

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай
УО «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

**РЕШЕНИЕ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ЛИНЕЙНЫМ ЗАПИРАЮЩИМ В РЕЛЯТИВИСТСКОМ
КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ
ПОТЕНЦИАЛОМ**

Введение

Рассмотрим решение ковариантных двухчастичных уравнений квазипотенциального типа [1, 2] с одним из вариантов модели линейного запирающего потенциала в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) [3], имеющего форму

$$V(r) = \lambda r, \quad (1)$$

где $\lambda > 0$ – константа, $r \geq 0$ – модуль радиус-вектора в РКП. В данной работе найдены численные решения интегральных квазипотенциальных уравнений в РКП. Решение модифицированного уравнения Кадышевского также получено приближённо аналитически.

1. Численное решение квазипотенциальных уравнений в РКП

В случае сферически-симметричных волновых функций $\psi_{(j)}(\chi_q, r)$ системы двух скалярных частиц одинаковой массы m квазипотенциальные уравнения в РКП имеют вид [4]

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \int_0^{\infty} dr' G_{(j)}(\chi_q, r, r') V(r') \psi_{(j)}(\chi_q, r'), \quad (2)$$

где индекс $j=1,2,3,4$ соответствует одному из четырёх вариантов уравнений: $j=1$ ($j=3$) – Логунова-Тавхелидзе (модифицированное), $j=2$ ($j=4$) – Кадышевского (модифицированное). В уравнениях (2) величина χ_q связана с энергией $2E_q$ системы как $2E_q = 2m \operatorname{ch} \chi_q$, $G_{(j)}(\chi_q, r, r')$ – функции Грина, соответствующие рассматриваемым вариантам квазипотенциального подхода и имеющие следующий вид [4]:

$$G_{(j)}(\chi_q, r, r') = G_{(j)}(\chi_q, r - r') - G_{(j)}(\chi_q, r + r'), \quad (3)$$

где

$$G_{(1)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{m \operatorname{sh} 2\chi_q} \frac{\operatorname{sh}(\pi/2 + i\chi_q)mr}{\operatorname{sh}(\pi mr/2)};$$

$$G_{(3)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{2m \operatorname{sh} \chi_q} \frac{\operatorname{ch}(\pi/2 + i\chi_q)mr}{\operatorname{ch}(\pi mr/2)};$$

$$G_{(2)}(\chi_q, r) = \frac{(4m \operatorname{ch} \chi_q)^{-1}}{\operatorname{ch}(\pi mr/2)} - \frac{i}{m \operatorname{sh} 2\chi_q} \frac{\operatorname{sh}(\pi + i\chi_q)mr}{\operatorname{sh} \pi mr};$$

$$G_{(4)}(\chi_q, r) = \frac{-i}{2m \operatorname{sh} \chi_q} \frac{\operatorname{sh}(\pi + i\chi_q)mr}{\operatorname{sh}(\pi mr)}.$$

Для численного решения интегральных уравнений (2) был использован метод, неоднократно применявшийся для нахождения решений ковариантных двухчастичных уравнений в случае резонансных состояний. Метод состоит в замене интегралов в уравнениях (2) интегральными суммами по одной из квадратурных формул с последующим

сведением полученных таким образом равенств к линейным системам однородных алгебраических уравнений:

$$M\psi = 0; \quad M_{mn} = \delta_{mn} - w_n G_{(j)}(\chi_q, r_m, r_n) V(r_n), \quad (4)$$

где M – основная матрица системы, ψ – вектор, составленный из значений волновой функции в узловых точках r_n квадратурной формулы, w_n – весовые коэффициенты квадратурной формулы, δ_{mn} – элементы единичной матрицы. Условие существования ненулевых решений системы уравнений (4) – равенство нулю детерминанта матрицы M

$$f(\chi_q) = \det M = 0 \quad (5)$$

является трансцендентным уравнением относительно дискретных значений величины χ_q . Таким образом, уравнение (5), фактически, является условием квантования энергии. Предварительный поиск корней уравнения (14) целесообразно представить графически на комплексной плоскости величины χ_q . На рисунке 1 сплошной линией изображены нули действительной части $f(\chi_q)$, штриховой – мнимой части, кружками обведены корни уравнения (5), соответствующего уравнению Логунова-Тавхелидзе.

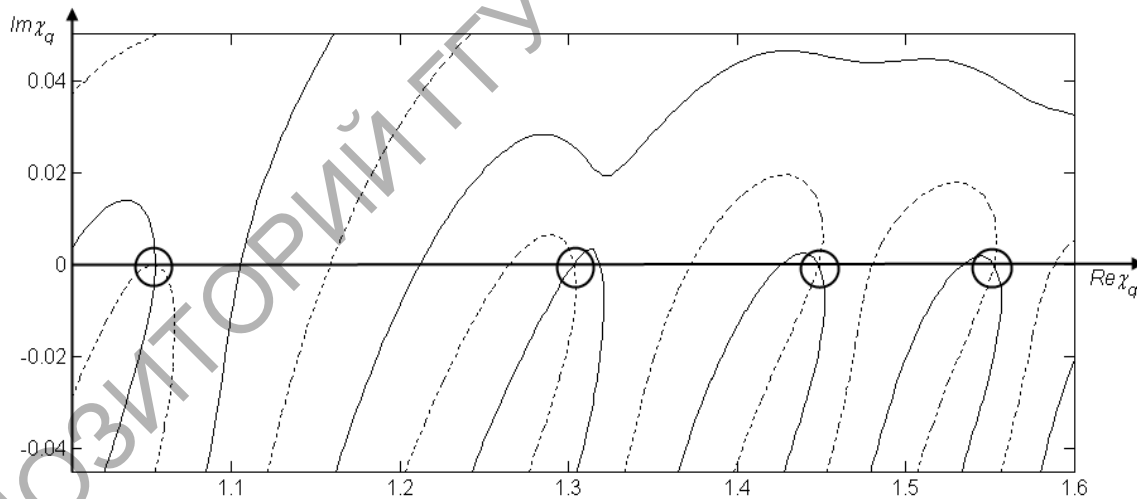


Рисунок 1 – Корни уравнения (14) при $m = 1$, $\lambda = 0,5$

Как видно на рисунке 1, корни расположены на вещественной оси. Рисунки, выполненные для других вариантов уравнений, имеют аналогичный вид, поэтому мы их здесь не приводим.

2. Приближённое решение модифицированного уравнения Кадышевского

Обсудим теперь метод приближённого аналитического решения модифицированного уравнения Кадышевского с потенциалом (1). Выполним над уравнением (2) в случае $j = 4$ преобразование Лапласа [5]. В результате получим следующее равенство:

$$\varphi(\chi_q, p) = \frac{\lambda}{m^2} g(\chi_q, ip/m) \frac{d}{dp} \varphi(\chi_q, p) + \frac{\lambda}{\text{sh } \chi_q} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{\chi_s^{(1)}}{(m\chi_s^{(1)})^2 + p^2} \times \frac{d}{dp} \varphi(\chi_q, p') \Big|_{p'=-i\chi_s^{(1)}m} - \frac{\chi_s^{(2)}}{(m\chi_s^{(2)})^2 + p^2} \times \frac{d}{dp} \varphi(\chi_q, p') \Big|_{p'=-i\chi_s^{(2)}m} \right], \quad (6)$$

где $\varphi(\chi_q, p)$ – изображение волновой функции, определяемое по формуле [5]

$$\varphi_{(j)}(\chi_q, p) = \int_0^{\infty} dr \exp(-pr) \psi_{(j)}(\chi_q, r), \quad (7)$$

p – переменная функции-изображения. В выражении (6) мы также использовали обозначение $g(\chi_q, ip/m) = [2(\cos(p/m) - \text{ch } \chi_q)]^{-1}$. Величины $\chi_s^{(1)} = \chi_q + 2i\pi s$, $\chi_s^{(2)} = -\chi_q + 2\pi i + 2\pi is$ – полюса функции $g(\chi_q, ip/m)$.

Предположим, что в выражении (6) можно пренебречь суммой. Тогда равенство (6) упрощается до дифференциального уравнения первого порядка, которое мы представим в форме:

$$\frac{d}{dp} \varphi(\chi_q, p) = \frac{m^2}{\lambda} g^{-1}(\chi_q, ip/m) \varphi(\chi_q, p). \quad (8)$$

Решение уравнения (8) и последующая подстановка полученной функции в формулу для обращения [5]

$$\psi_{(j)}(\chi_q, r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp \exp(pr) \varphi_{(j)}(\chi_q, p) \quad (9)$$

приводит к следующему интегральному выражению для волновой функции:

$$\psi(\chi_q, r) = C \int_0^{\infty} dt \cos \left[m \left(r - \frac{2m^2 \text{ch } \chi_q}{\lambda} \right) t + \frac{2m^3}{\lambda} \text{sh } t \right], \quad (10)$$

где C – неизвестная константа, возникшая при решении уравнения (8). Интеграл в формуле (10) может быть выражен через функцию Макдональда $K_\nu(z)$ [5] и представлен в виде

$$\psi(\chi_q, r) = C \exp\left[-\pi m/2\left(r - 2m^2 \operatorname{ch} \chi_q/\lambda\right)\right] K_{im(r-2m^2 \operatorname{ch} \chi_q/\lambda)}\left(2m^3/\lambda\right). \quad (11)$$

Из уравнений (2) следует, что волновые функции обращаются в ноль при $r = 0$. Взяв формулу (11) в указанной точке и приравняв её к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение относительно величины χ_q

$$K_{i2m^3 \operatorname{ch} \chi_q/\lambda}\left(2m^3/\lambda\right) = 0, \quad (12)$$

которое, по сути, является условием квантования энергии системы $2E_q^{(n)} = 2m \operatorname{ch} \chi_q^{(n)}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

Таким образом, выражения (11), (12) являются приближённым решением модифицированного уравнения Кадышевского. Насколько полученные приближённые решения оказываются близкими к найденным с высокой точностью численным, можно судить по результатам, приведенным в таблице 1.

Таблица 1 – Значения обезразмеренной энергии $2E_q/m$

	Номер состояния n	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 1,0$	$\lambda = 2,0$	$\lambda = 8,0$	$\lambda = 16,0$
Приближённое аналитическое решение	1	3,5082	4,4255	5,9251	12,5604	19,6222
	2	4,6767	6,3325	9,0690	21,4114	34,7529
	3	5,6566	7,9468	11,7597	29,1824	48,2163
Численное решение	1	3,5068	4,4209	5,9109	12,4510	19,3476
	2	4,6756	6,3292	9,0598	21,3526	34,6160
	3	5,6557	7,9442	11,7527	29,1412	48,1232

Как видно из таблицы, с ростом величины константы связи λ точность значений энергии, найденных приближённо аналитически снижается.

На рисунке 2 приведены волновые функции, удовлетворяющие модифицированному уравнению Кадышевского, найденные приближённо аналитически и численно для $m = 1$, $\lambda = 1$. Как видно на рисунке 2, графики волновых функций, найденных приближённо визуально неотличимы от графиков, построенных на основании численных решений.

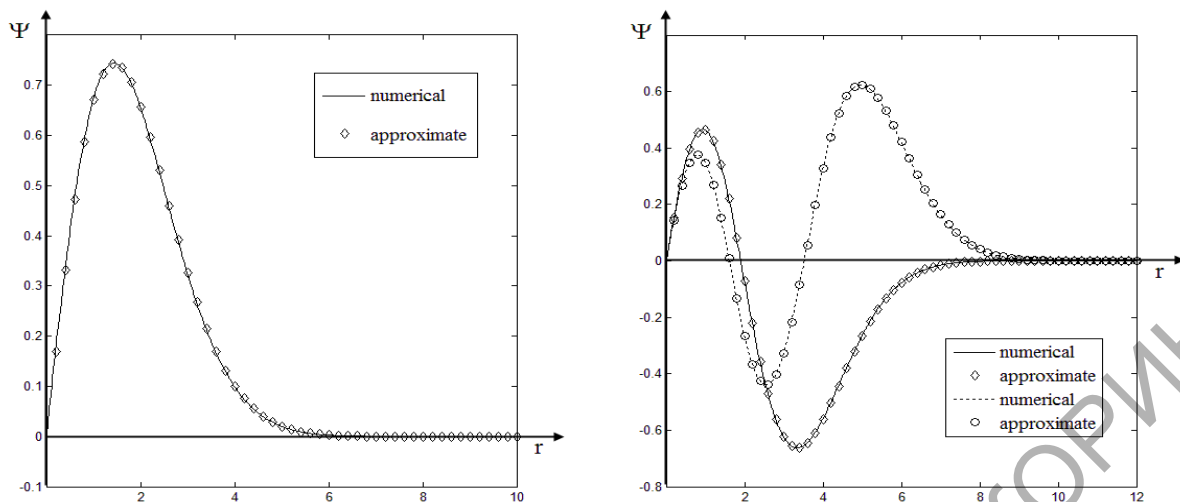


Рисунок 2 – Волновые функции первых трёх состояний

Таким образом, рассмотренный метод позволяет найти решения с хорошей точностью для указанных значений константы связи λ .

Заключение

В данной работе получены численные решения уравнений квази-потенциального типа с линейным запирающим в релятивистском конфигурационном представлении потенциалом. Решение модифицированного уравнения Кадышевского найдено также приближённо аналитически. При этом полученные волновые функции выражены через функцию Макдональда, а собственные значения энергии являются решениями трансцендентного уравнения.

Литература

1. Logunov, A.A. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29, № 2. – P. 380–399.
2. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6, №1. – P. 125–148.
3. Кадышевский, В.Г. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2, № 3. – С. 635–690.
4. Kapshai, V.N. Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ -potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ