Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины»

Ковалькова Д. П.,
Скиба А. Н.

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ S-КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Сентябрь 2010 Препринт N 5

Гомель
УО «ГГУ им. Ф. Скорины»
2010

Содержание

1. Введение....4

2. Предварительные результаты....6

3. Доказательство теоремы....27

4. Список литературы....28

1 Введение

Все рассматриваемые в данной работе группы являются конечными. В дальнейшем p, q и r — попарно различные простые числа, P, Q и R обозначают некоторые силовскую p-подгруппу, силовскую q-подгруппу и силовскую r-подгруппу группы G, соответственно.

Напомним, что подгруппа H группы G называется *2-максимальной подгруппой* (или *второй максимальной подгруппой*) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и т.д. Максимальной цепью длины n группы G называется всякая цепь вида $E_n < E_{n-1} < \ldots < E_1 < E_0 = G$, где E_i является максимальной подгруппой в E_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Связь между n-максимальными подгруппами (где $n > 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранние результаты в данном направлении были получены Редеи [1], описавшим неразрешимые группы с абелевыми вторыми максимальными подгруппами, и Хуппертом, установившим в работе [2] сверхразрешимость групп, в которых все вторые максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, коммутант G' группы G нильпотентен и порядок каждого главного фактора группы G делится не более, чем на два (необязательно различных) простых числа. Эти результаты получили свое дальнейшее развитие и в работе Л.Я. Полякова [3], который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами. В работе [4] Агравалем была доказана *сверхразрешимость группы при условии, что все ее 2-максимальные подгруппы S-квазинормальны* (подгруппа H группы G называется S-квазинормальной в G, если H перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G). В более поздней работе [5] М. Асааду удалось усилить отмеченные выше результаты Хупперта, рассматривая лишь строго n-максимальные подгруппы для $n = 2, 3$. Заметим попутно, что в работе П. Флавелла [6] была найдена точная верхняя граница числа максимальных подгрупп группы, содержащих строго 2-максимальную подгруппу, и описаны группы, в которых эта граница достигается.

В последние годы получен ряд новых интересных результатов о вторых и третьих максимальных подгруппах. В недавней публикации [7] Ли Широнг получил классификацию ненильпотентных групп, каждая 2-максимальная подгруппа которой является TI-подгруппой. В работе [8] Го Шуин и К.П. Шам доказали разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования. В работах [9, 10, 11] Го

Веньбинем, Ли Баоджуном, А.Н. Скибой и К.П. Шамом были получены новые характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. В работе [12] получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 2-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами, а в работе [13] получено описание групп, в которых каждая максимальная перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами.

В связи с отмеченными выше результатами Хупперта и Аграваля, Л.А. Шеметковым в 2005 году на Гомельском городском алгебраическом семинаре были поставлены следующие задачи: 1) что можно сказать о строении разрешимой группы, если в каждой ее максимальной цепи длины n имеется собственная S-квазинормальная подгруппа? 2) установить точное строение конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины два имеется собственная S-квазинормальная подгруппа; 3) установить точное строение конечных групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная S-квазинормальная подгруппа. Вторая их этих трех задач была решена в работе [14]. Третья из этих трех задач частично была решена в работе [15], в которой было получено полное описание групп, у которых все 3-максимальные подгруппы S-квазинормальны. Полное решение такой задачи дает следующая, доказанная в данной работе теорема.

Теорема. *В том и только в том случае в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S-квазинормальная в G подгруппа, когда G либо нильпотентна, либо $|G| = p^{\alpha}q^{\beta}r^{\gamma}$, где $\alpha + \beta + \gamma \leq 3$, либо G является группой одного из следующих типов:*

I. $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ — нильпотентный корадикал группы G, и либо G — группа Шмидта с $|\Phi(P)| \leq p$ и $|Q : Q_G| = q$, либо P является минимальной нормальной подгруппой в G и выполняется одно из следующих условий:

(1) $|Q : Q_G| = q^2$;

(2) $|Q : Q_G| = q$ и любая максимальная подгруппа L из Q, отличная от Q_G, является циклической и $|L : L_G| = q$.

II. $G = P \rtimes (QR)$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ является минимальной нормальной подгруппой в G, $|R| = r$, $Q = \langle a \rangle$ — циклическая группа и либо R нормальна в G, либо $|Q| = q$;

III. $G = P \rtimes Q = PA$, $|\Phi(P)| = p$, $A = \Phi(P) \rtimes Q$ — представитель единственного класса максимальных ненормальных подгрупп группы G. A — группа Шмидта и $|Q : Q_G| = q$;

IV. $\Phi(P) = 1$, G является подпрямым произведением ненормальных максимальных подгрупп A и B, где $A = S \rtimes Q$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, S — минимальная нормальная подгруппа в G и $|Q : Q_G| = q$; $B = D \rtimes Q$ и либо B — нильпотентная группа и $|D| = p$, $D \leq Z(G)$, либо B — группа Шмидта, изоморфная A.

V. $G = P \rtimes (QR)$ и G имеет в точности три класса максимальных под-

групп, представителями которых являются ненормальная холловская r'-подгруппа A, ненормальная холловская p'-подгруппа L и нормальная в G подгруппа M с $|G : M| = q$. Кроме того, выполняются следующие условия:

(i) A — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и $|Q : Q_G| = q$;

(ii) L либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппамиб либо нильпотентной группой;

(iii) P является минимальной нормальной подгруппой в G, $|R| = r$ и либо R нормальна в G, либо $|Q| = q$.

Следующий простой пример показывает, что класс групп, у которых в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная S-квазинормальная подгруппа, шире класса групп, у которых все 3-максимальные подгруппы S-квазинормальны.

Пример. Пусть P — циклическая группа порядка 3^3. Тогда $Aut(P)$ имеет циклическую подгруппу Q порядка 13. Следовательно, мы можем рассмотреть группу $G = P \rtimes Q$. Очевидно, что G является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, т.е. G — группа типа I в теореме. Так как P является минимальной нормальной подгруппой в G, то, очевидно, в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S-квазинормальная подгруппа, но любая 3-максимальная подгруппа порядка 3 не S-квазинормальна в G.

Используемая в статье терминология стандартна и при необходимости мы отсылает читателя к работам [16, 17].

2 Предварительные результаты

В дальнейшем p, q и r — простые делители порядка группы G ($p \neq q$), P, Q и R обозначают некоторые силовскую p-подгруппу, силовскую q-подгруппу и силовскую r-подгруппу группы G, соответственно.

Лемма 2.1. *Пусть G — группа. Тогда*

(1) если в G нет 3-максимальных подгрупп, то $|G| \in \{p, pq\}$;

(2) если $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma = 3$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), то $|G| = pqr$ и 1 является единственной 3-максимальной подгруппой в G;

(3) если $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma < 3$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), то в G нет 3-максимальных подгрупп.

Доказательство. (1) Очевидно, что если в G также нет 2-максимальных подгрупп, то $|G| = p$. Если же в G имеется 2-максимальная подгруппа, то она тривиальна и все максимальные подгруппы имеют простой порядок. Если $G = P$, то, очевидно, $|G| = p^2$. Пусть $G \neq P$. Тогда $|P| = p$ и P является максимальной подгруппой в G. Значит, по [19, глава IV, теорема 7.4], G

разрешима. Следовательно, $|G : P| = q^a$ для некоторого $a \in \mathbb{N}$. Но, в свою очередь, $|Q| = q$ и Q — максимальная подгруппа в G. Значит, $|G| = pq$.

(2)-(3) Покажем, что G разрешима. Если $|G| = p^\alpha$, то это очевидно. Если $|G| = pqr$, где p, q, r — попарно различные простые числа, то все силовские подгруппы группы G цикличны и, по [19, глава IV, предложение 2.9], G является разрешимой группой. Наконец, если $|G| = p^\alpha q$, то G разрешима по теореме Бернсайда [17, глава I, п.2]. Значит, индекс любой максимальной подгруппы из G есть степень простого числа и поэтому, очевидно, либо 1 является единственной 3-максимальной подгруппой в G, либо в G нет 3-максимальных подгрупп. Лемма доказана.

В дальнейшем, ввиду леммы 2.1, мы будем предполагать, что $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma > 3$ для $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Более того, начиная с этого момента и до конца данного раздела, G — ненильпотентная группа, у которой в каждой максимальной цепи длины три имеется собственная S-квазинормальная в G подгруппа.

Лемма 2.2. *Пусть A — группа, $H \leq K \leq A$ и $B \leq A$. Тогда*

(1) Если H S-квазинормальна в A, то H субнормальна в A [18, теорема 1].

(2) Если H является S-квазинормальной в A, то H является S-квазинормальной в K [18, теорема 1].

(3) Пусть H является нормальной подгруппой группы A. Тогда K/H S-квазинормальна в A/H тогда и только тогда, когда K S-квазинормальна в A [18, теорема 1].

(4) Если H S-квазинормальна в A и H — p-группа, то $O^p(A) \subseteq N_A(H)$ [20, лемма A].

(5) Если H и B S-квазинормальны в A, то $< H, B >$ — S-квазинормальная подгруппа группы A.

Лемма 2.3. *Если N — нормальная подгруппа группы G и в G/N имеется 3-максимальная подгруппа, то в каждой максимальной цепи длины три этой фактор-группы имеется собственная S-квазинормальная в G/N подгруппа.*

Доказательство. Предположим, что в G/N имеется максимальная цепь $L_3/N < L_2/N < L_1/N < L_0/N = G/N$ длины три, где L_i/N является максимальной подгруппой в L_{i-1}/N, $i = 1, 2, 3$. Тогда цепь $L_3 < L_2 < L_1 < L_0 < G$ является максимальной цепью длины три в группе G, где L_i является максимальной подгруппой в L_{i-1}, $i = 1, 2, 3$. Значит, по условию, одна из подгрупп L_1, L_2, L_3 является S-квазинормальной в G. Следовательно, по лемме 2.2(3), одна из подгрупп L_1/N, L_2/N, L_3/N является S-квазинормальной в G/N. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть A — группа, $H \leq K \leq A$ и $B \leq A$. Тогда*

(1) Если H и B субнормальны в A, то $< H, B >$ — субнормальная подгруппа группы A [17, теорема 14.4].

(2) Если H субнормальна в A и H — π-подгруппа группы A, то $H \leq O_\pi(G)$ [23].

(3) Пусть N — нормальная подгруппа в A. Если H субнормальна в A, то HN/N субнормальна в A/N [17, лемма 14.1].

Лемма 2.5. *В том и только в том случае в каждой максимальной цепи длины два группы G имеется собственная S-квазинормальная в G подгруппа, когда G — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. Пусть L — произвольная максимальная подгруппа группы G. Если L является S-квазинормальной в G, то, по лемме 2.2(1), L нормальна в G. Если же L не S-квазинормальна в G, то все максимальные подгруппы из L являются S-квазинормальными в G и поэтому, по лемме 2.2(5), L — циклическая примарная группа. Следовательно, по [19, глава IV, теорема 7.4], G разрешима.

Значит, по теореме 24.2 из [16, гл. VI], относительно группы G выполнены следующие условия:

1) $G^{\mathfrak{N}}$ является p-группой;

2) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор группы G;

3) любые две ненормальные максимальные подгруппы группы G сопряжены в G.

Покажем, что $G^{\mathfrak{N}}$ — силовская подгруппа в G. Воспользуемся индукцией по $|G|$. Если $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) \neq 1$, то по лемме 2.3, условие леммы выполняется в $G/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ и поэтому $(G/\Phi(G^{\mathfrak{N}}))^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — силовская подгруппа в $G/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ по индукции. Значит, $G^{\mathfrak{N}}$ — силовская подгруппа в G. Поэтому мы можем считать, что $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$. Так как $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор и $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$, то $G^{\mathfrak{N}}$ является минимальной нормальной подгруппой в G. Так как G — ненильпотентная группа, то $G^{\mathfrak{N}} \nsubseteq \Phi(G)$ и, следовательно, существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes M$. Понятно, что M является ненормальной подгруппой в G. Следовательно, $|M| = s^a$ для некоторого простого числа $s \neq p$ и, значит, $P = G^{\mathfrak{N}}$.

Пусть M — максимальная ненормальная подгруппа в G. Тогда M является циклической примарной группой и поэтому, не теряя общности, можем считать, что $M = Q$. Заметим, что $\Phi(P) = 1$. Действительно, поскольку P нормальна в G, то $\Phi(P) \leq \Phi(G) \leq Q$, что возможно, лишь если $\Phi(P) = 1$. Таким образом, $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ — минимальная нормальная подгруппа в G и Q — максимальная циклическая подгруппа в G. Очевидно, что Q не S-квазинормальна в G. Действительно, в противном случае, по лемме 2.2(1), Q субнормальна в G и, следовательно, нормальна в G. Таким образом, Q не S-квазинормальна в G. Следовательно, максимальная подгруппа Q_1 из Q является S-квазинормальной в G. Значит, по лемме 2.2(1), Q_1 субнормальна в G. Поэтому Q_1 субнормальна в PQ_1 и, следовательно, нормальна в ней. С другой стороны, Q_1 нормальна в Q. Следовательно, Q_1 является нормальной подгруппой в G.

Допустим, что в G имеется максимальная ненильпотентная подгруппа L. Тогда $L = P \leftthreetimes Q_1 = P \times Q_1$, где $Q_1 = Q_G$, ввиду леммы 2.9, т.е. L — нильпотентная группа. Полученное противоречие показывает, что G — группа Шмидта. А так как $\Phi(P) = 1$, то P абелева группа.

Достаточность очевидна.

Лемма 2.6. *Любая ненормальная максимальная подгруппа группы G является либо нильпотентной группой, либо группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.*

Доказательство. Пусть A — максимальная ненормальная подгруппа группы G. Тогда, по лемме 2.2(1), A не S-квазинормальна в G. Значит, по лемме 2.2(2), в каждой максимальной цепи длины два группы A имеется собственная S-квазинормальная в A подгруппа. Тогда, по лемме 2.5, A является либо нильпотентной группой, либо группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Напомним некоторые свойства групп Шмидта, необходимые в наших доказательствах ([17, гл. VII, теорема 6.18]).

Лемма 2.7. *Если A — группа Шмидта, то*

(1) $A = P \leftthreetimes < a >$, где P, $< a >$ — силовские p-подгруппа и q-подгруппа, соответственно;

(2) A имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы $P < a^q >$ и $P^{'} < a >$;

(3) $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы A;

(4) если P абелева, то P элементарна;

(5) $\Phi(A) = Z(A) = P' \times < a^q >$.

Лемма 2.8. *Если $M = S \leftthreetimes T$ — ненормальная максимальная подгруппа группы G, которая является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, где S — силовская s-подгруппа из M, T — силовская t-подгруппа из M для некоторых простых s, t и T является силовской подгруппой в G, то $|T : T_G| = t$.*

Доказательство. Так как M — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, то, по лемме 2.7, T является максимальной подгруппой в M. Очевидно, что T не S-квазинормальна в G. Значит, по условию, максимальная подгруппа из T является S-квазинормальной в G и поскольку T — силовская подгруппа в G, то, по лемме 2.2(4), максимальная подгруппа из T совпадает с T_G. Следовательно, $|T : T_G| = t$.

Следующая лемма хорошо известна (см., например,)

Лемма 2.9 *Пусть A — группа и M — максимальная подгруппа группы A. Если L субнормальна в A и $L \subseteq M$, то $L \subseteq M_A$.*

Лемма 2.10 *Пусть M — максимальная подгруппа группы G. Тогда любая 2-максимальная подгруппа из M содержится в M_G. В частности, $|M : M_G| \in$*

$\{1, p, pq\}$

Доказательство. Предположим, что M — ненормальная в G подгруппа. Тогда M не является S-квазинормальной подгруппой в G. Пусть E_1 — максимальная подгруппа в M и E_2 — максимальная подгруппа в E_1. Если E_1 S-квазинормальна в G, то, по лемме 2.2(1), E_1 субнормальна в G и, ввиду леммы 2.9, $E_2 \subseteq E_1 = M_G$. Если E_2 S-квазинормальна в G, то аналогично заключаем, что $E_2 \subseteq M_G$. Следовательно, каждая максимальная подгруппа из M/M_G имеет простой порядок и поэтому $|M/M_G| = pq$ для некоторых (не обязательно различных) простых p и q. Лемма доказана.

Лемма 2.11 ([20, предложение B]) *Пусть H — нильпотентная подгруппа группы A. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) H S-квазинормальна в A;

(2) каждая силовская подгруппа группы H S-квазинормальна в A.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.12 *Пусть $\mathfrak{A}^*$ — класс всех абелевых групп, у которых экспоненты не содержат кубов простых чисел. Тогда $\mathfrak{A}^*$ — формация.*

Лемма 2.13. *G разрешима и $G/F(G)$ — абелева группа, порядок которой не содержит кубов простых чисел.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}^*$ — класс всех абелевых групп, у которых экспоненты не содержат кубов простых чисел. Тогда, по лемме 2.12, $\mathfrak{A}^*$ является формацией. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}^*$ — класс всех групп, являющихся расширением нильпотентных групп при помощи групп из $\mathfrak{A}^*$. Согласно [16, с.36], $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.

Предположим, что лемма неверна и G — контрпример минимального порядка. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа в G. Покажем, что $G/N \in \mathfrak{F}$. Если в G/N нет 3-максимальных подгрупп или же если $|G/N| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где $\alpha + \beta + \gamma < 3$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, то, по лемме 2.1(1)(3), $G/N \in \mathfrak{F}$. С другой стороны, если в G/N имеется 3-максимальная подгруппа, то условие леммы выполняется для G/N по лемме 2.3 и поэтому $G/N \in \mathfrak{F}$ по выбору группы G. Следовательно, N — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $N \not\subseteq \Phi(G)$, так как $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация.

Пусть M — такая максимальная подгруппа в G, что $N \not\subseteq M$. Тогда $M_G = 1$ и $G = NM$. Докажем, что группа G разрешима. Для этого нам достаточно показать, что N — абелева группа. Предположим, что это не так. Тогда для каждой разрешимой подгруппы L из G имеет место $L_G = 1$.

Пусть p — наименьший простой делитель порядка группы N. Ввиду теоремы Томпсона-Фейта о разрешимости групп нечетного порядка, $p = 2$. Пусть N_2 — силовская 2-подгруппа в N и G_2 — силовская 2-подгруппа в G, содержащая N_2. Тогда $G_2 \subseteq N_G(N_2)$ и $N_G(N_2) \neq G$. Следовательно, в G найдется такая максимальная подгруппа E, что $EN = G$ и $G_2 \subseteq E$. Понятно, что $E_G = 1$ и поэтому подгруппа E не является S-квазинормальной в G, по лемме 2.2(1).

Прежде предположим, что E нильпотентна и все максимальные подгруппы из E являются S-квазинормальными в G. Тогда, ввиду леммы 2.2(5), E — циклическая примарная группа, так как E не является S-квазинормальной в G. Таким образом, максимальная подгруппа E_1 из E является S-квазинормальной подгруппой в G. По лемме 2.2(1) и по лемме 2.9, $E_1 \subseteq E_G = 1$. Значит, $|E| = p$ и поэтому, ввиду [19, глава IV, теорема 7.4], G разрешима. Пусть теперь E имеет максимальную подгруппу E_1, которая не S-квазинормальна в G. Тогда если E_2 — максимальная подгруппа в E_1, то E_2 является S-квазинормальной подгруппой в G и, по лемме 2.2(1) и по лемме 2.9, $E_2 \subseteq E_G = 1$, т.е $|E_1| = t$ для некоторого простого числа t. А так как E нильпотентна и $G_2 \subseteq E$, то $|E| = pt$. Значит, по [19, глава IV, теорема 7.4], G разрешима.

Пусть теперь E ненильпотентна. По лемме 2.2(2) в каждой максимальной цепи длины два группы E имеется собственная S-квазинормальная в E подгруппа. Значит, по лемме 2.5, $E = S \rtimes T$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами S и T. Пусть S — s-группа и T — t-группа, где s и t — простые числа. Предположим, что $t = p = 2$. Тогда $T^x = G_2$ — циклическая группа для некоторого $x \in G$. Значит, группа G является 2-нильпотентной ввиду [21, теорема 10.1.8]. Это противоречит нашему предположению о группе G. Следовательно, $S = G_2$. Тогда T является максимальной ненормальной подгруппой в E и, если T_1 — максимальная подгруппа в T, то T_1 является S-квазинормальной подгруппой в G. Откуда, по леммам 2.2(1) и 2.9, получаем, что $T_1 \subseteq E_G = 1$ и поэтому $|T| = t$. Откуда следует, что S — максимальная подгруппа в E. Предположим вначале, что S является S-квазинормальной подгруппой в G. Тогда, по леммам 2.2(1) и 2.9, $S \subseteq E_G = 1$. Поэтому S не является S-квазинормальной подгруппой в G. Если S_1 — максимальная подгруппа в S, то, по условию, S_1 является S-квазинормальной подгруппой в G и, по леммам 2.2(1) и 2.9, $S_1 \subseteq E_G = 1$, т.е $|S| = s$. Но тогда E является нильпотентной группой по [21, теорема 10.1.9], что противоречит нашему предположению о подгруппе E. Таким образом, группа G является разрешимой и поэтому, не теряя общности, мы можем считать, что N — p-группа, а поскольку $M_G = 1$, то согласно [17, гл.A, теорема 15.2], $G = N \rtimes M$ и $N = C_G(N) = O_p(G) = F(G)$. Значит, $O_p(G/N) = 1$, что влечет $O_p(M) = 1$

По лемме 2.10, $|M| \in \{s, st\}$, где s, t — простые (не обязательно различные) числа. Но ввиду выбора группы G, подгруппа M не является абелевой. Значит, $|M| = st$, где $s \neq t$. Тогда, по крайней мере, одна из силовских подгрупп группы M нормальна в ней. Не теряя общности, мы можем считать, что $M = C_s \rtimes C_t$, где C_s, C_t — s-подгруппа простого порядка и t-подгруппа простого порядка группы M, соответственно. Тогда, $G = N \rtimes (C_s \rtimes C_t)$ и $C_s = C_{C_sC_t}(C_s)$. Заметим, что если $s = p$, то $O_p(M) \neq 1$. Полученное противоречие показывает, что $s \neq p$. Допустим, что $p = t$. Тогда, не теряя общности, мы можем считать, что $NC_t = NC_p = P$ — максимальная подгруппа в G. Покажем, что P не S-квазинормальна в G. Допустим обратное. Тогда, по лемме 2.2(1), P субнормальна в G и поэтому $P \subseteq F(G) \subseteq C_G(N) = N$. Данное противоречие показывает, что подгруппа P не S-квазинормальна в G.

Так как N — нормальная подгруппа группы P, то в ней имеется максимальная подгруппа N_1 такая, что N_1 нормальна в P. Тогда N_1C_p — максимальная подгруппа в P. Допустим, что N_1C_p является S-квазинормальной подгруппой в G. Тогда, по лемме 2.2(1), N_1C_p субнормальна в G и, по лемме 2.4(2), $N_1C_p \subseteq O_p(G) = N$, противоречие. Значит, N_1C_p не S-квазинормальна в G. Тогда любая максимальная подгруппа из N_1C_p является S-квазинормальной в G. Значит, ввиду леммы 2.2(5), N_1C_p — циклическая p-группа, так как N_1C_p не S-квазинормальна в G. Откуда следует, что $N_1C_p = C_p$ и, значит, $N_1 = 1$. Таким образом, $|N| = p$. Но тогда $G/C_G(N) = G/N \simeq M$ — циклическая группа. Полученное противоречие показывает, что $p \neq t$. Пусть $L = N \rtimes C_s$ и $C = C_L(C_t)$. Тогда $C = N_0 \rtimes S_0$, где N_0 — подгруппа из N, S_0 — подгруппа из C_s^x для некоторого $x \in L$. Так как $N = C_G(N)$ и $p \neq s$, то C_s ненормальна в L. Значит, L — ненильпотентная группа. Следовательно, $C \neq 1$ по [21, теорема 10.5.4]. Кроме того, $N \rtimes C_s = N \rtimes C_s^x$. Значит, $N \rtimes C_s^x$ также не является нильпотентной группой. Так как $C \neq 1$, то либо $N_0 \neq 1$, либо $S_0 \neq 1$. Предположим, что $N_0 \neq 1$. Если $N_0 = N$, то $C = N \rtimes S_0$. Откуда получаем, что $N \subseteq C_L(C_t)$ и, следовательно, $C_t \subseteq C_G(N) = N$. Полученное противоречие показывает, что $N_0 \neq N$. Значит, по теореме Машке, $N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_l$, где N_i — минимальная нормальная подгруппа в L для всех $i = 1, 2, \ldots, l$ и $l > 1$. Так как $(NC_t) \cap (C_s \rtimes C_t) = C_t(N \cap C_s \rtimes C_t) = C_t$, то NC_t ненормальна в G. Очевидно, что NC_t — максимальная не S-квазинормальная подгруппа в G. Тогда, по лемме 2.6, NC_t либо нильпотентна, либо является группой Шмидта. Значит, максимальная подгруппа $(N_2 \times N_3 \times \cdots \times N_l) \rtimes C_t$ из NC_t нильпотентна. Если $(N_2 \times N_3 \times \cdots \times N_l) \rtimes C_t$ является S-квазинормальной в G, то, по лемме 2.11, C_t является S-квазинормальной в G. Значит, по лемме 2.2(1), C_t субнормальна в G и, следовательно, C_t нормальна в G, противоречие. Значит, $(N_2 \times N_3 \times \cdots \times N_l) \rtimes C_t$ не S-квазинормальна в G. Следовательно, по условию, максимальная подгруппа $(N_3 \times \cdots \times N_l) \rtimes C_t$ из $(N_2 \times N_3 \times \cdots \times N_l) \rtimes C_t$ является S-квазинормальной подгруппой в G. Откуда, как и выше, следует нормальность подгруппы C_t. Полученное противоречие показывает, что $N_0 = 1$ и поэтому $S_0 \neq 1$. Значит, $S_0 = C_s^x$. А так как $C_s^x \subseteq C_G(C_t)$, то $C_t \subseteq C_G(C_s^x)$. Откуда следует, что $C_tC_s^x = C_t \times C_s^x$ — нильпотентная группа. А так как $C_t \times C_s^x$ — холловская p'-подгруппа группы G и все холловские p'-подгруппы сопряжены в G [17, глава I, теорема 3.3], то $C_s \rtimes C_t$ — нильпотентная группа, что противоречит исходному допущению о группе G. Значит, $p = t$ и поэтому M — абелева группа. А поскольку $|M| \in \{s, st\}$, то ее порядок не содержит кубов простых чисел. Таким образом, $M \in \mathfrak{A}^*$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}^*$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Пусть $E_n \leq E_{n-1} \leq \ldots \leq E_1 \leq E_0 = A$ — цепь подгрупп группы A. Тогда число n будем называть длиной этой цепи.

Символом $l_m(A)$ обозначим наибольшую из длин максимальных цепей группы A.

Лемма 2.14. *Если A — разрешимая группа, то $l_m(A) \geq |\pi(A)|$.*

Доказательство. Пусть $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ — множество всех простых делителей порядка группы A. Если $n = 1$ и $|A| = p^r$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$, то $l_m(A) = n \geq 1$. Пусть $n > 1$ и $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — некоторая силовская система группы A. Рассмотрим цепь $1 < P_1 < P_1P_2 < \ldots < P_1P_2 \ldots P_n = A$. Понятно, что длина этой цепи равна n и поэтому $l_m(A) \geq |\pi(A)|$. Лемма доказана.

Лемма 2.15. *Предположим, что группа A разрешима и в каждой максимальной цепи длины n группы A имеется собственная субнормальная в A подгруппа. Если $|\pi(A)| > n$, то группа A нильпотентна.*

Доказательство. Предположим, что данная лемма неверна и пусть A — контрпример минимального порядка. Тогда $n > 1$. Действительно, если $n = 1$, то, очевидно, все максимальные подгруппы группы A нормальны. Значит, A нильпотентна, что противоречит выбору группы A.

Прежде покажем, что A/N является нильпотентной группой для любой минимальной нормальной подгруппы N группы A. Так как $|\pi(A)| > n$, то $|\pi(A/N)| > n - 1$. Значит, по лемме 2.14, $l_m(A/N) > n - 1$. Следовательно, в A/N имеется максимальная цепь длины n и поэтому, по лемме 2.4(3), в каждой такой цепи имеется собственная субнормальная в A/N подгруппа, т.е. условие леммы выполняется в A/N и поэтому A/N нильпотетна по выбору группы A. А так как A не является нильпотентной группой, то $N \nleq \Phi(A)$ и N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы A. Значит, в A имеется такая максимальная ненормальная подгруппа M, что $A = N \rtimes M$ и $M_A = 1$. Заметим, что либо $|\pi(M)| = |\pi(A)|$, либо $|\pi(M)| = |\pi(A)| - 1$. Значит, $|\pi(M)| > n - 1$. Откуда, по лемме 2.14, следует, что $l_m(M) \geq |\pi(M)| > n - 1$. Итак, в M имеется максимальная цепь

$$M_{n-1} < M_{n-2} < \ldots < M_1 < M_0 = M, \tag{1}$$

в которой M_{n-1} — неединичная n-максимальная подгруппа в A. А так как M не является субнормальной подгруппой в A, то, по условию, в цепи (1) имеется такая подгруппа L, которая субнормальна в A. Но, по лемме 2.9, $L \subseteq M_A = 1$ и поэтому $L = M_{n-1} = 1$. Полученное противоречие показывает, что A — нильпотентная группа. Лемма доказана.

Следствие 2.16[24, теорема 5]. *Предположим, что группа A разрешима* *и все n-максимальные подгруппы группы A субнормальны в A. Если $|\pi(A)| > n$, то группа A нильпотентна.*

Лемма 2.17. *Пусть $\pi(G) = \{p, q\}$. В том и только в том случае все максимальные ненормальные подгруппы группы G нильпотентны, когда $G = P \rtimes Q$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ — нильпотентный корадикал группы G и G — группа одного из следующих видов:*

(1) G — группа Шмидта, $|\Phi(P)| \leq p$ и $|Q : Q_G| = q$;

(2) P является минимальной нормальной подгруппой в G и $|Q : Q_G| = q^2$.

(3) P является минимальной нормальной подгруппой в G, $|Q : Q_G| = q$, любая максимальная подгруппа L из Q циклична и $|L : L_G| = q$.

Необходимость. Прежде заметим, что, по лемме 2.13, G разрешима. Так как все максимальные ненормальные подгруппы группы G нильпотентны, то, по теореме 24.2 из [16, гл. VI], относительно группы G выполнены следующие условия:

1) $G^{\mathfrak{N}}$ является p-группой;

2) $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор группы G;

Покажем, что $G^{\mathfrak{N}}$ — силовская подгруппа в G. Воспользуемся индукцией по $|G|$. Предположим, что $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) \neq 1$. Если в $G/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ нет 3-максимальных подгрупп, то, по лемме 2.1(1), $|G/\Phi(G^{\mathfrak{N}})| = pq$. Следовательно, условие леммы выполняется в $G/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ и поэтому $(G/\Phi(G^{\mathfrak{N}}))^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — силовская p-подгруппа в $G/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ по индукции. Значит, $G^{\mathfrak{N}}$ — силовская p-подгруппа в G. С другой стороны, если в $G/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ есть 3-максимальная подгруппа, то условие леммы выполняется в $G/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$, по лемме 2.3, и поэтому $(G/\Phi(G^{\mathfrak{N}}))^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — силовская p-подгруппа в $G/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ по индукции. Значит, $G^{\mathfrak{N}}$ — силовская p-подгруппа в G. Поэтому мы можем считать, что $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$. Так как $G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор и $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$, то $G^{\mathfrak{N}}$ является минимальной нормальной подгруппой в G. Так как G — ненильпотентная группа, то $G^{\mathfrak{N}} \nsubseteq \Phi(G)$ и, следовательно, существует максимальная подгруппа M в G такая, что $G = G^{\mathfrak{N}} \rtimes M$. Из того, что $G/G^{\mathfrak{N}} \simeq M$ следует, что M нильпотентна и, значит, силовская p-подгруппа M_p группы M нормальна в M. Значит, $M \subseteq N_G(M_p)$. Но $M_p < N_G(M_p)$ и, следовательно, $N_G(M_p) = G$. Из последнего следует, что M_p нормальна в G. Так как P имеет вид $P = G^{\mathfrak{N}} \rtimes M_p$, то P нормальна в G. Следовательно, $G^{\mathfrak{N}} = P$.

Так как $\pi(G) = \{p, q\}$, то $G = P \rtimes Q$. Поскольку группа G не является нильпотентной, то в ней имеется такая максимальная подгруппа A_1, что $|G : A_1| = p^a$ для некоторого натурального числа a и A_1 не является нормальной в G. Поэтому A_1 нильпотентна и, по лемме 2.2(1), A_1 не является S-квазинормальной в G. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q \leq A_1$. Тогда

$$A_1 = A_1 \cap G = A_1 \cap PQ = Q(A_1 \cap P).$$

Пусть $|P| = p$. Тогда P является минимальной нормальной подгруппой в G и $A_1 = Q$ — максимальная не S-квазинормальная подгруппа в G. Предположим вначале, что все максимальные подгруппы из Q являются S-квазинормальными в G. Тогда, по лемме 2.2(5), Q — циклическая группа. Очевидно, что в этом случае G имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются группы Q и PQ_1, где Q_1 — максимальная подгруппа группы Q. Если $|Q| = q$, то $|G| = pq$, что противоречит нашему исходному допущению о группе G. Значит, $|Q| > q$. Так как Q_1 является S-квазинормальной подгруппой в G, то, по лемме 2.2(1) Q_1 субнормальна в G. Значит, Q_1 субнормальна в PQ_1 и, следовательно, нормальна в ней. С другой стороны, Q_1 нормальна в Q. Следовательно, Q_1 является нормальной подгруппой в G и поэтому PQ_1 нильпотентна. Заметим также, что в этом случае, ввиду леммы 2.9, $Q_1 = Q_G$. Следовательно, G является группой Шмидта, т.е G — группа типа (1).

Предположим теперь, что в Q нет максимальных S-квазинормальных в G подгрупп. Если Q_1 — максимальная подгруппа в Q, то, ввиду условия, все максимальные подгруппы из Q_1 являются S-квазинормальными в G. Значит, по лемме 2.2(5), Q_1 — циклическая группа. Значит, максимальная подгруппа Q_2 из Q_1 характеристична в Q_1 и, следовательно, нормальна в Q. Кроме того, Q_2 нормальна в PQ_2, так как, по лемме 2.2(1), Q_2 субнормальна в G и, следовательно, субнормальна в PQ_2. Поэтому, по лемме 2.9, $Q_2 = Q_G$, что влечет $|Q : Q_G| = q^2$. Таким образом, G — группа типа (2).

Предположим теперь, что в Q все максимальные подгруппы, кроме одной подгруппы Q_1, не являются S-квазинормальными в G. Тогда, как и выше получаем, что Q_1 нормальна в G и поэтому, по лемме 2.9, $Q_1 = Q_G$. Значит, $|Q : Q_G| = q$. Заметим также, что любая максимальная не S-квазинормальные в G подгруппа L из Q является циклической, по лемме 2.2(5). Значит, если L_1 — максимальная подгруппа из L, то L_1 является S-квазинормальной в G и, как было показано выше, L_1 нормальна в G, т.е. $|L : L_G| = q$, по лемме 2.9. Таким образом, G — группа типа (3).

Пусть теперь $|P| > p$. Предположим, что $\Phi(P) = 1$. Тогда P является минимальной нормальной подгруппой в G и Q — максимальная подгруппа группы G, которая не S-квазинормальна в G, по лемме 2.2(1). Если все максимальные подгруппы из Q являются S-квазинормальными в G, то Q циклическая группа, по лемме 2.2(5), и ее максимальная подгруппа, как и выше, совпадает с Q_G, т.е. $|Q : Q_G| = q$. Значит, G является группой Шмидта и поэтому G — группа типа (1). Пусть теперь Q не является циклической группой. Если все максимальные подгруппы из Q не S-квазинормальны в G, то, по лемме 2.2(5), они цикличны. Кроме того, если Q_2 — 2-максимальная подгруппа в Q, то Q_2 является S-квазинормальной в G и, как и выше, Q_2 нормальна в G. Значит, по лемме 2.9, $Q_2 = Q_G$ и поэтому $|Q : Q_G| = q^2$.

Следовательно, G — группа типа (2). Если же все максимальные подгруппы, кроме одной подгруппы Q_1, не являются S-квазинормальными в G, то Q_1 нормальна в G и, по лемме 2.9, $Q_1 = Q_G$. Кроме того, все максимальные не S-квазинормальные в G подгруппы Q, ввиду леммы 2.2(5), являются циклическими, максимальные подгруппы которых нормальны в G, как было показано выше. Значит, G — группа типа (3).

Допустим теперь, что $\Phi(P) \neq 1$. Тогда, ввиду того, $P/\Phi(P)$ — главный фактор группы G, $A_1 = \Phi(P)Q$ — максимальная подгруппа в G, причем A_1 не S-квазинормальна в G. Так как $\Phi(P) \neq 1$, то A_1 не является циклической группой и поэтому, по лемме 2.2.(5), в A_1 имеется максимальная не S-квазинормальная в G подгруппа A_2 с $|A_1 : A_2| = p$. Тогда $Q \leq A_2$ и поэтому $A_2 = A_2 \cap A_1 = Q(A_2 \cap \Phi(P))$. Так как, по условию, все максимальные подгруппы из A_2 являются S-квазинормальными в G, то, по лемме 2.2(5), $A_2 = Q$ — циклическая группа и поэтому $|\Phi(P)| = p$. Очевидно, что в этом случае G является группой Шмидта, т.е. G — группа типа (1). Лемма доказана.

Достаточность. Очевидно, что в данном случае в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S-квазинормальная в G подгруппа.

Лемма 2.18. *Пусть $|\pi(G)| = 3$. В том и только в том случае все максимальные ненормальные подгруппы группы G нильпотентны, когда $G = P \leftthreetimes (QR)$, где $P = G^{\mathfrak{N}}$ является минимальной нормальной подгруппой в G, $|R| = r$, $Q = < a >$ — циклическая группа, $|Q : Q_G| = q$ и выполняется одно из следующих условий:*

(1) R является нормальной подгруппой в G;

(2) R ненормальна в G и $|Q| = q$.

Необходимость. Прежде заметим, что, по лемме 2.13, G разрешима. Как и выше, можно показать, что $P = G^{\mathfrak{N}}$. Поскольку группа G не является нильпотентной, то в ней найдется такая максимальная ненормальная подгруппа A_1, что $|G : A_1| = p^a$ для некоторого натурального числа a. Поэтому A_1 нильпотентна и, по лемме 2.2(1), A_1 не является S-квазинормальной в G. Если все максимальные подгруппы из A_1 являются S-квазинормальными подгруппами в G, то, по лемме 2.2(5), A_1 — циклическая примарная группа, так как A_1 не S-квазинормальна в G. Значит, $|A_1| = q^b$ для некоторого натурального числа b и поэтому $|G| = p^a q^b$, что противоречит условию. Следовательно, в A_1 имеется максимальная не S-квазинормальная в G подгруппа A_2. По условию, все максимальные подгруппы из A_2 являются S-квазинормальными подгруппами в G. Значит, по лемме 2.2(5), A_2 — циклическая примарная группа и, очевидно, A_2 не является p-группой. Поэтому, не теряя общности, мы можем считать, что $|A_2| = q^c$ для некоторого натурального числа c. Если $|A_1 : A_2| = p$, то $|G| = p^{a+1} q^c$, что противоречит условию.

Значит, $|A_1 : A_2| = r$, $|R| = r$ и $|A_2| = |Q|$. Это означает, что $A_1 \cap P = 1$, т.е. $\Phi(P) = 1$.

Таким образом, $G = P \rtimes (QR)$, $A_1 = Q^x R^y$ — максимальная ненормальная подгруппа в G для некоторых $x, y \in G$ и $A_2 = Q^z = < a >$ — 2-максимальная не S-квазинормальная в G подгруппа группы G, которая является циклической группой для некоторого $z \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $A_1 = QR$ и $A_2 = Q$. Так как $\Phi(P) = 1$ и $P = G^{\mathfrak{N}}$, то P — минимальная нормальная подгруппа группы G. Заметим также, что, если Q_1 — максимлаьная подгруппа в Q, то так как Q_1 является S-квазинормальной подгруппой в G, то, по лемме 2.2(1), Q_1 субнормальна в G. Значит, Q_1 субнормальна в PQ_1 и, следовательно, нормальна в ней. С другой стороны, Q_1 нормальна в Q. Значит, Q_1 является нормальной подгруппой в G. Следовательно, по лемме 2.9, $Q_1 = Q_G$ и поэтому $|Q : Q_G| = q$.

Если R нормальна в G, то G является группой типа (1). Пусть R не является нормальной подгруппой в G. Тогда максимальная подгруппа RQ_G из A_1 не является S-квазинормальной в G. Действительно, если RQ_G является S-квазинормальной подгруппой в G, то, по лемме 2.11, R является S-квазинормальной подгруппой в G, Откуда, по лемме 2.2(1) следует, что R субнормальна в G и, следовательно, R нормальна в G. Полученное противоречие показывает, что RQ_G не S-квазинормальна в G. Тогда все максимальнаые подгруппы из RQ_G являются S-квазинормальными в G и поэтому, по лемме 2.2(5), $RQ_G = R$ — циклическая группа. Следовательно, $|Q| = q$ и G является группой типа (2). Лемма доказана.

Достаточность. Очевидно, что в данном случае в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S-квазинормальная в G подгруппа.

Напомним, что $Z_{\mathfrak{U}}(A)$ — это наибольшая нормальная подгруппа группы A, у которой все A-главные факторы цикличны. Символом $\mathfrak{A}(p-1)$ обозначим формацию всех абелевых групп, экспоненты которых делят $p-1$ [26].

Лемма 2.19. *Пусть N — нормальная p-подгруппа группы A. Если $E \leq Z_{\mathfrak{U}}(A)$, то $(A/C_A(E))^{\mathfrak{A}(p-1)} \leq O_p(A/C_A(E))$.*

Доказательство. Пусть $1 = E_0 < E_1 < \cdots < E_t = E$ — главный ряд группы A ниже E. Пусть $C_i = C_A(E_i/E_{i-1})$ и $C = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_t$. Тогда $C_A(E) \leq C$ и, по следствию 3.3 из [22, глава 5], $C/C_A(E)$ является p-группой. С другой стороны, так как $|E_i/E_{i-1}| = p$, $A/C \in \mathfrak{A}(p-1)$. Следовательно, $(A/C_A(E))^{\mathfrak{A}(p-1)} \leq O_p(A/C_A(E))$.

В дальнейшем, A_t — силовская t-подгруппа группы A для некоторого простого числа t.

Лемма 2.20. *Пусть максимальная подгруппа A группы G является группой Шмидта вида $A = A_p \rtimes A_q$ с абелевыми силовскими подгруппами и пусть $|G : A| = p^a$ для некоторого $a \in \mathbb{N}$. Тогда A_p является минимальной нормаль-*

ной подгруппой в G.

Доказательство. Так как A является максимальной подгруппой в G и $A_p < N_P(A_p)$, то $N_G(A_p) = G$. Заметим, что A_p является минимальной нормальной подгруппой в A, так как A_p абелева. Значит, A_p является минимальной нормальной подгруппой и в G.

Лемма 2.21. *Пусть в G имеется ненильпотентная ненормальная максимальная подгруппа A и $G = PQ$. Тогда одна из силовских подгрупп групп группы G нормальна.*

Доказательство. Допустим, что в G нет нормальных силовских подгрупп. Так как A – ненильпотентная максимальная ненормальная подгруппа группы G, то, по лемме 2.6, A — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Не теряя общности, мы можем считать, что $A = A_p \leftthreetimes A_q$. Следовательно, Q не является нормальной подгруппой в G.

Рассмотрим следующие формально возможные случаи.

I. $|G : A| = p^a$ *для некоторого* $a \in \mathbb{N}$.

Не теряя общности, мы можем считать, что $Q = A_q$ и поэтому $A = A_p \leftthreetimes Q$.

(a) A_p является минимальной нормальной подгруппой в G и $|Q : Q_G| = q$.

Это следует по леммам 2.8 и 2.20.

(b) A является представителем единственного класса ненормальных максимальных подгрупп группы G. Кроме того, нормальная максимальная в G подгруппа M является единственной подгруппой и $|G : M| = q$.

Пусть B — произвольная максимальная подгруппа группы G. Прежде предположим, что $|G : B| = p^b$ для некоторого $b \in \mathbb{N}$ и $B \neq A^x$ для всех $x \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q = B_p$. Тогда $B = B_q Q$ Кроме того, так как $B \neq A^x$, то $A_p \nleq B$. Покажем, что B ненормальна в G. Допустим, что имеет место обратное. Тогда $A_p \cap B$ — нормальная подгруппа в G. Это означает, что $A_p \cap B = 1$, ввиду минимальности A_p. Следовательно, $A \cap B = A_p Q \cap B = Q(A_p \cap B) = Q$ – нормальная подгруппа в A. Полученное противоречие показывает, что B — ненормальная подгруппа в G. Таким образом, в рассматриваемом нами случае для любой нормальной максимальной подгруппы M группы G имеет место $|G : M| = q$. А так как Q – циклическая группа, то M является единственной нормальной максимальной подгруппой в G. Так как B ненормальна в G, то, по лемме 2.6, B либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Предположим, что B_p нормальна в B. Так как B является максимальной подгруппой в G и $B_p < N_P(B_p)$, то $N_G(B_p) = G$. Значит, B_p нормальна в G. Так как A является максимальной подгруппой в G и $B_p \nleq A$, то $G = B_p \leftthreetimes A$. Значит, $P = B_p \times A_p$ и поэтому P нормальна в G. Полученное противоречие показывает, $B = Q \leftthreetimes B_p$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Так как Q является минимальной нормальной подгруппой в B и циклична, то $|Q| = q$. Значит, $M = P$ — нормальная подгруппа в G. Полученное противоречие показывает, что $|G : B| = q^c$ для некоторого $c \in \mathbb{N}$. Но тогда $B \leq M$ и поэтому $B = M$ — нормальная подгруппа группы G. Следовательно, A является представителем единтсвенного класса неномральных максимальных подгрупп группы G.

Так как Q_G нормальна в G и Q — циклическая группа, то $Q_G \leq Z_{\mathfrak{U}}(G)$. Кроме того, $Q \leq C_G(Q_G)$. Значит, по лемме 2.19, $G/C_G(Q_G)$ является абелевой q'-группой. С другой стороны, M с $|G : M| = q$ является единственной нормальной максимальной подгруппой в G. Значит, $C_G(Q_G) = G$ и поэтому $Q_G \leq Z(G)$. Следовательно, M является нильпотентной группой и поэтому P характеристична в M. Из этого следует, что P нормальна в G. Полученное противоречие показывает, что имеет место следующий случай.

II. $|G : A| = q^b$ *для некоторого* $b \in \mathbb{N}$.

Не теряя общности, мы можем считать, что $P = A_p$ и поэтому $A = P \leftthreetimes A_q$.

Так как $A \neq P$, то в A имеется максимальная подгруппа A_1 такая, что $|A : A_1| = q$ и поэтому $P \leq A_1$. Следовательно, $A_1 = A_1 \cap A = A_1 \cap PA_q = P(A_1 \cap A_q)$, где $A_1 \cap A_q$ — максимальная подгруппа в A_q. Если A_1 является S-квазинормальной подгруппой в G, то, по лемме 2.11, P также S-квазинормальна в G. Откуда, по лемме 2.2(4), следует, что P нормальна в G. Полученное противоречие показывает, что A_1 не S-квазинормальна в G. Значит, все максимальные подгруппы из A_1 являются S-квазинормальными в G и поэтому, по лемме 2.2(5), $A_1 = P$ — циклическая группа. А так как P — минимальная нормальная подгруппа в A, то $|P| = p$. Следовательно, по [25, теорема 14.3.1], $p > q$, так как Q ненормальна в G. Кроме того, из того, что $A_1 \cap A_q = 1$ следует, что $|T| = q$. Таким образом, A является группой Шмидта, в которой силовские подгруппы имеют простой порядок. Поэтому Q является максимальной подгруппой в G и $A_G = 1$. Значит, G является примитивной группой и поэтому ввиду [17, глава А, теорема 15.2], $G = Q_1 \leftthreetimes A$, где Q_1 — минимальная нормальная в G подгруппа. Очевидно, что $A_q \nleq Q_1$ и поэтому $Q = Q_1 \leftthreetimes A_q$. А так как $|A_q| = q$, то Q_1 является максимальной подгруппой в Q. Значит, по лемме 2.9, $Q_1 = Q_G$. Заметим, что так как P ненормальна в G и $p > q$, то Q — нециклическая группа. Значит, Q_G является единственной максимальной подгруппой в Q, которая S-квазинормальна в G, так как Q не S-квазинормальна в G. Поэтому все максимальные подгруппы из Q, отличные от Q_G, не S-квазинормальны в G и цикличны, по лемме 2.2(5). Пусть Q_2 — максимальная подгруппа из Q_G. Так как Q_2 характеристична в Q_G, то Q_2 нормальна в Q. Значит, $Q_2 \leftthreetimes A_q$ — подгруппа группы Q. Так как $Q_2 \leftthreetimes A_q \nleq Q_G$, то $Q_2 \leftthreetimes A_q$ — циклическая группа и поэтому $Q_2 = 1$. Значит, $|Q_1| = q$ и, следовательно, $|Q| = q^2$. Откуда получаем $|G| = pq^2$, что противоречит исходному допущению о группе G. Полученное противоречие показывает, что в G всегда имеется нормальная силовская подгруппа.

Лемма 2.22. *Если $G = P \rtimes Q$, то в G имеется по крайней мере одна ненильпотентная ненормальная максимальная подгруппа A тогда и только тогда, когда A является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, $|Q : Q_G| = q$ и G является группой одного из следующих типов:*

(1) $\Phi(P) = 1$, G — является подпрямым произведением подгрупп A и B, где $A = S \rtimes Q$ и S — минимальная нормальная подгруппа в G; $B = D \rtimes Q$ — ненормальная максимальная в G подгруппа и либо B — нильпотентная группа, $|D| = p$ и $D \leq Z(G)$, либо $B \simeq A$.

(2) $G = PA$, $|\Phi(P)| = p$, $A = \Phi(P) \rtimes Q$ — представитель единственного класса максимальных ненормальных подгрупп группы G;

Необходимость. Так как A — ненильпотентная максимальная ненормальная подгруппа группы G, то, по лемме 2.6, $A = S \rtimes T$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами S и T. Не теряя общности, мы можем считать, что S — p-группа и T — q-группа. Следовательно, P нормальна в G. Тогда подгруппа $\Phi(P)$, являющаяся характеристичной в P, нормальна в G и поскольку A не является нормальной подгруппой в G, то $|G : A| = p^a$ для некоторого натурального числа a. Поэтому A содержит некоторую силовскую q-подгруппу группы G. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q \leq A$. Следовательно, $A = S \rtimes Q$. Заметим также, что S являетмя минимальной нормальной подгруппой в G. Действительно, так как A является максимальной подгруппой в G и $S < N_P(S)$, то $N_G(S) = G$. Заметим, что S является минимальной нормальной подгруппой в A, так как S абелева. Значит, S является минимальной нормальной подгруппой и в G. Заметим также, что, по лемме 2.8, $|Q : Q_G| = q$.

Возможны следующие формально возможные случаи.

I. $\Phi(P) = 1$.

(a) G является подпрямым произведением групп A и B, где $B = D \rtimes Q$ — ненормальная максимальная в G подгруппа и D — силовская p-подгруппа в B.

Пусть B — максимальная подгруппа в G с $|G : B| = p^b$, где $b \in \mathbb{N}$ и $B \neq A^x$ для всех $x \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q \leq B$. Тогда $B = DQ$, где D — силовская p-подгруппа в B. Так как $B \neq A^x$, то $S \nleq B$. Покажем, что B ненормальна в G. Допустим, что имеет место обратное. Тогда $S \cap B$ — нормальная подгруппа в G. Это означает, что $S \cap B = 1$, ввиду минимальности S. Следовательно, $A \cap B = SQ \cap B = Q(S \cap B) = Q$ — нормальная подгруппа в A. Полученное противоречие показывает, что B — ненормальная подгруппа в G. Следовательно, по лемме 2.6, B либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Заметим, что так как P нормальна в G, то $P \cap B = D$ — нормальная подгруппа в B.

Следовательно, $B = D \leftthreetimes Q$. Так как B является максимальной подгруппой в G и $D < N_P(D)$, то $N_G(D) = G$. Значит, D нормальна в G. Так как A является максимальной подгруппой в G и $D \nleq A$, то $G = D \leftthreetimes A$. Значит, $P = D \times S$. А так как $S \nleq B$, то $G = S \leftthreetimes B = D \leftthreetimes A$. Следовательно,

$$G/S \simeq SB/S \simeq B/S \cap B \simeq B$$

и также

$$G/D \simeq DA/D \simeq A/A \cap D \simeq A.$$

Таким образом, G является подпрямым произведением групп A и B.

(b) Если B — нильпотентная группа, то $|D| = p$ и $D \leq Z(G)$.

В D имеется максимальная подгруппа D_1, которая нормальна в B. Следовательно, D_1Q является максимальной подгруппой в B. Кроме того, D_1Q не S-квазинормальна в G. Действительно, если D_1Q является S-квазинормальной подгруппой в G, то, по лемме 2.11, Q также S-квазинормальна в G. Откуда, по лемме 2.2(1) следует, что Q субнормальна в G. Значит, Q нормальна в G. Полученное противоречие показывает, что D_1Q не S-квазинормальна в G. Значит, все максимальные подгруппы из D_1Q являются S-квазинормальными в G. Следовательно, по лемме 2.2(5), $D_1Q = Q$ и поэтому $|D| = p$. Заметим также, что так как P — абелева группа и $G = BP$, то $D \leq Z(G)$.

(c) Если B — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, то $B \simeq A$.

Так как $Q \leq B$, $Q \leq A$, S и D — минимальные нормальные подгруппы в G, то получаем $B \simeq A$. Таким образом, G — группа типа (1).

II. *Если $\Phi(P) \neq 1$, то $G = PA$, $A = \Phi(P) \leftthreetimes Q$ — представитель единственного класса ненормальных максимальных подгрупп группы G и $|\Phi(P)| = p$.*

Допустим, что в G имеется ненормальная максимальная подгруппа $M \neq A^x$ для любого $x \in G$. Тогда $|G : M| = p^c$ для некоторого натурального числа c и, по лемме 2.6, M либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q \leq M$ и поэтому $Q_G \leq M$. Пусть M является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда $M = M_p \leftthreetimes Q$, где M_p — силовская p-подгруппа в M. Так как M является максимальной подгруппой в G и $M_p < N_P(M_p)$, то $N_G(M_p) = G$. А поскольку M_p является минимальной нормальной подгруппой в M, то, тем более, M_p является минимальной нормальной подгруппой в G. А так как S также является минимальной нормальной подгруппой в G, то из того, что $\Phi(P)$ нормальна в G и $\Phi(P) \leq \Phi(G)$ следует, что $\Phi(P) \leq S$ и $\Phi(P) \leq M_p$. Так как $\Phi(P) \neq 1$, то $M_p = S = \Phi(P)$. Таким образом, получаем, что $\Phi(P) \leq M_G$ и $\Phi(P) \leq A_G$. А так как $Q_G \leq A_G$

и $Q_G \leq M_G$, то $A_G = M_G$ и поэтому, по [17, глава A, теорема 16.1], $M = A^x$ для некоторого $x \in G$. Полученное противоречие показывает, что M — нильпотентная группа. Заметим, что

$$M = M \cap PQ = Q(M \cap P),$$

Если все максимальные подгруппы из M являются S-квазинормальными в G, то, по лемме 2.2(5), $M = Q$ и поэтому $M \cap P = 1$. Так как P нормальна в G, то $\Phi(P) \subseteq \Phi(G)$. Значит, $\Phi(P) \subseteq M$ и $\Phi(P) \subseteq M \cap P = 1$. Следовательно, $\Phi(P) = 1$. Полученное противоречие показывает, что в M имеется максимальная не S-квазинормальная в G подгруппа L. Прежде предположим, что $Q \leq L$. Тогда L не S-квазинормальна в G. Действительно, в противном случае, в силу нильпотентности L и леммы 2.11, получаем, что Q является S-квазинормальной подгруппой в G. Откуда, по лемме 2.2(1), следует, что Q субнормальна в G и поэтому Q нормальна в G. Полученное противоречие показывает, что L не S-квазинормальна в G. Кроме того,

$$L = L \cap PQ = Q(L \cap P),$$

где $L \cap P$ — максимальная подгруппа в $M \cap P$. По условию, все максимальные подгруппы из L являются S-квазинормальными в G. Значит, по лемме 2.2(5), $L = Q$ и поэтому $L \cap P = 1$. Значит, $|M \cap P| = |\Phi(P)| = p$. Заметим что, $M_G = \Phi(P)Q_G$ и $A_G = \Phi(P)Q_G$ и поэтому $M = A^x$ для некоторого $x \in G$, по [17, глава A, теорема 16.1]. Полученное противоречие показывает, что $Q \not\leq L$. Значит, $|M : L| = q$ и $\Phi(P) \leq L$. Тогда $L = M \cap L = \Phi(P)Q \cap L = \Phi(P)(Q \cap L)$, где $Q \cap L$ — максимальная подгруппа в Q, равная Q_G. Значит, $L = \Phi(P)Q_G$ — нормальная подгруппа в G. Полученное противоречие показывает, что A является представителем единственного класса максимальных ненормальных подгрупп в G. Таким образом, G — группа типа (2).

Достаточность. Очевидно, что если G — группа типа (1), то в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная S-квазинормальная подгруппа.

Пусть G — группа типа (2). Очевидно, что в каждой максимальной цепи длины три группы G, проходящей через подгруппу A, имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Допустим, что B — нильпотентная группа. Из того, что $|D| = p$ вытекает, что Q является максимальной подгруппой в B. Так как подгруппа B максимальна в G и $D < N_P(D)$, то $N_G(D) = G$. Значит, подгруппа D, а вместе с ней и максимальная подгруппа DQ_G из B нормальны в G. Следовательно, в каждой максимальной цепи длины три группы G, проходящей через B, имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что в G имеется ненормальная максимальная подгруппа M с $|G : M| = p^b$ для некоторого натурального числа b и $M \neq A^x$, $M \neq B^y$

для всех $x, y \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q \leq M$. Так как P нормальна в G, то $M = [M_p]Q$, где M_p — силовская p-подгруппа в M. Заметим также, что M_p нормальна в G, так как P — абелева группа. Заметим, что так как $M \neq A^x$, то $M \cap S = 1$. Действительно, допустим, что имеет место обратное. Тогда $M_p \cap S \neq 1$ и $M_p \cap S$ — нормальная подгруппа в G, что влечет $M_p \cap S = S$, т.е. $S \subseteq M$. Тогда $A \subseteq M$ и поэтому $A = M$, противоречие. Значит, $M \cap S = 1$. Так как A — максимальная подгруппа в G и $G = AB$, то $A \neq B$. Кроме того, так как $A = S \leftthreetimes Q$ и $B = D \leftthreetimes Q$, то $D \nleq A$. Значит, $G = D \leftthreetimes A$. Тогда $P = D \times S$. А так как $|D| = p$, то $|P : S| = p$. Следовательно, из того, что $M \cap S = 1$, вытекает $|M_p| = p$. Заметим, что представителями двух классов максимальных подгрупп в M являются подгруппа Q и нормальная в G подгруппа M_pQ_G. Следовательно, в каждой максимальной цепи длины три группы G, проходящей через M, имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Допустим теперь, что $B = D \leftthreetimes Q$ — группа Шмидта. Так как $B \simeq A$, то B — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и поэтому в каждой максимальной цепи длины три группы G, проходящей через подгруппу B, имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим, что в G имеется ненормальная максимальная подгруппа M с $|G : M| = p^c$ для некоторого натурального числа c и $M \neq A^x$, $M \neq B^y$ для всех $x, y \in G$. Не теряя общности, мы можем считать, что $Q \leq M$. Так как P нормальна в G, то $M = [M_p]Q$, где M_p — силовская p-подгруппа в M. Заметим также, что M_p нормальна в G, так как P — абелева группа. Аналогично вышеприведенным рассуждениям, можно показать, что $M_p \cap S = 1$ и $M_p \cap D = 1$. Значит, из G-изоморфизма следует, что $P/S \simeq DS/S \simeq D$ и $P/S \simeq M_pS/S \simeq M_p$. Следовательно, M_p — минимальная нормальная подгруппа в G. Заметим также, что M_p является минимальной нормальной подгруппой в M, поскольку $PM = G$ и P — абелева группа. Значит, представителями двух классов максимальных подгрупп в M являются подгруппа Q и нормальная в G подгруппа M_pQ_G. Таким образом, в каждой максимальной цепи длины три группы G, проходящей через M, имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Лемма 2.23. *Пусть $|\pi(G)| = 3$ и P нормальна в G. Тогда в G имеется ненильпотентная ненормальная максимальная подгруппа A, тогда и только тогда, когда $G = P \leftthreetimes (QR)$ и G имеет в точности три класса максимальных подгрупп, представителями которых являются холловская r'-подгруппа A, ненормальная холловская p'-подгруппа L и нормальная в G подгруппа M с $|G : M| = q$. Кроме того, выполняются следующие условия:*

(1) A является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами и $|Q : Q_G| = q$;

(2) L является либо группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппа-

ми, либо нильпотентной группой. P — минимальная нормальная подгруппа в G. $|R| = r$ и если R ненормальна в G, то $|Q| = q$.

Необходимость. *(a) $A = P^x \rtimes Q^y$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами для некоторых $x, y \in G$, в частности, $|Q^y : (Q^y)_G| = q$ и $|G : A| = |R|$.*

Так как A — ненильпотентная ненормальная максимальная подгруппа группы G, то, по лемме 2.6, $A = S \rtimes T$ — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами S и T. Пусть S — s-группа и T — t-группа для некоторых простых чисел s и t. Так как G разрешима и A — максимальная подгруппа в G, являющаяся группой Шмидта, то $|G : A| = |R|$. Это, в частности, означает, что $S = P^x$, $T = Q^y$ для некоторых $x, y \in G$, т.е. $A = P^x \rtimes Q^y$, что, ввиду леммы 2.8, влечет $|Q^y : (Q^y)_G| = q$. Таким образом, выполняется условие (1).

Не теряя общности, мы можем считать, что $A = P \rtimes Q$.

(b) $A = P \rtimes Q$ является представителем единственного класса максимальных подгрупп, индекс которых в группе G является степенью простого числа r.

Пусть B — произвольная максимальная подгруппа группы G с $|G : B| = r^a$ для $a\mathbb{N}$. Пусть $B_{r'}$ — холловская r'-подгруппа группы B. Тогда $B_{r'}$ является холловской r'-подгруппой в G. Поскольку, ввиду (a), $|G : A| = |R|$, то A — холловская r'-подгруппа группы G. А так как все холловские r'-подгруппы сопряжены в G, по [17, глава I, теорема 3.3], то $B_{r'} = A^x$ для некоторого $x \in G$. Так как A является максимальной подгруппой в G, то $B = B_{r'} = A^x$ — максимальная подгруппа в G. Таким образом, A является представителем единственного класса максимальных подгрупп, индекс которых в группе G является степенью простого числа r.

(c) Если P не является минимальной нормальной подгруппой в G, то $|Q| = q$ и $|P| = p$.

По лемме 2.7(2), A имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются PQ_G и Q. Предположим, что P не является минимальной нормальной подгруппой в G. Тогда P не является нормальной подгруппой в G и поэтому PQ_G не S-квазинормальна в G. Действительно, в противном случае, по лемме 2.11, P является S-квазинормальной подгруппой в G и поэтому, по лемме 2.2(1), P субнормальна в G. Откуда следует, что P нормальна в G. Полученное противоречие показывает, что PQ_G не S-квазинормальна в G. По условию, все максимальные подгруппы из PQ_G являются S-квазинормальными в G. Значит, по лемме 2.2(5), $PQ_G = P$ — циклическая группа и поэтому $|Q| = q$. Но так как P является элементарной абелевой p-группой, то $|P| = p$.

(d) Если L — произвольная максимальная подгруппа группы G с $|G : L| = p^b$ для $b\mathbb{N}$, то L — холловская p'-подгруппа и L ненормальна в G.

Понятно, что $Q^x \leq L$ для некоторого $x \in G$. Следовательно, $L \cap A^x = Q^x$. Значит, L не является нормальной подгруппой в G. Заметим, что, согласно (c), P либо является минимальной нормальной подгруппой в G, либо $|P| = p$. Значит, $L \cap P = 1$ и поэтому L — холловская p'-подгруппа группы G.

Так как L ненормальна в G, то, по лемме 2.6, L либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Также заметим, что так как, согласно (d), L — холловская p'-подгруппа группы G, то, не теряя общности, мы можем считать, $L = QR$.

(e) Если M — произвольная максимальная подгруппа группы G с $|G : M| = q^c$ для $c\mathbb{N}$, то M является нормальной подгруппой в G.

Допустим обратное. Тогда, по лемме 2.6, M либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. С другой стороны, ввиду (b) и (d), в G имеется максимальная нормальная подгруппа T с $|G : T| = q$.

Предположим вначале, что M является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Тогда, в силу того, что $|\pi(M)| = 2$ и $|G : M| = q^c$ получаем $|Q| = q$. Значит, $M \leq T$ и, следовательно, $M = T$, что невозможно ввиду предположения о ненормальности подгруппы M. Значит, M является нильпотентной группой. А так как P нормальна в A, то P нормальна в G. Заметим, что в этом случае, ввиду ненормальности M в G, R не S-квазинормальна в G. Действительно, в противном случае, по лемме 2.2(1), R субнормальна в G и, следовательно, нормальна в G. Значит, $M = P \times Q_G \times R$ — нормальная подгруппа группы G. Пусть M_1 — максимальная подгруппа из M с $|M : M_1| = p$. Не теряя общности, мы можем считать, что $RQ_G \leq M_1$. Так как R не S-квазинормальна в G, то, по лемме 2.11, L не S-квазинормальна в G. Тогда, по условию, все ее максимальные подгруппы S-квазинормальны в G. Значит, ввиду леммы 2.2(5), $L = R$. Поэтому $|Q| = q$ и $M = T$. Полученное противоречие показывает, что любая максимальная подгруппа M с $|G : M| = q^c$ является нормальной в G и $M = PQ_GR$. Покажем, что M — единственная максимальная нормальная подгруппа в G. Предположим, что в G имеется еще одна максимальная нормальная подгруппа $T \neq M$ с $|G : T| = q$. Так как T нормальна в G, то $P \leq T$ и $R \leq T$. Кроме того, $Q_G \leq T$, так как Q циклична. Значит, $M = T$ и M — единственная максимальная нормальная подгруппа в G.

(f) L является либо группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами, либо нильпотентной группой, P — минимальная нормальная подгруппа в G, $|R| = r$ и если R ненормальна в G, то $|Q| = q$.

Так как, согласно (d), L ненормальна в G, то, по лемме 2.6, L либо нильпотентна, либо является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Также заметим, что так как, согласно (d), L — холловская p'-подгруппа группы G, то, не теряя общности, мы можем считать, $L = QR$.

Допустим вначале, что L — нильпотетная группа. Так как L не является примарной циклической группой, то в L имеется максимальная не S-квазинормальная в G подгруппа, которая является примарной циклической группой. Так как L нильпотентна, то R нормальна в L и в R имеется максимальная подгруппа R_1, которая нормальна в L. Значит, QR_1 является максимальной подгруппой в L. Ввиду того, что Q ненормальна в G и леммы 2.11, QR_1 не S-квазинормальна в G. Значит, $QR_1 = Q$ и поэтому $|R| = r$. Если P не является минимальной нормальной подгруппой в G, то, согласно (c), $|P| = p$ и $|Q| = q$. Значит, $|G| = pqr$, что противоречит исходному предположению о группе G. Следовательно, P — минимальная нормальная подгруппа в G. Кроме того, так как $G/P \simeq L$ — нильпотентная группа, то $P = G^{\mathfrak{N}}$. Если R не является нормальной подгруппой в G, то RQ_G не S-квазинормальна в G. Значит, по условию, все максимальные подгруппы из RQ_G являются S-квазинормальными в G. Значит, $RQ_G = R$ и поэтому $|Q| = q$. Таким образом, выполняется условие (2).

Предположим теперь, что L — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Пусть Q нормальна в L. Тогда, по лемме 2.7, $L = Q \rtimes R$, где $R =< b >$ и L имеет в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются $Q < b^r >$ и R. Заметим также, что так как Q является минимальной нормальной подгруппой в L и Q — циклическая группа, то $|Q| = q$. Следовательно, нормальная в G подгруппа $M = PR$ и $M \cap L = R$ — нормальная подгруппа в L. Полученное противоречие показывает, что $L = R \rtimes Q$. Тогда, по лемме 2.7, в L имеется в точности два класса максимальных подгрупп, представителями которых являются RQ_G и Q. Если R не является нормальной подгруппой в G, то RQ_G не S-квазинормальна в G. Значит, по условию, все максимальные подгруппы из RQ_G являются S-квазинормальными в G. Значит, $RQ_G = R$ — циклическая группа и поэтому $|Q| = q$. Кроме того, так как R является минимальной нормальной подгруппой в L и циклична, то $|R| = r$. Заметим также, что если P не является минимальной нормальной подгруппой в G, то, согласно (c), $|P| = p$ и $|Q| = q$. Значит, $|G| = pqr$, что противоречит исходному предположению о группе G. Следовательно, P — минимальная нормальная подгруппа в G. Таким образом, выполняется условие (2).

Достаточность. Очевидно, что в каждой максимальной цепи длины три группы G, проходящей через подгруппу A, имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Допустим вначале, что L — группа Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. По лемме 2.7(2), представителями двух классов максимальных подгрупп в L являются нормальная в G подгруппа RQ_G и подгруппа Q, максимальная подгруппа которой нормальна в G. Значит, и в этом случае в каждой максимальной цепи длины три группы G имеется собственная нормальная в G подгруппа.

Предположим теперь, что L является нильпотентной группой. В этом случае предствителями двух классов максимальных подгрупп в L являются нормальная в G подгруппа RQ_G и подгруппа Q. Значит, в этом случае, в каждой максимальной цепи длины три группы G, проходящей через L имеется собственная нормальная в G подгруппа.

3 Доказательство теоремы

Согласно леммы 2.13, G является разрешимой группой и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^*$, где $\mathfrak{A}^*$ — класс всех абелевых групп, у которых экспоненты не содержат кубов простых чисел и $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^*$ — класс всех групп, являющихся расширением нильпотентных групп при помощи групп из $\mathfrak{A}^*$.

Предположим, что группа G не является нильпотентной. Тогда, по лемме 2.6, любая ненормальная максимальная подгруппа A группы G является либо нильпотентной группой, либо группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами.

Предположим вначале, что все ненормальные максимальные подгруппы группы G нильпотентны. Тогда, по леммам 2.17 и 2.18, G — группа одного из типов I-II.

Предположим теперь, что в G имеется максимальная ненормальная подгруппа A, которая является группой Шмидта с абелевыми силовскими подгруппами. Если $|\pi(G)| = 2$, то, по лемме 2.22, G — группа одного из типов III-IV. Если же $|\pi(G)| = 3$, то, по лемме 2.23, G — группа типа V.

Достаточность. Прежде всего заметим, что в нильпотентной группе каждая подгруппа является S-квазинормальной. Если же G является группой одного из типов I-V, то доказательство следует из лемм 2.17, 2.18, 2.22, 2.23.

Список литературы

[1] Redei, L. Ein Satz uber die endlichen einfachen Gruppen / L. Redei // Acta Math. — 1950. — B. 84. — S. 129-153.

[2] Huppert, B. Normalteiler and maximal Untergruppen endlicher gruppen / B.Huppert // Math. Z. — 1954. — V. 60. — P. 409–434.

[3] Поляков, Л.Я. Конечные группы с перестановочными подгруппами / Л.Я. Поляков // Наука и техника. — 1966. — С. 75-88.

[4] Agrawal, R. K. Generalized center and hypercenter of a finite group / R.K.Agrawal // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — V. 54. — P. 13–21.

[5] Asaad, M. Finite groups some whose n-maximal subgroups are normal / M. Asaad // Acta Math. Hung. — 1989. — V. 54. є1. — P. 9-27.

[6] Flavell, P. Overgroups of second maximal subgroups / Paul Flavell // Arch. Math. — 1995. — Vol. 64. — P. 277-282.

[7] Li, Shirong Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-groups / Sh. Li // Mathematical Proccedings of the Royal Irish Academy. — 2000. — Vol. 100A(1). — P. 65-71.

[8] Guo, X. Y. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups / X. Y. Guo, K. P. Shum // Journal of Pure and Applied Algebra. — 2003. — Vol. 181. — P. 297–308.

[9] Guo, W. X-semipermutable subgroups of finite groups / W. Guo, K.P. Shum, A.N. Skiba // J. Algebra. — 2007. — V. 315. — P. 31-41.

[10] Li, Baojun New characterizations of finite supersoluble groups / B. Li, A.N. Skiba // Science in China Serias A: Mathematics. — 2008. — Vol. 50, є 1. — P. 827–841.

[11] Guo, W. Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups / W. Guo, A.N. Skiba // J. Algebra. — 2009. — V. 321. — P. 2843-2860.

[12] Guo, W. The structure of finite non-nilpotent groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups / W. Guo, H.V. Legchekova, A.N. Skiba // Communications in Algebra. — 2009. — V. 37. — P. 2446-2456.

[13] Го, В. Конечные группы, в которых любая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами / В. Го, Е.В. Легчекова, А.Н. Скиба // Матем. заметки. — 2009. — Т. 86, є 3. — С. 350-359.

[14] Ковалькова, Д.П. А.Н. Конечные группы с заданными системами S-квазинормальных подгрупп / Д.П. Ковалькова, А.Н. Скиба // Вес.Нац.акад.навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. — 2010. — є3. — С. 35-43.

[15] Луценко, Ю.В. О конечных группах, в которых каждая 2-максимальная или 3-максимальная подгруппа обобщенно перестановочна со всеми силовскими подгруппами / Ю.В. Луценко, А.Н Скиба // Укр.мат.ж. — 2009. — Т. 61, є 12. — С. 1630-1639.

[16] Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л.А.Шеметков. — Москва: Наука, 1978.

[17] Doerk, K. Finite Soluble Groups / K.Doerk, T.Hawkes; Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992. — 889 p.

[18] Kegel, O. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O.Kegel // Math. Z. — 1962. — V. 87. — P. 205–221.

[19] Huppert, B. Endliche Gruppen I / B.Huppert. — Berlin-Heidelberg: Springer, 1967. — 793 p. New York: Springer.

[20] Schmidt, P. Subgroups Permutable with All Sylow Subgroups / P.Schmidt. — 1997. — P. 285-293.

[21] Derek P.S. Robinson. A course in the theory of groups / Derek P.S. Robinson. — New York, 1982.

[22] D. Gorenstein, Finite Groups. Harper & Row Publishers, New York-Evanston-London, 1968.

[23] H. Wielandt, *Subnormal subgroups and permutation groups.* Lectures given at the Ohio State University, Columbus, Ohio, 1971.

[24] Mann, A. Finite groups whose n-maximal subgroups are subnormal / A.Mann // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — V. 132. — P. 395-409.

[25] Холл, М. Теория групп / М.Холл. — Москва, 1962.

[26] L. A. Shemetkov, A. N. Skiba, Formations of algebraic systems, Nauka, Main Editorial Board for Physical and Mathematical Literature, Moscow, 1989.

Научное издание

Ковалькова Дина Петровна
Скиба Александр Николаевич

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ S-КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Препринт N 5

В авторской редакции

Подписано в печать 31.12.2010. Формат 60 × 84 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 1,8.
Уч.-изд. л. 2. Тираж 25 экз. Заказ N 469.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
ЛИ N 02330/0549481 от 14.05.2009.
ЛП N 02330/0150450 от 03.02.2009.
Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.