Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
"Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины"

Задорожнюк Елена Андреевна
Скиба Александр Николаевич

ГРУППЫ С ЗАДАННОЙ РЕШЕТКОЙ ПОДГРУПП

Ноябрь 2003 Препринт № 55

Гомель

Все рассматриваемые нами в данной работе группы конечны. Все используемые обозначения и определения соответствуют принятым в [7, 12, 3, 5].

Наличие у группы тех или иных подгрупп и их взаимное расположение в группе является важной характеристикой этой группы. Это обстоятельство явилось основным стимулом для появления большого числа публикаций, связанных с изучением групп с заданными системами подгрупп. Одна из организующих идей в этом направлении состоит в изучении групп, у которых решетка подгрупп удовлетворяет тем или иным условиям. На этом пути удалось получить новые характеризации для наиболее известных классов конечных и бесконечных групп (см. напр. [10]). Отметим, в частности, что согласно теореме Ивасава (см. напр. [1, с. 232]) конечная группа является сверхразрешимой, если в решетке погрупп этой группы все максимальные цепи имеют одну и ту же длину. В дальнейшем этот результат был расширен в работе Я.Г. Берковича [2], где были описаны разрешимые группы, у которых длины всех максимальных цепей от любой минимальной подгруппы до основной группы одинаковы. Отметим еще один пример. Конечная группа является циклической тогда и только тогда, когда решетка ее подгрупп дистрибутивна (см. напр. [1, с. 227]).

Целью данной работы является расширение последнего результата в классе разрешимых групп. Получено полное описание разрешимых групп, у которых решетка подгрупп, заключенная между основной группой и любой ее минимальной подгруппой, является дистрибутивной.

Напомним, что цепь

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n = H$$

называется $(G - H)$*-цепью* (с индексами $|G_{i-1} : G_i|$). Если при этом G_i является максимальной подгруппой в G_{i-1} для любого $i > 0$, то указанная цепь называется *максимальной* $(G - H)$*-цепью.* Длиной данной цепи называется число отличных от группы H членов цепи. *Группа G удовлетворяет условию Жордана-Дедекинда относительно цепей*, если для любой ее подгруппы H все максимальные $(G - H)$-цепи имеют одну и ту же длину, обозначаемую $l[G/H]$ (см., например, [10]). Понятно, что условие Жордана-Дедекинда эквивалентно следующему: все максимальные $(G - 1)$-цепи имеют одну и ту же длину. Очевидно, что что условие Жордана-Дедекинда является решеточным и наследственным для подрешеток решетки всех подгрупп группы G.

Пусть теперь p — некоторое фиксированное простое число. Тогда мы будем говорить, что подгруппа H группы G *p-эквидистантна в G*, если в любой максимальной $(G - H)$-цепи имеется одно и то же число индексов, делящихся на p. И это число мы будем обозначать символом $l_p[G/H]$.

Опишем группы, у которых все их минимальные подгруппы p-эквидистантны.

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть K — p-эквидистантная подгруппа в группе G. Тогда любая подгруппа H группы G, содержащая подгруппу K, является p-эквидистантной в G, группа K является p-эквидистантной в H, причем справедлива формула*

$$l_p[G/K] = l_p[G/H] + l_p[H/K].$$

Доказательство. Рассмотрим максимальную $(G - K)$-цепь, проходящую через H:

$$K = G_0 < \cdot G_1 < \cdot \ldots < \cdot G_j = H < \cdot G_{j+1} < \cdot \ldots < \cdot G_{j+n} = G.$$

Пусть в этой цепи число индексов, делящихся на p, равно m. Зафиксируем часть этой цепи от H до K. Пусть в $(H - K)$-цепи число индексов, делящихся на p, равно k. Тогда в любой $(G - H)$-цепи число индексов, делящихся на p, равно $m - k$. Итак, группа H является p-эквидистантной в G. Если зафиксировать часть цепи от G до H, то рассуждая аналогично, получим, что и в любой максимальной $(H - K)$-цепи число индексов, делящихся на p, одно и то же. Таким образом, имеет место формула

$$l_p[G/K] = l_p[G/H] + l_p[H/K].$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если группа G p-сверхразрешима, то каждая ее подгруппа p-эквидистантна в G.*

Доказательство. Из p-сверхразрешимости группы G для любой максимальной подгруппы M группы G имеет место в точности одна из следующих возможностей:

1) $|G : M| = p$;

2) $|G : M|$ — p'-число.

Значит, если p^n — порядок силовской p-подгруппы G_p группы G, то в любой максимальной цепи группы G имеется в точности n индексов, делящихся на p. Отсюда и из леммы 1 вытекает, что все подгруппы из G p-эквидистантны в G. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $K \triangleleft G$ и H — произвольная подгруппа группы G, содержащая K. Тогда подгруппа H/K p-эквидистантна в G/K тогда и только тогда, когда подгруппа H p-эквидистантна в группе G.*

Лемма 4. *Пусть $G = [P]M$, где P — p-подгруппа группы G, M — p-сверхразрешимая подгруппа группы G. Пусть Z — подгруппа простого порядка группы M. Тогда группа PZ является p-эквидистантной в группе G, причем имеет место равенство*

$$l_p[G/PZ] = l_p[M/Z].$$

Доказательство. Из p-сверхразрешимости группы $M \simeq G/P$ ввиду леммы 2 следует, что подгруппа PZ/P является p-эквидистантной в G/P. Ввиду леммы 3 подгруппа PZ является p-эквидистантной в группе G. Осталось доказать равенство

$$l_p[G/PZ] = l_p[M/Z].$$

Рассмотрим максимальную $(G - PZ)$-цепь

$$PZ = M_0 < \cdot M_1 < \cdot \ldots < \cdot M_t = G$$

и максимальную $(G/P - PZ/P)$-цепь

$$PZ/P = M_0/P < \cdot M_1/P < \cdot \ldots < \cdot M_t/P = G/P.$$

Из p-сверхразрешимости группы $M \simeq G/P$ следует, что для любого $i = 1, \ldots, t$ индекс $|M_i/P : M_{i-1}/P|$ равен p, либо является p'-числом. А так как $|M_i : M_{i-1}| = |M_i/P : M_{i-1}/P|$, то и индекс $|M_i : M_{i-1}|$ для любого $i = 1, \ldots, t$ равен p, либо является p'-числом. Так как $PZ \cap M = Z(M \cap P) = Z$ и $G \cap M = M$, то пересекая каждый член первой цепи с подгруппой M, имеем цепь подгрупп

$$Z = M_0 \cap M \leq M_1 \cap M \leq \ldots \leq M_t \cap M = M.$$

Понятно, что

$$M_i = M_i \cap PM = P(M_i \cap M).$$

Поскольку

$$|M_i : M_{i-1}| = \frac{|M_i|}{|M_{i-1}|} = \frac{|P(M_i \cap M)|}{|P(M_{i-1} \cap M)|} =$$

$$= \frac{|P||M_i \cap M|}{|P \cap (M_i \cap M)|} \frac{|P \cap (M_{i-1} \cap M)|}{|P||M_{i-1} \cap M|} = \frac{|M_i \cap M|}{|M_{i-1} \cap M|} = |M_i \cap M : M_{i-1} \cap M|,$$

то число индексов, делящихся на p, в последней цепи равно числу индексов, делящихся на p, в первой цепи. Значит, имеет место равенство

$$l_p[G/PZ] = l_p[M/Z].$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — p-разрешимая группа, такая, что в любой ее максимальной цепи число индексов, делящихся на p, одно и то же. Тогда G — p-сверхразрешимая группа.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть P — минимальная нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим факторгруппу G/P. Так как условие леммы переносится на факторгруппу G/P и $|G/P| < |G|$, то то ввиду выбора группы G факторгруппа G/P является p-сверхразрешимой.

Поскольку по условию леммы группа G является p-разрешимой, то P — либо элементарная абелева p-группа, либо p'-группа. Если P — p'-группа, то G является p-сверхразрешимой группой. Противоречие. Значит, P — элементарная абелева p-группа. Положим $|P| = p^n$. Тогда из того, что группа G не p-сверхразрешима, следует, что $n > 1$. Если $P \subseteq \Phi(G)$, то из p-сверхразрешимости факторгруппы G/P следует p-сверхразрешимость группы $G/\Phi(G)$. Но тогда и группа G p-сверхразрешима, так как формация всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной. Противоречие.

Итак, $P \not\subseteq \Phi(G)$, т.е. среди среди максимальных подгрупп группы G найдется такая, скажем, M, которая не содержит P. Так как $P \cap M \triangleleft G$, а P — минимальная нормальная подгруппа в группе G, то $P \cap M = 1$, Итак, $G = [P]M$. Ввиду условия леммы в любой максимальной $(G-1)$-цепи одно и то же число индексов, делящихся на p. Значит, и в любой максимальной $(M-1)$-цепи одно и то же число индексов, делящихся на p. Ясно, что в любой максимальной $(G-1)$-цепи, проходящей через подгруппу M

$$1 = G_0 < \cdot G_1 < \cdot \ldots < \cdot G_t = M < \cdot G,$$

имеет место равенство

$$l_p[G/1] = l_p[M/1] + 1.$$

С другой стороны, в любой максимальной $(G - P)$-цепи одно и то же число индексов, делящихся на p. Очевидно,

$$l_p[G/P] = l_p[M/1].$$

Но тогда

$$l_p[G/1] = l_p[G/P] + 1.$$

Так как ввиду леммы 1

$$l_p[G/1] = l_p[G/P] + l_p[P/1],$$

то получаем, что

$$l_p[P/1] = 1, \text{т.е. } |P| = p.$$

Противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 6. *Пусть p-разрешимая группа G не является p-сверхразрешимой. Тогда любая минимальная подгруппы P группы G является p-эквидистантной в G тогда и только тогда, когда $G = [P]M$, где P — нециклическая минимальная нормальная подгруппа группы G, являющаяся ее силовской p-подгруппой, причем $P = C_G(P) = O_p(G) = F(G)$, M — p-сверхразрешимая подгруппа нечётного порядка, каждая нетривиальная подгруппа которой действует неприводимо на P.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — p-разрешимая, но не p-сверхразрешимая группа. Пусть P — минимальная нормальная подгруппа группы G. Докажем, что P — единственная минимальная нормальная подгруппа.

Действительно, ввиду леммы 3 в любой максимальной цепи факторгруппы G/P содержится одно и то же число индексов, делящихся на p. Понятно, что группа G/P является p-разрешимой. Но тогда ввиду леммы 5 группа G/P является p-сверхразрешимой. Значит, P — либо p'-группа, либо p-группа. Но в первом случае из p-сверхразрешимости факторгруппы G/P следует p-сверхразрешимость самой группы G. Значит, P — элементарная абелева p-группа. Но тогда и группа G p-сверхразрешима. Так как формация всех p-сверхразрешимых групп является насыщенной, то $P \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда ввиду [6, с.168]

$$P = C_G(P) = O_p(G) = F(G).$$

Таким образом, P — единственная минимальная нормальная p-подгруппа группы G. Ясно также, что $|P| \neq p$.

Пусть M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая P. Понятно, что $P \cap M = 1$, поэтому $G = [P]M$. Пусть Z_q — подгруппа простого порядка q из M. Рассмотрим группу $D = [P]Z_q$. Ясно, что

$$l_p[G/Z_q] = l_p[M/Z_q] + 1.$$

Ввиду леммы 4 имеем

$$l_p[G/PZ_q] = l_p[M/Z_q].$$

Но тогда

$$l_p[G/Z_q] = l_p[G/PZ_q] + 1.$$

С другой стороны, ввиду леммы 1 имеем

$$l_p[G/Z_q] = l_p[G/PZ_q] + l_p[PZ_q/Z_q],$$

т.е.

$$l_p[PZ_q/Z_q] = 1,$$

что означает, что подгруппа Z_q является максимальной в группе D.

Предположим, что в группе D существует неединичная нормальная подгруппа P_1, порядок которой меньше порядка группы P. Тогда

$$Z_q < P_1 Z_q < D,$$

что противоречит максимальности подгруппы Z_q в группе D.

Итак, P является единственной минимальной нормальной подгруппой в группе D. Понятно также, что P является минимальной нормальной подгруппой и в группе $T = [P]H$, где H — любая подгруппа группы M.

Понятно, что H является максимальной подгруппой в группе T. Предположим, что порядок группы M делится на простое число p. Пусть Z_p — группа порядка p группы M. Так как Z_p является максимальной подгруппой в группе PZ_p, а индекс Z_p в PZ_p равен p, то $|P| = p$. Противоречие.

Покажем, что порядок группы M не делится на 2. Предположим, что это не так, и пусть Z_2 — группа порядка 2 в M. Поскольку $Z_2 < \cdot PZ_2$, то PZ_2 — группа Шмидта. Значит, ввиду [5, с. 243] $|P| = p$. Противоречие. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть p-разрешимая группа G не является p-сверхразрешимой и $G = [P]M$, где P — нециклическая минимальная нормальная подгруппа группы G, являющаяся ее силовской p-подгруппой, причем $P = C_G(P) = O_p(G) = F(G)$, M — p-сверхразрешимая подгруппа нечётного порядка, каждая нетривиальная подгруппа которой действует неприводимо на P. Пусть Z — произвольная подгруппа простого порядка группы P. Докажем, что подгруппа Z является p-эквидистантной в группе G. Допустим, что существует максимальная $(G - Z)$-цепь, не проходящая через группу P. Тогда в группе G найдется такая максимальная подгруппа T, что

$$Z \subseteq T \text{ и } P \not\subseteq T.$$

В этом случае

$$G = PT \text{ и } T \cap P = 1.$$

Но

$$1 \neq Z \subseteq T \cap P.$$

Противоречие.

Значит, все максимальные $(G - Z)$-цепи проходят через подгруппу P, и пусть

$$Z <\cdot P_1 <\cdot \ldots <\cdot P_k = P <\cdot \ldots <\cdot P_n = G -$$

одна из них. Если $|P| = p^r$, то в этой цепи r индексов, делящихся на p, т.е. Z является p-эквидистантной в группе G.

Пусть теперь Z — произвольная подгруппа простого порядка q группы G, не входящая в подгруппу P. Тогда $q \neq p$ и поэтому ввиду [4] Z содержится в некоторой холловской p'-подгруппе группы G. Рассмотрим произвольную максимальную $(G - Z)$-цепь, проходящую через подгруппу M^x для некоторого $x \in G$:

$$Z <\cdot \ldots <\cdot M^x <\cdot G.$$

В любой максимальной цепи такого вида имеется только один индекс, делящийся на p, а именно $|G : M^x| = |P|$.

Рассмотрим теперь произвольную максимальную $(G - Z)$-цепь, не проходящую через подгруппу M^x для всех $x \in G$:

$$Z = M_0 <\cdot M_1 <\cdot \ldots <\cdot M_k <\cdot M_{k+1} <\cdot \ldots <\cdot M_t = G,$$

в которой все M_i содержатся в группе M^x для некоторого $x \in G$, где $i \in \{0, \ldots k\}$, а M_i для любого $i = k+1, \ldots, t$ не содержатся в M^z для любого $z \in G$. Это означает, что $p \mid |M_i|$ для любого $i = k+1, \ldots, t$. Тогда ввиду [7, с. 21] $(M_i)_p = P \cap M_i$ — силовская p-подгруппа в группе M_i, где $i \in \{k+1, \ldots, t\}$. Так как $(M_i)_p \lhd M_i$, то ввиду [8, с. 221] в группе M_i имеются холловские p'-подгруппы. Пусть $(M_i)_{p'}$ — одна из них. Тогда

$$M_i = [M_i \cap P](M_i)_{p'}.$$

Так как $(M_i)_{p'}$ действует неприводимо на P, то в P нет такой собственной подгруппы P_1, что $(M_i)_{p'} \subseteq N_G(P_1)$. Значит, так как $(M_i)_p = P \cap M_i \lhd M_i$, то $P \cap M_i = P$, т.е.

$$M_i = [P](M_i)_{p'}.$$

Понятно, что индексы $|M_i : M_{i-1}|$ для любого $i = 1, \ldots, k$ на p не делятся. Для любого $i = k+2, \ldots, t$ индексы

$$|M_i : M_{i-1}| = \frac{|M_i|}{|M_{i-1}|} = \frac{|[P](M_i)_{p'}|}{|[P](M_{i-1})_{p'}|} =$$

$$= \frac{|P||(M_i)_{p'}|}{|P \cap (M_i)_{p'}|} \cdot \frac{|P \cap (M_{i-1})_{p'}|}{|P||(M_{i-1})_{p'}|} = \frac{|(M_i)_{p'}|}{|(M_{i-1})_{p'}|}$$

также не делятся на p. Так как

$$|M_{k+1} : M_k| = \frac{|M_{k+1}|}{|M_k|} = \frac{|[P](M_{k+1})_{p'}|}{|M_k|} =$$

$$= \frac{|P||(M_{k+1})_{p'}|}{|P \cap (M_{k+1})_{p'}||M_k|} = \frac{|P||(M_{k+1})_{p'}|}{|M_k|},$$

то в рассмотренной выше максимальной $(G-Z)$-цепи только один индекс делится на p.

Таким образом, любая минимальная подгруппа группы G, не входящая в подгруппу P, также является p-эквидистантной. Теорема доказана.

Лемма 7. *Пусть G — p-разрешимая группа. Тогда в том и только в том случае любая минимальная подгруппы P группы G является p-эквидистантной в G тогда и только тогда, когда либо группа G является p-сверхразрешимой, либо G — такая не p-сверхразрешимая группа, что $G = [P]M$, где P — нециклическая минимальная нормальная подгруппа группы G, являющаяся ее силовской p-подгруппой,* *причем $P = C_G(P) = O_p(G) = F(G)$, M — p-сверхразрешимая подгруппа нечётного порядка, каждая нетривиальная подгруппа которой действует неприводимо на P.*

Доказательство вытекает из лемм 2 и 6.

Для доказательства основного результата данной работы нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 8. *Если для минимальной подгруппы L группы G решетка $[G/L]$ дистрибутивна, то и для любой неединичной подгруппы H группы G, содержащей L, решетка $[H/L]$ является дистрибутивной.*

Доказательство. Так как $[H/L]$ является подрешеткой решетки $[G/L]$, и подрешетка дистрибутивной решетки также дистрибутивна, то $[H/L]$ является дистрибутивной решеткой. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если для минимальнай нормальной подгруппы H группы G решетка $[H/L]$ дистрибутивна, то факторгруппа G/H является циклической.*

Доказательство. Так как решетка $[G/H]$ дистрибутивна, и, очевидно, $L(G/H) \simeq [G/H]$, то и решетка подгрупп факторгруппы G/H дистрибутивна. Поэтому ввиду [1, с. 227] группа G/H является циклической. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть G — нильпотентная нециклическая группа. Если для любой минимальной подгруппы L группы G решетка $[G/L]$ дистрибутивна, то G является примарной группой.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Пусть p, q — различные простые делители порядка группы G, G_p, G_q — силовская p-подгруппа и силовская q-подгруппа группы G соответственно. Так как в нильпотентной группе все силовские подгруппы нормальны, а $G/G_p \simeq G_q$ и $G/G_q \simeq G_p$ — минимальные нормальные подгруппы, то ввиду леммы 9 подгруппы G/G_q и G/G_p являются циклическими. Но тогда группа G, являясь произведением своих силовских циклических подгрупп, сама является циклической. Противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 11. *Пусть G – абелева нециклическая группа. Тогда для любой минимальной подгруппы L группы G решетка $[G/L]$ является дистрибутивной тогда и только тогда, когда G – элементарная абелева группа порядка p^2.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $G = Z_{p^{\alpha_1}} \times \times Z_{p^{\alpha_2}} \times \ldots \times Z_{p^{\alpha_t}}$ – абелева нециклическая группа; L – произвольная минимальная подгруппа группы G. Рассмотрим сначала случай $L \subseteq \subseteq Z_{p^{\alpha_1}}$. Тогда $G/L \simeq (Z_{p^{\alpha_1}}/L) \times Z_{p^{\alpha_2}} \times \ldots \times Z_{p^{\alpha_t}}$. Ввиду леммы 9 G/L является циклической группой, а значит, либо $Z_{p^{\alpha_1}}/L = 1$, либо $Z_{p^{\alpha_2}} \times \times \ldots \times Z_{p^{\alpha_t}} = 1$. Если $Z_{p^{\alpha_2}} \times \ldots \times Z_{p^{\alpha_t}} = 1$, то $G = Z_{p^{\alpha_1}}$. Противоречие. Значит, $Z_{p^{\alpha_1}}/L = 1$, т.е. $L = Z_{p^{\alpha_1}}$ и $t = 2$.

Если $L \subseteq Z_{p^{\alpha_2}}$, то аналогично получаем, что $L = Z_{p^{\alpha_2}}$. Таким образом, $G = Z_{p^{\alpha_1}} \times Z_{p^{\alpha_2}} = Z_p \times Z_p$ и $|G| = p^2$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть G – элементарная абелева группа порядка p^2, т.е. $G = Z_p \times Z_p$, где Z_p – подгруппа порядка p группы G. Так как $G/Z_p \simeq Z_p$ – циклическая группа, то ввиду [1, с. 227] решетка $L(G/Z_p)$ всех подгрупп факторгруппы G/Z_p является дистрибутивной. Ввиду изоморфизма $L(G/Z_p) \simeq [G/L_p]$ следует дистрибутивнсть решетки $[G/Z_p]$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть G – нильпотентная группа. Тогда и только тогда для любой минимальной подгруппы L группы G решетка $[G/L]$ дистрибутивна, когда G – либо циклическая группа, либо элементарная абелева группа порядка p^2.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть в нильпотентной группе G для любой минимальной подгруппы L группы G решетка $[G/L]$ дистрибутивна. Пусть H – минимальная нормальная подгруппа группы G. Ввиду леммы 9 факторгруппа G/H является циклической. Так как группа G нильпотентна, то $H \subseteq Z(G)$. Значит, группа $G/Z(G)$ также циклична. Ввиду [8, с. 206], группа G является абелевой. Если G – абелева нециклическая группа , то ввиду леммы 11 $|G| = p^2$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Если G является нильпотентной циклической группой, то ввиду [1, с. 227], решетка ее подгрупп дистрибутивна. Значит, дистрибутивна и ее подрешетка вида $[G/L]$, где L – минимальная нормальная подгруппа группы G.

Если G — элементарная абелева группа порядка p^2, то ввиду изоморфизма $G/L \simeq Z_p$, где Z_p – группа порядка p, L – любая минимальная подгруппа группы G, следует, что факторгруппа G/L циклическая. Но тогда ввиду [1, с. 227], решетка $[G/L]$ является дистрибутивной. Лемма доказана.

Лемма 13. *Пусть G — разрешимая, но не сверхразрешимая группа. Если для любой минимальной подгруппы L группы G решетка $[G/L]$ является дистрибутивной, то $G = [P]M$ — группа Фробениуса, инвариантный множитель P которой является минимальной нормальной p-подгруппой группы G, силовской подгруппой группы G порядка p^2, причем $P = C_G(P) = O_p(G) = F(G)$, M — циклическая подгруппа нечетного порядка, каждая нетривиальная подгруппа которой действует неприводимо на P.*

Доказательство. Пусть P — произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G, являющаяся p-группой. Так как по условию леммы решетка $[G/P]$ дистрибутивна, то ввиду [1, с. 227] факторгруппа G/P циклична. Значит, P не является группой простого порядка и P — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть теперь G_p — силовская p-подгруппа группы G. Тогда согласно лемме 11 $|G_p| = p^2$. Это влечет $P = G_p$. Понятно, что $P \not\subseteq \Phi(G)$ и поэтому ввиду [6, с.168]

$$G = [P]M, \quad P = C_G(P) = O_p(G) = F(G).$$

Кроме того, как и при доказательстве леммы 6 легко видеть, что что M — группа нечетного порядка и каждая ее нетривиальная подгруппа действует неприводимо на P. Докажем, что группа G является группой Фробениуса. Предположим, что это не так. Пусть существует $x \in G \backslash M$ такой, что $D = M \cap M^x \neq 1$. Так как $D \triangleleft M \cup M^x$, то $D \triangleleft \langle M \cup M^x \rangle = G$. Значит, $M_G \neq 1$. Противоречие. Итак, группа G является группой Фробениуса с ядром P и дополнением M. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть $G = [P]Q$ — группа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой P и ненормальной циклической силовской q-подгруппой Q. Для любой минимальной подгруппы L группы G решетка $[G/L]$ является дистрибутивной тогда и только тогда, когда $|G| = p^2q$.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Так как все собственные подгруппы группы G нильпотентны, то ввиду лемм 8 и 12 все собственные подгруппы группы G абелевы. Так как силовская p-подгруппа P

абелева, то $\Phi(P) = 1$ и ввиду леммы 11 P — элементарная абелева порядка p^2. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа группы G, содержащая группу P. Так как P — нециклическая группа, то и группа M не является циклической. Значит, ввиду леммы 11 $|M| = p^2$. Но тогда $|Q| = q$ и $|G| = p^2q$.

Достаточность очевидна. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть G — сверхразрешимая ненильпотентная группа. Если для любой минимальной подгруппы H группы G решетка $[G/H]$ дистрибутивна, то $G = [P]M$ — группа Фробениуса с ядром P и дополнением M, причем $P = C_G(P) = O_p(G) = F(G)$ — нормальная силовская подгруппа порядка p, где p — наибольший простой делитель порядка группы G, M — максимальная циклическая подгруппа группы G.*

Доказательство. Так как ввиду [9, с. 711], в сверхразрешимой группе для наибольшего простого делителя порядка группы силовская p-подгруппа, скажем L, нормальна в G, то в группе G существует минимальная нормальная подгруппа P, входящая в L. Понятно, что $|P| = p$. Так как ввиду леммы 9 факторгруппа G/P является циклической, а значит, — нильпотентной, то $P \not\subseteq \Phi(G)$. Пусть M — такая максимальная подгруппа группы G, что $G = [P]M$. Тогда ввиду изоморфизма $G/P \simeq$ $\simeq M$ следует, что M — циклическая группа. Как и при доказательстве леммы 13 можно показать, что G — группа Фробениуса с ядром P и дополнением M. Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть $G = [P]M$, где каждая каждая подгруппа из M действует неприводимо на P. Тогда для любого $x \in G$ каждая подгруппа из M^x действует неприводимо на P.*

Доказательство. Предположим, что лемма не верна. Допустим, что в P найдется такая собственная неединичная подгруппа P_1 и в M^x имеется такая подгруппа T, что

$$P_1T = [P_1]T.$$

Тогда

$$([P_1]T)^{x^{-1}} = [P_1]^{x^{-1}}T^{x^{-1}},$$

где $P_1^{x^{-1}}$ — неединичная нетривиальная подгруппа в P и $T^{x^{-1}}$ — подгруппа в M, что противоречит условию. Лемма доказана.

Главным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 17. *Пусть G — разрешимая, но не сверхразрешимая группа. Тогда для любой минимальной подгруппы H группы G решетка $[G/H]$ дистрибутивна в том и только в том случае, когда G — группа одного из следующих типов:*

1) G — циклическая группа;

2) G — элементарная абелева группа порядка p^2;

3) $G = [P]M$ — группа Фробениуса с ядром P и циклическим дополнением M, причем $P = C_G(P) = O_p(G) = F(G)$ — нормальная силовская p-подгруппа, являющаяся минимальной нормальной подгруппой группы G, и либо $|P| = p$, где p — наибольший простой делитель $|G|$, либо P — элементарная абелева группа порядка p^2 и каждая нетривиальная подгруппа из M действует неприводимо на P.

Доказательство. Необходимость. Пусть для любой минимальной подгруппы H группы G решетка $[G/H]$ дистрибутивна. Если G — абелева нециклическая группа, то ввиду леммы 11 выполняется условие 2).

Если G — нильпотентная группа, то ввиду леммы 12 выполняется либо условие 1), либо условие 2).

Если G — сверхразрешимая ненильпотентная группа, то ввиду леммы 15 выполняется условие 3).

Если G — несверхразрешимая группа, то ввиду леммы 13 снова видим, что выполняется условие 3).

Достаточность. Пусть группа G удовлетворяет условию 1). Тогда ввиду [1, с. 227] решетка подгрупп группы G является дистрибутивной. Пусть H — произвольная минимальная подгруппа группы G. Очевидно, решетка $[G/H]$ является подрешеткой решетки $L(G)$. Значит, решетка $[G/H]$ также является дистрибутивной.

Пусть группа G удовлетворяет условию 2). Тогда ввиду леммы 11 для любой минимальной подгруппы H группы G решетка $[G/H]$ является дистрибутивной.

Пусть группа G удовлетворяет условию 3) и пусть H — произвольная минимальная подгруппа группы G. Пусть A, B, C — произвольные подгруппы решетки $[G/H]$. Докажем, что

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

Включение $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \subseteq A \wedge (B \vee C)$ очевидно. Для доказательства обратного включения $A \wedge (B \vee C) \subseteq (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ прежде предположим, что $H = P$, где P — группа простого порядка p. В этом случае, поскольку факторгруппа G/P является циклической, то ввиду [1, с. 227] решетка $L(G/P)$ является дистрибутивной. Значит,

$$(A/P) \wedge ((B/P) \vee (C/P)) \subseteq ((A/P) \wedge (B/P)) \vee ((A/P) \wedge (C/P)).$$

Но поскольку в факторгруппе G/P все подгруппы нормальны, то подгруппы A, B, C нормальны в группе G. Значит,

$$(B/P) \vee (C/P) = (B/P)(C/P) = BC/P.$$

Аналогично имеем

$$((A/P) \wedge (B/P)) \vee ((A/P) \wedge (C/P)) = ((A/P) \wedge (B/P))((A/P) \wedge (C/P)) =$$

$$= ((A \wedge B)/P)((A \wedge C)/P) = ((A \wedge B)(A \wedge C))/P.$$

Это влечет

$$(A/P) \wedge (BC/P) = (A \wedge BC)/P \subseteq ((A \wedge B)(A \wedge C))/P,$$

и поэтому

$$A \wedge BC \subseteq (A \wedge B)(A \wedge C),$$

т.е.

$$A \wedge (B \vee C) \subseteq (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

Пусть теперь $H \subset P$ и пусть одна из подгрупп A, B, C, скажем, A, не содержит P. Тогда

$$P \cap A = H.$$

Значит,

$$A = [P \cap A]A_{p'} = [H]A_{p'}$$

для некоторой p'-холловской подгруппы $A_{p'}$ из A. Согласно [11, с. 206]

$$A_{p'} \subseteq M^x$$

для некоторого $x \in G$. Значит, ввмду леммы 16 $A_{p'}$ действует неприводимо на P. Следовательно, $P \cap A = P$, т.е. $P \subseteq A$ Противоречие.

Пусть теперь H — произвольная подгруппа группы G порядка $q \neq p$.

Рассмотрим следующие формально возможные случаи.

1. $P \not\subseteq A$, $P \not\subseteq B$, $P \not\subseteq C$.

Так как подгруппы A, B, C являются p'-подгруппами, то ввиду [11, с. 206] подгруппы A, B, C содержатся в некоторых p'-холловых подгруппах, т.е. $A \subseteq M^x$, $B \subseteq M^y$, $C \subseteq M^z$ для некоторых x, y, $z \in G$. По условию теоремы $M^x \cap M^y \cap M^z = 1$ для $x \neq y \neq z$. Но так как $H \subseteq A \cap B \cap C$, то $M^x = M^y = M^z$. Значит, A, B, $C \subseteq M^x$. Но M^x — циклическая группа, значит, ввиду [1, с. 227] решетка ее подгрупп дистрибутивна, т.е.

$$A \wedge (B \vee C) \subseteq (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

2. $P \not\subseteq A$, $P \not\subseteq C$, $P \subseteq B$.

Ясно, что $B = PB_{p'}$, где $B_{p'}$ — некоторая холлова p'-подгруппа группы B. Так как при этом $H \subseteq B$, то не теряя общности, мы можем считать, что $H \subseteq B_{p'}$. Так как подгруппы A, C являются p'-подгруппами, и M — холлова p'-подгруппа, то ввиду теоремы Холла $A \subseteq M^x$, $C \subseteq M^y$ для некоторых x, $y \in G$. Но так как по условию теоремы $M^x \cap M^y = 1$ для $x \neq y$, а $H \subseteq A \cap C$, то $M^x = M^y$. Итак, $A \subseteq M^x$, $C \subseteq M^x$. Понятно, что $H \subseteq B_{p'} \subseteq M^z$ для некоторого $z \in G$. Так как $M^x \cap M^z = 1$ для $x \neq z$, а $H \subseteq M^x \cap M^z$, то $M^x = M^z$. Значит, $B_{p'} \subseteq M^x$. Так как M^x — циклическая группа, то решетка ее подгрупп дистрибутивна. Тогда

$$A \wedge (B_{p'} \vee C) = (A \wedge B_{p'}) \vee (A \wedge C).$$

Ясно, что $A \wedge (B \vee C) = A \cap BC$ — p'-группа. Так как при этом $H \subseteq A$, $H \subseteq BC$, т.е. $H \subseteq A \cap BC$, и в группе BC содержится единственная p'-холлова подгруппа $B_{p'}C$, содержащая H, то $A \cap BC \subseteq B_{p'}C$. Но тогда

$$A \cap BC \subseteq A \cap B_{p'}C = (A \cap B_{p'})(A \cap C) = (A \cap B)(A \cap C).$$

Значит,

$$A \wedge (B \vee C) \subseteq (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

3. $P \not\subseteq A$, $P \not\subseteq B$, $P \subseteq C$.

Этот случай аналогичен случаю 2.

4. $P \subseteq A$, $P \not\subseteq B$, $P \not\subseteq C$.

Ясно, что $A = PA_{p'}$, где $A_{p'}$ — некоторая p'-холлова подгруппа группы A. Как и в случае 2 можно показать, что $A_{p'}$, B, $C \subseteq M^x$. Так как M^x — циклическая группа, то ввиду [1, с. 227] решетка ее подгрупп дистрибутивна. Тогда

$$A_{p'} \wedge (B \vee C) = (A_{p'} \wedge B) \vee (A_{p'} \wedge C).$$

Ясно, что $A \cap BC$ — p'-подгруппа в группе A. Так как при этом $H \subseteq A$, $H \subseteq BC$, т.е. $H \subseteq A \cap BC$, и в группе A содержится единственная p'-холлова подгруппа $A_{p'}$, содержащая H, то $A \cap BC \subseteq A_{p'}$. Но тогда

$$A \cap BC \subseteq A_{p'} \cap BC = (A_{p'} \cap B)(A_{p'} \cap C) = (A \cap B)(A \cap C).$$

Значит,

$$A \wedge (B \vee C) \subseteq (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

5. $P \nsubseteq A$, $P \subseteq B$, $P \subseteq C$.

Ясно, что $B = PB_{p'}$, $C = PC_{p'}$, где $B_{p'}$ — некоторая холлова p'-подгруппа группы B, $C_{p'}$ — некоторая холлова p'-подгруппа группы C и $H \subseteq B_{p'}, H \subseteq C_{p'}$. Как и в случае 2 можно показать, что A, $B_{p'}$, $C_{p'} \subseteq M^x$. Так как M^x — циклическая группа, то ввиду [1, с. 227] решетка ее подгрупп дистрибутивна. Тогда

$$A \wedge (B_{p'} \vee C_{p'}) = (A \wedge B_{p'}) \vee (A \wedge C_{p'}).$$

Ясно, что $A \cap BC$ — p'-подгруппа в группе BC. Так как при этом $H \subseteq A$, $H \subseteq BC$, т.е. $H \subseteq A \cap BC$, и в группе BC содержится единственная p'-холлова подгруппа $B_{p'}C_{p'}$, содержащая H, то $A \cap BC \subseteq B_{p'}C_{p'}$. Но тогда

$$A \cap BC \subseteq A \cap B_{p'}C_{p'} = (A \cap B_{p'})(A \cap C_{p'}) = (A \cap B)(A \cap C).$$

Значит,

$$A \wedge (B \vee C) \subseteq (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

6. $P \subseteq A$, $P \subseteq B$, $P \nsubseteq C$.

Ясно, что $A = PA_{p'}$, где $A_{p'}$ — некоторая p'-холлова подгруппа группы A, содержащая H, $B = PB_{p'}$, где $B_{p'}$ — некоторая p'-холлова подгруппа группы B, содержащая H. Пусть $D = A \cap BC$. Так как $P \subseteq B$, то $P \subseteq BC$. Так как $P \subseteq A$, то $P \subseteq A \cap BC = D$. Таким образом, $D = PD_{p'}$, где $D_{p'}$ — некоторая p'-холлова подгруппа группы D. Так как $H \subseteq BC$ и $H \subseteq A$, то $H \subseteq A \cap BC = D$. Понятно, что $H \subseteq D_{p'}^d$ при некотором $d \in D$. Не теряя общности, можем считать, что $H \subseteq D_{p'}$.

Так как $D_{p'}$ — p'-подгруппа группы G, то $D_{p'} \subseteq M^x$ для некоторой холловой p'-подгруппы группы G. Так как C — p'-подгруппа группы G, то $C \subseteq M^y$, где M^y — некоторая холлова p'-подгруппа группы G. Ввиду условия теоремы $M^x \cap M^y = 1$ для $x \neq y$. Так как $H \subseteq M^x \cap M^y$, то $M^x = M^y$. Значит, $C \subseteq M^x$, $D \subseteq M^x$. Аналогично можно показать, что $B_{p'} \subseteq M^x$, $A_{p'} \subseteq M^x$. Но так как группа M^x циклическая, то ввиду [1, с. 227] решетка ее подгрупп дистрибутивна. Значит,

$$A_{p'} \wedge (B_{p'} \vee C) = (A_{p'} \wedge B_{p'}) \vee (A_{p'} \wedge C).$$

С другой стороны, так как $D_{p'} \subseteq A$ и в группе A содержится лишь одна p'-холлова подгруппа $A_{p'}$, содержащая H, то $D_{p'} \subseteq A_{p'}$. Аналогично можно показать, что $D_{p'} \subseteq B_{p'}C$. Значит,

$$D_{p'} \subseteq A_{p'} \cap B_{p'}C = A_{p'} \wedge (B_{p'} \vee C) = (A_{p'} \wedge B_{p'}) \vee (A_{p'} \wedge C) \subseteq (A \cap B)(A \cap C).$$

Но так как $P \subseteq A \cap B$ и $D_{p'} \subseteq (A \cap B)(A \cap C)$, то $D = PD_{p'} \subseteq (A \cap \cap B)(A \cap C)$. Итак,

$$A \wedge (B \vee C) \subseteq (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

7. $P \subseteq A$, $P \not\subseteq C$, $P \subseteq B$.

Этот случай аналогичен случаю 6.

Аналогично разбирается случай, когда P — элементарная абелева группа порядка p^2 и каждая нетривиальная подгруппа из M действует неприводимо на P.

Итак,

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

т.е. решетка $[G/H]$ дистрибутивна. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

[1] Биркгоф Г. Теория решеток.— М.: Наука, 1984.— 568 с.

[2] Беркович Я. Г. Конечные группы, удовлетворяющие ослабленным условиям Жордана-Дедекинда относительно цепей // Конечные группы: Сб. ст.— Минск: Наука и техника, 1966.— С. 14—23.

[3] Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов: Учебное пособие.— Гомель: УО "ГГУ им. Ф.Скорины", 2003.— 319 с.

[4] Чунихин С.А. О π-свойствах конечных групп // Мат. сб.—1949.— 25, № 3.— С. 321—346.

[5] Шеметков Л.А. Формации конечных групп.— М.: Наука, 1978.— 272 с.

[6] Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем.— М.: Наука, 1989.— 256 с.

[7] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups.—Berlin-New York: Walter de Gruyter, 1992.— 892 p.

[8] Gorenstein D. Finite Groups.— New York: Harper and Row (reprinted by Chelsea), 1980.— 527 p.

[9] Huppert B. Endliche Gruppen I.— Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.— 792 s.

[10] Schmidt R. Subgroup lattices of groups.— Berlin–New York: de Gruyter, 1994.— 572 p.

[11] Weinstein M. Between Nilpotent and Solvable.— Polygonal Publishing House, 1982.— 232 p.

[12] Wenbin Guo. The Theory of Classes of Groups.— Beijing–New York–Dordrecht–Boston–London: Science Press-Kluwer Academic Publishers, 2000.

Задорожнюк Елена Андреевна,
Скиба Александр Николаевич

Группы с заданной решеткой подгрупп

Препринты Учреждения образования "Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины"

Подписано в печать 18.11.2003 г. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. п. л. 1,25 Уч.-изд. л. 1,16 Тираж 15 экз.

Отпечатано на полиграфической технике ГГУ им. Ф.Скорины.
Лицензия ЛВ № 357 от 12 февраля 1999.
246019 г.Гомель, ул.Советская 104