксимации Паде функций Миттаг-Леффлера / А.П. Старовойтов, Н.А. Старовойтова // Матем. сборник. – 2007. – Т. 198, № 7. – С. 109–122.
23. *Braess, D.* On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^x , II / D. Braess // J. Approx. Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.
24. *Калягин, В.А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности / В.А. Калягин // Матем. сборник. – 1979. – Т. 110 (152), № 4. – С. 609–627.
25. *Гончар, А.А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов // Тр. МИАН СССР. – 1981. – Т. 157. – С. 31–48.
26. *Гончар, А.А.* Об аппроксимациях Эрмита-Паде для систем функций марковского типа / А.А. Гончар, Е.А. Рахманов, В.Н. Сорокин // Матем. сборник. – 1997. – Т. 188, № 5. – С. 33–58.
27. *Никишин, Е.М.* Совместные аппроксимации Паде / Е.М. Никишин // Матем. сборник. – 1980. – Т. 155, № 4. – С. 499–519.
28. *Никишин, Е.М.* Асимптотика линейных форм для совместных аппроксимаций Паде / Е.М. Никишин // Изв. вузов. Сер. матем. – 1986. – № 2. – С. 33–41.

29. Бустаманте, Ж. Аппроксимации Эрмита-Паде для системы Никишина аналитических функций / Ж. Бустаманте, Лопес Г. Лагомасино // Матем. сборник. – 1992. – Т. 183, № 11. – С. 117–138.
30. Driver, K. Normality in Nikishin systems / K. Driver, H. Stahl // Indag. Math. (N.S.). – 1994. – Vol. 5, № 2. – P. 161–187.
31. Driver, K. Simultaneous rational approximants to Nikishin systems. I / K. Driver, H. Stahl // Acta Sci. Math. – 1995. – Vol. 60. – P. 245–263.
32. Driver, K. Simultaneous rational approximants to Nikishin systems. II / K. Driver, H. Stahl // Acta Sci. Math. – 1995. – Vol. 61. – P. 261–284.
33. Аптекарев, А.И. Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско / А.И. Аптекарев // Матем. сборник. – 1988. – Т. 136 (178), № 1. – С. 56–84.
34. Аптекарев, А.И. Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для системы Никишина / А.И. Аптекарев // Матем. сборник. – 1999. – Т. 190, № 5. – С. 3–44.
35. Аптекарев, А.И. Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита-Паде / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов // Матем. сборник. – 2010. – Т. 201, № 2. – С. 29–78.
36. Аптекарев, А.И. Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов / А.И. Аптекарев, В.Г. Лысов, Д.Н. Туляков // Матем. сборник. – 2011. – Т. 202, № 2. – С. 3–56.
37. Рябченко, Н.В. Эрмитовская аппроксимация двух экспонент / Н.В. Рябченко, А.П. Старовойтов, Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 97–100.
38. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989.
39. Шмидт, В. Диофантовы приближения / В. Шмидт. – М. : Мир, 1983.

Поступила в редакцию 23.01.13.